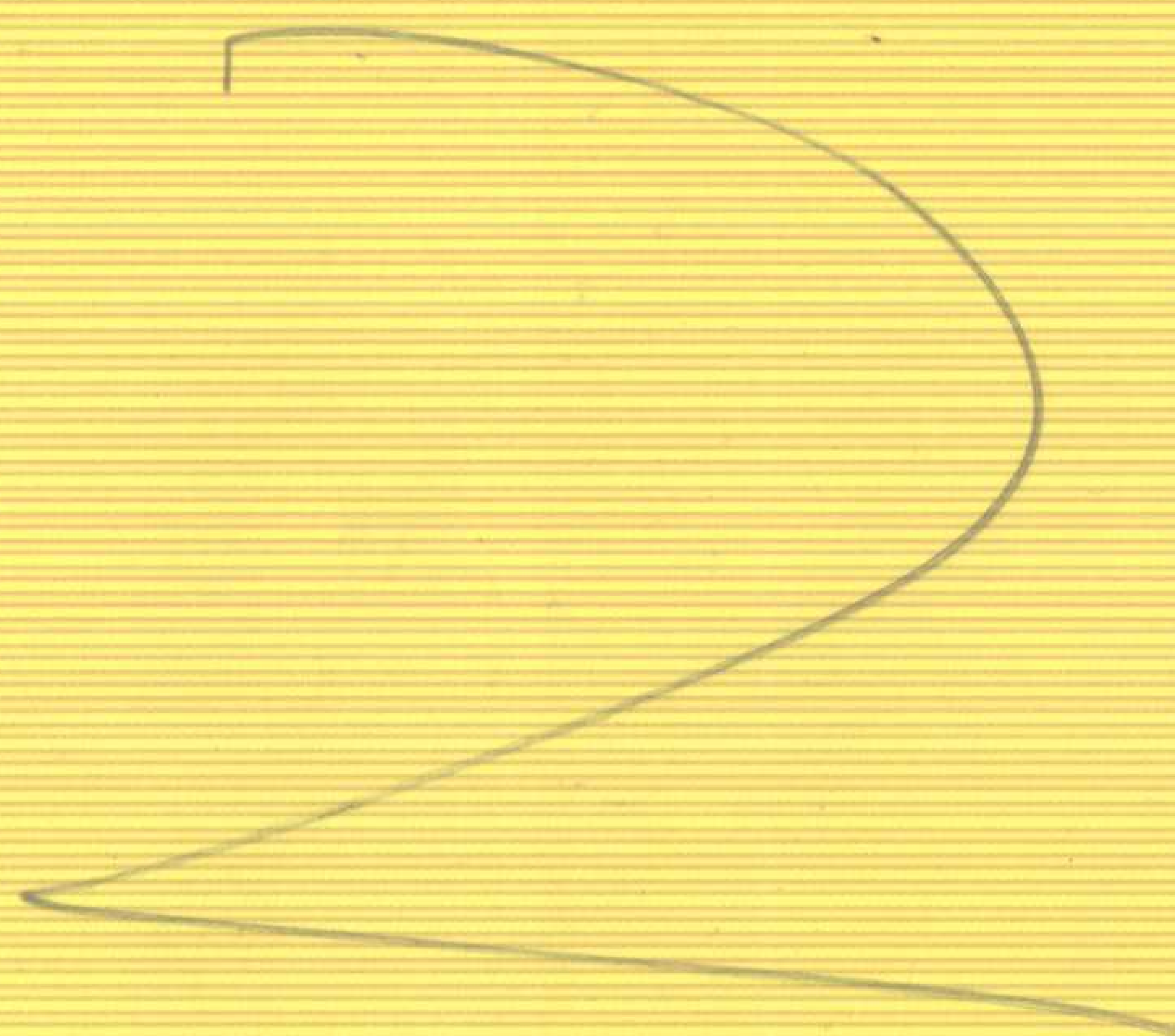
现代数学基础丛书 124

# 非经典数理逻辑与近似推理

（第二版）

王国俊 著





科学出版社
www.sciencep.com

(O-3081.0101)


ISBN 978-7-03-021295-5

9 787030 212955 >

销售分类建议：高等数学

定 价：62.00 元

现代数学基础丛书 124

# 非经典数理逻辑与近似推理

（第二版）

王国俊 著

陕西师范大学康德出版基金资助出版

科 学 出 版 社
北 京

## 内容简介

本书在第一版的基础上修订再版，全书较系统地讲述了各种三值逻辑、*n*值逻辑以及连续值逻辑理论；为模糊命题演算建立了一套形式演绎系统；把模糊推理纳入了严格的逻辑轨道；从整体赋值出发，建立了积分语义学理论，为近似推理提供了一种可能的框架；系统论述了Pavelka逻辑并扼要论述了抽象逻辑. 此外，本书在第一版的基础上增添了模态逻辑、知识推理与描述逻辑的内容.

本书可作为计算机专业、自动控制专业的研究生教材，也可供数学及相关专业的高年级本科生、教师、科研人员阅读参考.

**图书在版编目(CIP)数据**

非经典数理逻辑与近似推理/王国俊著. —2版. —北京：科学出版社，2008

(现代数学基础丛书；124)

ISBN 978-7-03-021295-5

I.非… II.王… III.数理逻辑 IV.O141

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第031067号

责任编辑：毕 颖 张 扬／责任校对：赵桂芬

责任印制：赵德静／封面设计：王 浩

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

源海印刷有限责任公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2000年9月第 一 版 开本：B5(720×1000)

2008年5月第 二 版 印张：20 1/2

2008年5月第一次印刷 字数：377 000

印数：1—3 000

定价：62.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换<路通>)

# 《现代数学基础丛书》编委会

# 《现代数学基础丛书》序

对于数学研究与培养青年数学人才而言，书籍与期刊起着特殊重要的作用．许多成就卓越的数学家在青年时代都曾钻研或参考过一些优秀书籍，从中汲取营养，获得教益．

20 世纪 70 年代后期，我国的数学研究与数学书刊的出版由于文化大革命的浩劫已经破坏与中断了 10 余年，而在这期间国际上数学研究却在迅猛地发展着．1978 年以后，我国青年学子重新获得了学习、钻研与深造的机会．当时他们的参考书籍大多还是 50 年代甚至更早期的著述．据此，科学出版社陆续推出了多套数学丛书，其中《纯粹数学与应用数学专著》丛书与《现代数学基础丛书》更为突出，前者出版约 40 卷，后者则逾 80 卷．它们质量甚高，影响颇大，对我国数学研究、交流与人才培养发挥了显著效用．

《现代数学基础丛书》的宗旨是面向大学数学专业的高年级学生、研究生以及青年学者，针对一些重要的数学领域与研究方向，作较系统的介绍．既注意该领域的基础知识，又反映其新发展，力求深入浅出，简明扼要，注重创新．

近年来，数学在各门科学、高新技术、经济、管理等方面取得了更加广泛与深入的应用，还形成了一些交叉学科．我们希望这套丛书的内容由基础数学拓展到应用数学、计算数学以及数学交叉学科的各个领域．

这套丛书得到了许多数学家长期的大力支持，编辑人员也为其付出了艰辛的劳动．它获得了广大读者的喜爱．我们诚挚地希望大家更加关心与支持它的发展，使它越办越好，为我国数学研究与教育水平的进一步提高做出贡献．

杨　乐

2003 年 8 月

# 第二版前言

本书的第二版与第一版相比较,除改正了第一版中的若干笔误和印刷错误之外,主要增添了第9章,即模态逻辑、知识推理与描述逻辑的内容. 之所以增添这一章是基于以下考虑:模态逻辑、知识推理与描述逻辑都是具有较广泛的应用背景并且是为人工智能学科所关注的课题,国内虽有介绍这些课题的文章和书籍,但就作者所见到的文献而言,其侧重点似乎不在于严格论证,或者预备知识不足而不便于初学者学习,所以在这方面如果有一部能较为系统的、属于入门而又注重严格逻辑论证的教材自然会使读者受益不少. 近几年作者曾应邀先后在四川大学、西南大学、北京大学、湖南大学和上海师范大学等一些地方讲述过这部分内容,效果似乎尚好,所以就萌发了撰写这部分内容的想法. 这部分内容显然与逻辑紧密相关,但又不属于经典数理逻辑中四论(公理集合论、模型论、证明论、递归论)的范围,自然也就可以纳入于非经典数理逻辑的范围之中了. 作者写完了第9章的内容之后,曾由研究生高荣荣、王茹、段巧林和郭秀敏在讨论班中按顺序报告过,这几位同学以及参加讨论的研究生和访问学者提出了不少好的建议,相应的内容也随即作了修改,特别是博士生李璧镜提出了若干重要的修改意见,她还认真地打印了第9章的原稿和修改稿以及编写和打印了全书的新索引,博士生周红军和折延宏认真地校阅了全部书稿,并纠正了第9章中的几处不严密的论述. 在本书第二版出版之际,我对他们的辛勤工作表示感谢.

本书第9章的撰写时间较仓促,内容虽经过几次修改,但由于作者的水平所限,可能还有许多我们未能发现的错误,作者衷心希望各位专家及读者批评指正.

王国俊

2007年于陕西师范大学数学研究所

E-mail :gjwang@ snnu. edu. cn

# 第一版前言

关于数学的适当逻辑基础的问题,……,过分追求严密性,将引入绝境而失去它的真正意义.数学仍然是活跃而富有生命力的,但是它只能建立在实用的基础上.

〔美〕Morris Kline

我们首先就本书的书名《非经典数理逻辑与近似推理》的来历以及撰写本书的目的作一说明,以便读者决定本书是否适合他们学习或参考.这得从本书的论题与数理逻辑学科的关系谈起.

数理逻辑已经有300多年的历史.如果从1880年前不久正式提出谓词演算和集合论时算起,也已有100多年的历史了(见文献[47,49]).如今数理逻辑已经发展成为一门枝繁叶茂的学科.按文献[50]的划分,数理逻辑包括模型论、公理集合论、递归论和证明论四个部分,而按照文献[47]的划分,则数理逻辑可分为五个部分,即在以上四个部分之外再单独把逻辑演算提出来作为一个部分.从应用的广泛与普及性的角度来看,我们认为后面这种划分是更为恰当的.事实上,数理逻辑是一门相当艰深的学科,以至于许多数学家与数理逻辑学家缺乏足够的沟通.或许De Morgan的话在一定程度上反映了这种情况,他说:"我们知道,数学家对于逻辑不如逻辑学家对于数学那样关心"(见文献[46]).而逻辑演算正是数理逻辑学科中受到广大非数理逻辑专家最为关心的部分.为了填补数学家与逻辑学家之间的沟壑,Hamilton专门写了《数学家的逻辑学》(见文献[45]),在总共七章中前四章就讲的是逻辑演算.如果我们把模型论、公理集合论、递归论和证明论称作经典数理逻辑的话,那么本书的"非经典数理逻辑"自然就不属于以上各范畴了.这里我们并未将逻辑演算排除在外,因为逻辑演算是本书的重要组成部分.不过本书的逻辑演算又与经典的逻辑演算有很大不同.

经典的逻辑演算主要包括命题演算与谓词演算(也称一阶逻辑)两个部分.从一定意义上讲,这两个部分的内容在于从形式上分析命题之间的关系以及命题自身的结构从而达到判定命题真伪的目的.然而并非每个命题都可用"真"与"假"这两种情况来判定.一个著名的例子是Łukasiewicz的下述命题:

**命题1　明年12月21日中午我将在华沙.**

对这个未来的事件我们既不能断定其为真,也不能断定其为假.Łukasiewicz引入了不同于"真"和"假"的第三个值来表示其真实程度,并提出了三值逻辑的理

论. 让我们更加展开一些,考虑下面的两个命题.

**命题 2　以后我将成为名人.**

**命题 3　如果我成了名人,大家一定会高兴的.**

这里命题 2 和命题 1 属于同一类型,只是命题 1 中很确切的“明年 12 月 21 日中午”,在命题 2 中改成了模糊不清的“以后”,命题 1 中很清楚的“在华沙”,在命题 2 中变成了难以判定其是或否的“成为名人”. 所以命题 2 与命题 1 相比不能仅仅用“真”与“假”这两个值去判断其真伪. 这里的命题 2 不只是论断具有不确定性,而且命题中出现的概念还具有模糊性. 至于命题 3 这种条件句,虽然从句型上看属于“若 A 则 B”的可判定其真伪的命题,但由于 A 与 B 包含了诸如“名人”、“大家”和“高兴”等许多模糊概念,所以实际上命题 3 是难以用“真”和“假”这两个明确值去判定其真伪的. 如果在命题 3 的基础上再加上“我成了比较有名的人”,那么是否可以得出“大家比较高兴”的结论呢? 这些都不属于经典逻辑所讨论的范围. 但这类命题与推理在日常生活乃至工程技术领域里是大量存在的. 例如,已知

**命题 4　如果扬声器里有严重的交流声,则多半是滤波电容器失效了.**

那么如果“扬声器里有交流声(不很严重)”,则修理工往往就会根据命题 4 推断“滤波电容器可能容量不足了”. 再如,已知

**命题 5　如果小轿车在行驶中方向盘明显抖动,则多半是轮胎没气了.**

那么如果“方向盘有抖动(但不明显)”,则驾驶员往往会考虑“是否轮胎充气不足”,等等. 近年来兴起的模糊推理方法正是针对这类带有模糊性的推理而提出的. 通过用模糊集表示模糊概念,Zadeh 提出了解决上述问题的 CRI 方法,只是似乎与逻辑并无太大联系.

Zadeh 是美国加州大学伯克利分校的控制论专家,他于 1965 年提出了模糊集的概念[9],此后又于 1973 年提出了著名的 CRI 方法[28]. 模糊推理一经提出,立即引起了工程技术界的关注. 20 世纪 70 年代以后,各种模糊推理方法纷纷被提出(见文献[10]),并被应用于工业控制与家电产品的制造中,取得了很大的成功. 但是值得提出的是,模糊推理虽然在应用上是成功的,但在理论基础上却并非无懈可击,并没有归入严密的逻辑系统中. 以“模糊逻辑”或相近的名称命名的文章甚至书籍固然不少,但均未能为模糊推理奠定理论基础. 例如,不久前出版的以“Fuzzy Logic”命名的书[19]只收录了 48 篇不同领域里的文章,实在是与模糊逻辑相距甚远的有名无实的书籍. Pavelka 的系列文章[20~22]倒真是高水平的模糊逻辑的专论,只是并不与诸如 CRI 方法等模糊推理理论挂钩. 难怪 1993 年会爆发一场关于模糊逻辑的争论. 1993 年 7 月,加州大学圣迭戈分校的 Elken 在美国第 11 届人工智能年会上作了题为“模糊逻辑的似是而非的成功”的报告,引起了一场轩然大波. 此后虽有 15 位专家撰稿批驳 Elken 的观点,但 Elken 并未被完全说服,他又以“关于模

糊逻辑的似是而非的争论”作答. 1995 年,Watkins 又撰文说“双方都错了”(见文献[6,11 ~ 14,27]). 由此可见,模糊推理方法的理论基础问题的确是值得商榷的.

本书作者从 20 世纪 70 年代末开始从事模糊拓扑学与格上拓扑学的研究,培养了一批博士与硕士研究生. 在教学与科研过程中发现格上拓扑学的研究方法特别是其中关于序结构的若干基本思想似与上述各类模糊推理方法有某些相通之处. 近年来,随着作者对模糊推理问题逐渐增多的介入和认识,也受朋友们积极建议的鼓舞,于 1993 年开始招收“多值逻辑与模糊逻辑”方向的研究生. 作为教材的一部分,我们曾试用过文献[3 ~5],并系统讲授过 Mukaidono 关于多值逻辑的研究成果[57 ~62]以及 Pavelka 的题为“On Fuzzy Logic”的系列文章[20 ~22]. 关于文献[5],确实是一部很不错的专著,只是其中关于多值逻辑的理论部分仅限于讨论函数完备性问题,似乎面窄了一些. 文献[4]是由著名的多值逻辑学家 Epstein 撰写的,内容比较丰富,只是似乎侧重于多值逻辑的代数理论和逻辑电路的分析,并没有逻辑演算的内容. 而文献[3]则属于关于多值逻辑的早期理论,作为教材是远远不够的. 另外,作者于近年来在学习、讲授以及组织讨论班的过程中逐渐增多了对多值逻辑与模糊逻辑的了解,也撰写和发表了一些这方面的文章(见文献[51 ~55,6,8,27,30,39 ~44,71,72,74 ~76]). 既然一时找不到合适的教材,作者就萌发了自己编写一部讲义的想法. 那么内容如何选定呢? 经过一段讲课与讨论并听取了有关专家的意见,决定编写一部能包含以下内容的教材:

第一,较系统地介绍多值(命题)逻辑的语义理论.

第二,提出一种新的模糊命题演算的形式系统以求为模糊推理建立某种逻辑依据.

第三,用积分方法建立一种语义系统,为近似推理提供一种可能的框架.

第四,介绍 Gerla 关于抽象逻辑与 Pavelka 关于模糊逻辑的工作,为开展进一步的工作奠定基础.

作者采取了边讲、边讨论、边总结的办法. 在此期间还先后邀请了东京明治大学的向殿政男、大阪电气通信大学的水本雅晴、上海铁道大学的胡谋、南京航空航天大学的朱梧槚、英国剑桥大学的 Johnstone、清华大学的应明生、西安交通大学的张文修、捷克奥斯特洛瓦大学的 Novák 和莫斯科罗蒙诺索夫大学的 Perfilieva 等知名专家来陕西师范大学数学研究所讲学. 这些不仅开阔了我们的视野,也丰富了我们的教学内容. 向殿政男的关于多值逻辑范式的研究,水本雅晴的关于模糊推理的著名工作,Johnstone 的范畴逻辑,应明生在近似推理等方面的重要工作,张文修与梁怡在不确定性推理方面富于启发性的思想以及 Novák 继 Pavelka 之后的系列成果(见文献[32,57 ~70]等),在本书的形成中都直接或间接地起到很大的借鉴和促进作用. 由于多值逻辑涉及逻辑演算的语法问题、语义问题、代数问题、函数完备性问题、逻辑表达式的极小化问题以及在逻辑电路上的应用等多个方面,而模糊逻

辑至今尚未有一个成熟的系统，所以本书的撰写目的虽然是明确的，但似乎不太容易找到一个能恰当地涵盖其内容的书名. 最近国家自然科学基金设立了“格上拓扑学与非经典数理逻辑”的重点资助项目，考虑到作者也正是在从事这方面的研究，所以就将书名定为《非经典数理逻辑与近似推理》. 至此读者也已看到本书的内容的确与经典数理逻辑有很大的不同. 当然，“非经典数理逻辑”的名称是大了一些，但为了强调其特点，我们还是使用了“非经典”一词.

本书的内容安排如下：第 1 章介绍自由代数的概念并简要复习经典命题演算的内容，使得即使从未接触过数理逻辑的读者也可以顺利地阅读以后各章. 第 2 章介绍Łukasiewicz 的三值系统 $L_3$、Bochvar 的三值系统 $B_3$、Kleene 的三值系统 $K_3$ 和 Gödel 的三值系统 $G_3$. 然后将其一般化为 $n$ 值系统. 最后介绍作者新近提出的 $\Sigma$-($\alpha$-重言式)理论. 第 3 章介绍作者提出的命题演算的形式系统 $\mathscr{L}^*$. 第 4 章介绍 $\mathscr{L}^*$ 中的语义理论并讨论模糊推理的逻辑基础. 第 5 章介绍作者提出的积分语义理论并为近似推理提供一种可能的框架. 第 6 章介绍抽象逻辑的基本思想. 第 7 章系统介绍 Pavelka 的模糊逻辑，并在许多地方作了详细的分析或评注，以使读者能比较容易地领会或许被复杂的推导掩盖的基本思想. 最后在第 8 章中作者通过将模糊推理抽象化和形式化的方法在经典逻辑学中建立了模糊推理的非模糊形式，从而在一定意义下为模糊推理建立了严格的逻辑基础. 请读者注意，本书的第 5、6、7、8 各章基本上是独立的，它们都只有很少的部分是依赖于前面的章节. 本书虽然是研究生教材的一部分，但相信理工科院校计算机专业等需要了解非经典逻辑与近似推理的高年级学生可以顺利地阅读本书. 本书虽然没有安排专门的习题，但为了加深读者的理解，作者在各章节中阶段性地提出了若干思考题供读者自行练习.

近几年参加听课或讨论的除了我自己的研究生侯健、朱安、何颖俞、刘练珍、周保魁、王向云、任芳、王三民、裴道武和吴洪博外，尚有西安公路交通大学的何文和任功全副教授，西安交通大学的博士研究生杨晓斌、郑亚林、程国盛，中国人民解放军空军第二飞行学院的朱文革，上海师范大学的陈仪香博士，聊城师范学院的孟晗副教授，西北工业大学的博士后李永明，新加坡南洋理工大学的赵东升博士，固原师专的辛晓东以及陕西师范大学数学系的教授杨忠强博士、樊太和博士、赵彬博士和李生刚博士等. 他们曾提出过许多好的意见和建议. 本书的部分内容曾在西南交通大学、上海师范大学、深圳大学、西安交通大学和西安电子科技大学作过报告. 作者还和张文修教授、吴望名教授、应明生教授以及徐扬教授等就逻辑问题进行过讨论，使作者获益匪浅. 我的研究生何颖俞和裴道武纠正了若干笔误，陕西师范大学出版社的朱娆和打印社的黄新玲细心地打印了全部书稿. 作者对以上提到的各单位与个人表示衷心的感谢.

最后，作者要特别感谢中国科学院科学出版基金和陕西师范大学学术出版基金为本书出版所提供的资助. 特别感谢四川大学刘应明院士、清华大学应明生教

授和北京师范大学李洪兴教授，他们都阅读了本书的部分书稿，对本书作了充分的肯定并热情推荐本书的出版. 本书之所以这么快就能与读者见面是与以上各方面的大力支持分不开的.

本书的各部分内容都向研究生或青年教师讲授过，其中不少是作者新近完成的科研成果. 各部分都经过多次讨论. 尽管如此，限于作者的水平，不妥乃至谬误之处都在所难免，希望各位专家与读者不吝赐教.

王国俊

1999 年于陕西师范大学数学研究所

# 《现代数学基础丛书》已出版书目

(按出版时间排序)

1 数理逻辑基础（上册） 1981.1 胡世华、陆钟万 著
2 紧黎曼曲面引论 1981.3 伍鸿熙、吕以辇、陈志华 著
3 组合论（上册） 1981.10 柯召、魏万迪 著
4 数理统计引论 1981.11 陈希孺 著
5 多元统计分析引论 1982.6 张尧庭、方开泰 著
6 概率论基础 1982.8 严士健、王隽骧、刘秀芳 著
7 数理逻辑基础（下册） 1982.8 胡世华、陆钟万 著
8 群构造（上册） 1982.11 张远达 著
9 有限群构造（下册） 1982.12 张远达 著
10 环与代数 1983.3 刘绍学 著
11 测度论基础 1983.9 朱成熹 著
12 分析概率论 1984.4 胡迪鹤 著
13 巴拿赫空间引论 1984.8 定光桂 著
14 微分方程定性理论 1985.5 张芷芬、丁同仁、黄文灶、董镇喜 著
15 傅里叶积分算子理论及其应用 1985.9 仇庆久等 编
16 辛几何引论 1986.3 J.柯歇尔、邹异明 著
17 概率论基础和随机过程 1986.6 王寿仁 著
18 算子代数 1986.6 李炳仁 著
19 线性偏微分算子引论（上册） 1986.8 齐民友 著
20 实用微分几何引论 1986.11 苏步青等 著
21 微分动力系统原理 1987.2 张筑生 著
22 线性代数群表示导论（上册） 1987.2 曹锡华等 著
23 模型论基础 1987.8 王世强 著
24 递归论 1987.11 莫绍揆 著
25 有限群导引(上册) 1987.12 徐明曜 著
26 组合论（下册） 1987.12 柯召、魏万迪 著
27 拟共形映射及其在黎曼曲面论中的应用 1988.1 李忠 著
28 代数体函数与常微分方程 1988.2 何育赞 著

29 同调代数 1988.2 周伯壎 著
30 近代调和分析方法及其应用 1988.6 韩永生 著
31 带有时滞的动力系统的稳定性 1989.10 秦元勋等 编著
32 代数拓扑与示性类 1989.11 马德森著 吴英青、段海鲍译
33 非线性发展方程 1989.12 李大潜、陈韵梅 著
34 反应扩散方程引论 1990.2 叶其孝等 著
35 仿微分算子引论 1990.2 陈恕行等 编
36 公理集合论导引 1991.1 张锦文 著
37 解析数论基础 1991.2 潘承洞等 著
38 拓扑群引论 1991.3 黎景辉、冯绪宁 著
39 二阶椭圆型方程与椭圆型方程组 1991.4 陈亚浙、吴兰成 著
40 黎曼曲面 1991.4 吕以辇、张学莲 著
41 线性偏微分算子引论（下册） 1992.1 齐民友 著
42 复变函数逼近论 1992.3 沈燮昌 著
43 Banach 代数 1992.11 李炳仁 著
44 随机点过程及其应用 1992.12 邓永录等 著
45 丢番图逼近引论 1993.4 朱尧辰等 著
46 线性微分方程的非线性扰动 1994.2 徐登洲、马如云 著
47 广义哈密顿系统理论及其应用 1994.12 李继彬、赵晓华、刘正荣 著
48 线性整数规划的数学基础 1995.2 马仲蕃 著
49 单复变函数论中的几个论题 1995.8 庄圻泰 著
50 复解析动力系统 1995.10 吕以辇 著
51 组合矩阵论 1996.3 柳柏濂 著
52 Banach 空间中的非线性逼近理论 1997.5 徐士英、李冲、杨文善 著
53 有限典型群子空间轨道生成的格 1997.6 万哲先、霍元极 著
54 实分析导论 1998.2 丁传松等 著
55 对称性分岔理论基础 1998.3 唐云 著
56 Gel'fond-Baker 方法在丢番图方程中的应用 1998.10 乐茂华 著
57 半群的 S-系理论 1999.2 刘仲奎 著
58 有限群导引(下册) 1999.5 徐明曜等 著
59 随机模型的密度演化方法 1999.6 史定华 著
60 非线性偏微分复方程 1999.6 闻国椿 著
61 复合算子理论 1999.8 徐宪民 著
62 离散鞅及其应用 1999.9 史及民 编著

63 调和分析及其在偏微分方程中的应用 1999.10 苗长兴 著
64 惯性流形与近似惯性流形 2000.1 戴正德、郭柏灵 著
65 数学规划导论 2000.6 徐增堃 著
66 拓扑空间中的反例 2000.6 汪林、杨富春 编著
67 拓扑空间论 2000.7 高国士 著
68 非经典数理逻辑与近似推理 2000.9 王国俊 著
69 序半群引论 2001.1 谢祥云 著
70 动力系统的定性与分支理论 2001.2 罗定军、张祥、董梅芳 编著
71 随机分析学基础（第二版） 2001.3 黄志远 著
72 非线性动力系统分析引论 2001.9 盛昭瀚、马军海 著
73 高斯过程的样本轨道性质 2001.11 林正炎、陆传荣、张立新 著
74 数组合地图论 2001.11 刘彦佩 著
75 光滑映射的奇点理论 2002.1 李养成 著
76 动力系统的周期解与分支理论 2002.4 韩茂安 著
77 神经动力学模型方法和应用 2002.4 阮炯、顾凡及、蔡志杰 编著
78 同调论——代数拓扑之一 2002.7 沈信耀 著
79 金兹堡-朗道方程 2002.8 郭柏灵等 著
80 排队论基础 2002.10 孙荣恒、李建平 著
81 算子代数上线性映射引论 2002.12 侯晋川、崔建莲 著
82 微分方法中的变分方法 2003.2 陆文端 著
83 周期小波及其应用 2003.3 彭思龙、李登峰、谌秋辉 著
84 集值分析 2003.8 李雷、吴从炘 著
85 数理逻辑引论与归结原理 2003.8 王国俊 著
86 强偏差定理与分析方法 2003.8 刘文 著
87 椭圆与抛物型方程引论 2003.9 伍卓群、尹景学、王春朋 著
88 有限典型群子空间轨道生成的格（第二版） 2003.10 万哲先、霍元极 著
89 调和分析及其在偏微分方程中的应用（第二版） 2004.3 苗长兴 著
90 稳定性和单纯性理论 2004.6 史念东 著
91 发展方程数值计算方法 2004.6 黄明游 编著
92 传染病动力学的数学建模与研究 2004.8 马知恩、周义仓、王稳地、靳祯 著
93 模李超代数 2004.9 张永正、刘文德 著
94 巴拿赫空间中算子广义逆理论及其应用 2005.1 王玉文 著
95 巴拿赫空间结构和算子理想 2005.3 钟怀杰 著
96 脉冲微分系统引论 2005.3 傅希林、闫宝强、刘衍胜 著

97　代数学中的Frobenius结构　2005.7　汪明义　著
98　生存数据统计分析　2005.12　王启华　著
99　数理逻辑引论与归结原理(第二版)　2006.3　王国俊　著
100　数据包络分析　2006.3　魏权龄　著
101　代数群引论　2006.9　黎景辉　陈志杰　赵春来　著
102　矩阵结合方案　2006.9　王仰贤　霍元极　麻常利　著
103　椭圆曲线公钥密码导引　2006.10　祝跃飞　张亚娟　著
104　凝固过程动力学与交界面稳定性引论　2006.12　徐鉴君　著
105　椭圆与超椭圆曲线公钥密码的理论与实现　2006.12　王学理　裴定一　著
106　非线性演化方程的稳定性与分歧　2007.4　马天　汪宁宏　著
107　正规族理论及其应用　2007.4　顾永兴　庞学诚　方明亮　著
108　组合网络理论　2007.5　徐俊明　著
109　矩阵的半张量积:理论与应用　2007.5　程代展　齐洪胜　著
110　鞅与Banach空间几何学　2007.5　刘培德　著
111　非线性常微分方程边值问题　2007.6　葛渭高　著
112　戴维-斯特瓦尔松方程　2007.5　戴正德　蒋慕蓉　李栋龙　著
113　广义哈密顿系统理论及其应用　2007.7　李继彬　赵晓华　刘正荣　著
114　Adams谱序列和球面稳定同伦群　2007.7　林金坤　著
115　矩阵理论及其应用　2007.8　陈公宁　著
116　集值随机过程引论　2007.8　张文修　李寿梅　汪振鹏　高　勇　著
117　偏微分方程的调和分析方法　2008.1　苗长兴　张　波　著
118　拓扑动力系统概论　2008.1　叶向东　黄　文　邵　松　著
119　线性微分方程的非性性扰动(第二版)　2008.3　徐登州　马如云　著
120　数组合地图论(第二版)　2008.3　刘彦佩　著
121　半群的s系理论(第二版)　2008.3　刘仲奎　乔虎生　著
122　巴拿赫空间引论(第二版)　2008.4　定光桂　著
123　拓扑空间论(第二版)　2008.4　高国士　著
124　非经典数理逻辑与近似推理(第二版)　2008.5　王国俊　著

# 目　　录

# 第1章　预备知识

本章介绍阅读本书所需的预备知识. 熟悉代数学和经典命题逻辑的读者可以跳过本章,从第2章开始.

在1.1节中介绍关于泛代数方面的一些知识. 泛代数的内容十分丰富,而我们只需要其中关于自由代数的知识. 希望尽快接触多值逻辑内容的读者也可略去1.1节,而仅仅阅读它的最后一段,即关于自由代数的通俗解释部分.

在1.2节中介绍经典命题逻辑. 除了在介绍紧性时用到滤子及超滤的概念外,其余部分是自封的. 即使未接触过数理逻辑的读者也可以毫无困难地读完这一部分. 为了避免通常对完备性定理的繁冗的证明,我们给出了较易理解的基于范式以及可证等价概念的证明方法.

## 1.1　泛代数中的预备知识

### 1.1.1　泛代数

(1)泛代数的定义

**定义1.1.1**　设$A$是非空集,则

i) $A$上的0元运算是$A$中的一个元素.

ii) $A$上的1元运算是$A$上的自映射$f:A\to A$.

iii) $A$上的2元运算是$A$上的2元函数$f:A\times A\to A$.

iv) $A$上的$n$元运算是$A$上的$n$元函数$f:A^n\to A$, $n\geqslant 1$.

**注1.1.2**　0元运算也可以理解为映射$f:A^0\to A$. 这里$A^0$表示仅含一个元素(比如$\varnothing$)之集,这时$f$被它的像,也即$A$中的一个元素所确定. 以上我们对"映射"与"函数"不加区别,究竟用哪一个词视习惯用法而定,如自映射不宜说成"自函数",而2元映射一般多称为2元函数等,下同.

**定义1.1.3**　设$T$是非空集,$N$是非负整数之集. $ar:T\to N$是映射,则称$\mathscr{T}=(T,ar)$为**型**. 有时也把型$\mathscr{T}$简记为$T$,并令$T_n=\{t\in T\mid ar(t)=n\}$.

**定义1.1.4**　设$T$是型. $A$是非空集. 如果对每个$t\in T$,有一$ar(t)$元函数$t_A:A^{ar(t)}\to A$,则称$A$为***T*型泛代数**,或***T*代数**. 当$t\in T_n$时,$t_A$叫$T$代数$A$上的$n$元运算. 对每个0元运算$t$以$t_A$记$A$中相应的元素.

(2)$T$代数的例子

**例1.1.5**　设 $T=\{0,-,+,\cdot\}$,$ar:T\to N$ 定义为 $ar(0)=0,ar(-)=1$,$ar(+)=2,ar(\cdot)=2$. 这时任一不带单位的环 $R$ 都是一个 $T$-代数. $T_0=\{0\}$,$T_1=\{-\}$,$T_2=\{+,\cdot\}$. $0_R$ 是 $R$ 的加法单位0, $-_R:R\to R$ 是加法逆运算. $+_R$ 与 $\cdot_R$ 分别是 $R$ 的加法运算和乘法运算.

**例1.1.6**　设 $T=\{\top,\bot,\vee,\wedge\}$,$T_0=\{\top,\bot\}$,$T_2=\{\vee,\wedge\}$,则任一有界格 $L$ 都是一个 $T$-代数. $\top_L$ 与 $\bot_L$ 分别是 $L$ 的最大元 $\top$ 与最小元 $\bot$, $\vee_L$ 与 $\wedge_L$ 分别是 $L$ 中的上、下确界运算.

(3)$T$代数同态

**定义1.1.7**　设 $A$ 与 $B$ 是具有同一型 $T$ 的泛代数,$\varphi:A\to B$ 是映射,如果

i) 对每个0元运算 $t\in T_0$,$\varphi(t_A)=t_B$.

ii) 对每个 $n$ 元运算 $t\in T_n(n\geqslant 1)$及 $A$ 中任意 $n$ 个元素 $a_1,\cdots,a_n$,

$$\varphi(t_A(a_1,\cdots,a_n))=t_B(\varphi(a_1),\cdots,\varphi(a_n)),\tag{1.1.1}$$

则称 $\varphi$ 为从 $A$ 到 $B$ 的 ***T*-同态**.

群同态、环同态、格同态等都是 $T$-代数同态的特例.

**命题1.1.8**　设 $A$ 与 $B$ 是 $T$-代数,$\varphi:A\to B$ 是双射. 如果 $\varphi$ 是 $T$-同态,则 $\varphi^{-1}:B\to A$也是 $T$-同态.

**证**　i) 设 $t\in T_0$,则由 $\varphi(t_A)=t_B$ 得 $\varphi^{-1}(t_B)=t_A$.

ii) 设 $t\in T_n(n\geqslant 1)$,$b_1,\cdots,b_n\in B$. 令 $a_i=\varphi^{-1}(b_i)(1\leqslant i\leqslant n)$,则 $\varphi(a_i)=b_i(1\leqslant i\leqslant n)$. 由(1.1.1)式得

$$\begin{aligned}\varphi^{-1}(t_B(b_1,\cdots,b_n))&=\varphi^{-1}(t_B(\varphi(a_1),\cdots,\varphi(a_n)))\\&=t_A(a_1,\cdots,a_n)=t_A(\varphi^{-1}(b_1),\cdots,\varphi^{-1}(b_n)),\end{aligned}$$

所以 $\varphi^{-1}$是 $T$-同态.

**定义1.1.9**　设 $A$ 与 $B$ 是 $T$-代数. $\varphi:A\to B$ 是 $T$-同态. 如果 $\varphi$ 是双射,则称 $\varphi$ 为从 $A$ 到 $B$ 上的 ***T*-同构**. 这时由命题1.1.8知 $\varphi^{-1}:B\to A$ 是从 $B$ 到 $A$ 上的同构,故可称 $A$ 与 $B$ ***T*-同构**或 $B$ 与 $A$ ***T*-同构**. 记作 $A\overset{\varphi}{\cong}B$ 或 $B\overset{\varphi^{-1}}{\cong}A$.

(4)$T$代数的子代数

**定义1.1.10**　设 $A$ 是 $T$-代数,$B$ 是 $A$ 的非空子集. 如果

i) 对每个 $t\in T_0$,$t_A\in B$.

ii) 对每个 $t\in T_n(n\geqslant 1)$,对任意 $b_1,\cdots,b_n\in B$, $t_A(b_1,\cdots,b_n)\in B$.

即 $B$ 对 $T$ 中每个 $t$ 所对应的运算均封闭,则称 $B$ 为 $A$ 的**子代数**.

下述命题是显然的.

**命题1.1.11**　设 $A$ 是 $T$-代数,则

i) $A$ 的一族子代数的交仍为 $A$ 的子代数.

ii) 对 $A$ 的任一非空子集 $X$,存在 $A$ 的包含 $X$ 的最小子代数,叫由 $X$ 生成的 $A$ 的子代数,记作$\langle X\rangle_T$ 或$\langle X\rangle$.

**命题 1.1.12** 设 $A$ 与 $B$ 是 $T$-代数,$\varphi:A\to B$ 是 $T$-同态,则 $\varphi(A)$是 $B$ 的子代数.

**证** i) 设 $t\in T_0$,则由 $T$-同态的定义知 $t_B=\varphi(t_A)\in\varphi(A)$.

ii) 设 $t\in T_n(n\geqslant1)$,$b_1,\cdots,b_n\in\varphi(A)$,则有 $a_1,\cdots,a_n\in A$ 使 $\varphi(a_i)=b_i$ $(1\leqslant i\leqslant n)$. 由(1.1.1)式得

$$\begin{aligned}t_B(b_1,\cdots,b_n)&=t_B(\varphi(a_1),\cdots,\varphi(a_n))\\&=\varphi(t_A(a_1,\cdots,a_n))\in\varphi(A),\end{aligned}$$

所以 $\varphi(A)$是 $B$ 的子代数.

### 1.1.2 自由代数

(1)$S$ 生成的自由代数

**定义 1.1.13** 设 $S$ 是非空集,$T$ 是型,$F$ 是 $T$-代数,$\sigma:S\to F$ 是映射. 如果对任一 $T$-代数 $A$ 以及任一映射 $\tau:S\to A$,存在唯一的 $T$-同态 $\varphi:F\to A$ 使 $\varphi\sigma=\tau$,即图 1.1 可换,则称 $F$ 为由 $S$ 生成的**自由 $T$-代数**.

**注 1.1.14** i) 上述 $\sigma$ 一定是单射. 事实上,任取含多于一个元素的 $T$-代数(请读者自证这种 $T$-代数一定有)$A$. 设 $x_1$ 与 $x_2$ 是 $S$ 中的不同元素,作映射 $\tau:S\to A$ 使$\tau(x_1)\neq\tau(x_2)$,则由 $\varphi\sigma=\tau$ 知 $\sigma(x_1)\neq\sigma(x_2)$,即 $\sigma$ 是单射.

ii) 由 $\sigma$ 是单射, 知 $\sigma$ 可看成 $S$ 到 $F$ 中的嵌入. 如果把 $S$ 与$\sigma(S)$不加区别,则由 $S$ 生成的自由代数 $F$ 的特征在于:$F$ 的子集 $S$ 到任一 $T$-代数 $A$ 的任一映射 $\tau$ 均可唯一地扩张为从 $F$ 到 $A$ 的 $T$-同态.

iii) 由 $S$ 生成的自由 $T$-代数在同构意义下是唯一的. 事实上,设映射 $\sigma':S\to F'$ 也满足定义 1.1.13 的条件,则有图 1.2.

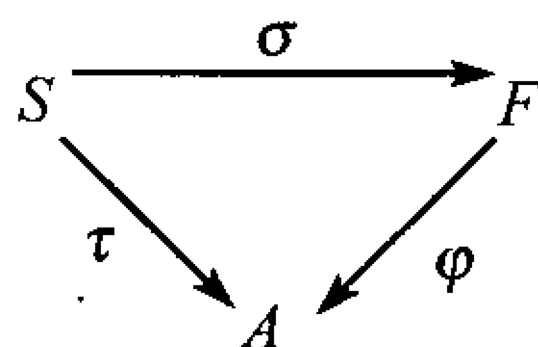



图 1.1

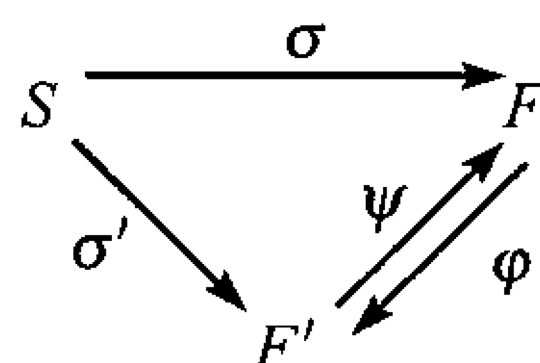



图 1.2

同态 $\varphi:F\to F'$使 $\varphi\sigma=\sigma'$且有同态 $\psi$ 使 $\psi\sigma'=\sigma$. 那么 $\psi\varphi\sigma=\sigma$,这里 $\psi\varphi:F\to F$. 又 $\mathrm{id}_F\sigma=\sigma$,见图 1.3.

所以, 由唯一性条件(取定义中的 $A$ 为 $F$)得 $\psi\varphi=\mathrm{id}_F$. 同理 $\varphi\psi=\mathrm{id}_{F'}$. 可见,$\varphi:F\to F'$与 $\psi:F'\to F$ 互为逆映射,从而 $F$ 与 $F'$同构.

iv) 设 $S'$ 与 $S$ 等势,即存在双射 $\eta:S'\to S$,则 $S'$ 与 $S$ 生成相同的自由 $T$-代数. 事实上,设 $\sigma:S\to F$ 满足定义 1.1.13 的条件,则 $\sigma\eta:S'\to F$ 具有如下性质:设 $\tau:S'\to A$ 是任一映射,则 $\tau\eta^{-1}$ 是从 $S$ 到 $A$ 的映射,从而有唯一的同态 $\varphi:F\to A$ 使 $\varphi\sigma=\tau\eta^{-1}$ 或 $\varphi(\sigma\eta)=\tau$. 这正表明, $F$ 是由 $S'$ 生成的自由 $T$-代数. 可见, 重要的只是集 $S$ 的势,映射 $\sigma$ 并不重要. 特别是可以在一开始定义自由 $T$-代数时就用与 $S$ 等势的集 $\sigma(S)$ 取代 $S$,这时就可把 $\sigma$ 取作嵌入映射. 从这一意义上讲,自由 $T$-代数 $F$ 就是由 $F$ 的某非空子集 $S$ 生成的,从 $S$ 到任一 $T$-代数 $A$ 的任何映射都可扩张为从 $F$ 到 $A$ 的 $T$-同态.

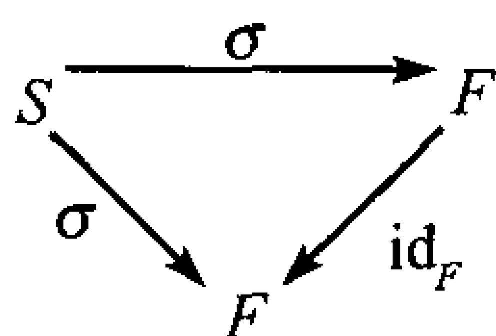


图 1.3

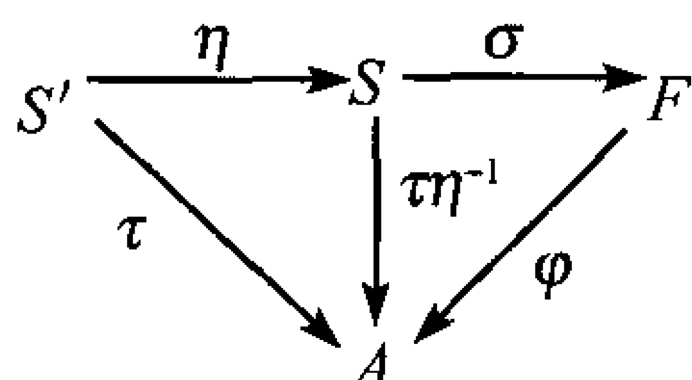


图 1.4

**例 1.1.15**　设型 $T=\{*\}$, $*$ 是二元运算, $S=\{a,b\}$,则 $S$ 生成一个自由 $T$-代数 $G$. 略去运算符号 $*$ 不写,并把每两个元素的运算结果用括号(　)括起来,略去最外层的括号,则 $G$ 由下述元素组成:

$$a,\quad b,\quad aa,\quad ab,\quad ba,\quad bb,\quad a(aa),\quad a(ab),\quad a(ba),$$
$$a(bb),\quad (aa)a,\quad (aa)b,\quad (ab)a,\quad (ab)b,\quad \cdots.$$

一般地,设 $\omega_1$ 与 $\omega_2$ 是 $G$ 中元素,则 $\omega_1\omega_2$ 与 $\omega_2\omega_1$ 也是 $G$ 中的元素. 例如, $a(ba)$ 与 $b(aa)$ 都属于上面列出的元素, $(a(ba))(b(aa))$ 与 $(b(aa))(a(ba))$ 就也都是 $G$ 的元素. 可以证明 $G$ 是由 $\{a,b\}$ 生成的自由 $T$-代数.

事实上,设 $H$ 是任一 $T$-代数, $\tau:\{a,b\}\to H$ 是任一映射. 设 $\tau(a)=\alpha,\tau(b)=\beta$. 现在把 $\tau$ 扩张到 $G$ 上. 设 $\omega\in G$,则 $\omega$ 由 $a,b$ 以及括号组成. 分别以 $\alpha$ 与 $\beta$ 取代 $\omega$ 中的 $a$ 与 $b$ 并保持括号不变,则得一 $H$ 中的元素,记为 $\varphi(\omega)$. 如此则得一映射 $\varphi:G\to H$. 由 $\varphi$ 的对应方法直接看出 $\varphi$ 是 $T$-同态,且 $\varphi$ 是 $\tau$ 的扩张. 设 $T$-同态 $\psi:G\to H$ 也是 $\tau$ 的扩张,则 $\psi(a)=\alpha,\psi(b)=\beta$,且由 $\psi$ 为同态知

$$\psi(ab)=\psi(a)\psi(b)=\alpha\beta,$$
$$\psi(a(ba))=\psi(a)(\psi(b)\psi(a))=\alpha(\beta\alpha)$$

等,即对每个 $\omega\in G$,把 $\omega$ 中的 $a$ 与 $b$ 分别用 $\alpha$ 与 $\beta$ 去代换并保持括号不变即得 $\psi(\omega)$. 可见, $\psi$ 就是 $\varphi$. 这表明, $\tau$ 可唯一地扩张为 $T$-同态 $\varphi:G\to H$. 所以 $G$ 是由 $\{a,b\}$ 生成的自由 $T$-代数.

当 $*$ 具有结合性时, $a(ba)$ 与 $(ab)a$ 表示同一个元素,这时可将括号略去而用 $aba$ 表示这个元素. 这时的 $G$ 叫由 $\{a,b\}$ 生成的**自由半群**.

对一般的非空集 $S$ 及一般的型 $T$,由 $S$ 生成的自由 $T$-代数是存在的,其证明可

见文献[1]或其他泛代数教程.

(2)自由代数的通俗解释

上面的例1.1.15中由$S=\{a,b\}$生成的自由$T$-代数也可这样描述:

i) $S$中的元素属于$G$.

ii) 如果$\omega_1$与$\omega_2$属于$G$,则$\omega_1\omega_2$也属于$G$.

iii) $G$中不再含其他的元素.

这种描述是简单而清楚的,特别是在逻辑学中经常采用这种描述.

**例1.1.16** 设$S=\{p_1,p_2,\cdots\}$,型$T=\{\neg,\to\}$,这里$\neg$与$\to$分别是一元和二元运算(为方便计,我们经常把$t$与$t_A$不加区别,即把型$T$看成是一族运算的集),则由$S$生成的$\{\neg,\to\}$型自由代数$F(S)$由以下元素组成:

i) $S$中的元素都属于$F(S)$.

ii) 如果$A$与$B$都属于$F(S)$,则$\neg A$和$A\to B$也属于$F(S)$.

iii) $F(S)$中不再含有其他元素.

可以像例1.1.15一样证明,这样定义的$F(S)$的确是由$S$生成的$\{\neg,\to\}$型自由代数.只是证明过程很麻烦.

# 1.2 经典命题演算理论

### 1.2.1 自由代数——用符号表示命题

命题就是句子,它含有主语和谓语.如在句子"7是素数"中,"7"是主语,"是素数"是谓语.但命题演算只关心整体句子(包括复合句子)之间的关系,而对每个句子不再分解为主语与谓语去考虑.例如,句子"并非我既饿又渴"与句子"我不饿或者我不渴"的意思是一样的.如果用$A$表示"我饿",$B$表示"我渴",则前一个句子可写为$\neg(A\wedge B)$,后一个句子可写为$\neg A\vee\neg B$.这里用$\neg$表示否定,$\wedge$与$\vee$分别表示合取(同时成立)与析取(至少一个成立).注意:$A$句中"我"是主语,"饿"是谓语.但在上面考虑两个复合句之间的关系时并不对$A$作分解,这正是命题演算与谓词演算的不同之处.再如,句子"并非加利福尼亚州有地震又有水灾"与句子"加利福尼亚州没有地震或加利福尼亚州没有水灾"的意思是一样的.如果用$A$表示"加利福尼亚州有地震",$B$表示"加利福尼亚州有水灾",则前一个句子可写为$\neg(A\wedge B)$,后一个句子可写为$\neg A\vee\neg B$.我们看到,尽管饿、渴与地震、水灾是完全不同的概念,但由它们组成的句子之间可以有完全相同的关系,即$\neg(A\wedge B)$与$\neg A\vee\neg B$总是逻辑等价的,而不管$A$与$B$代表着什么样的具体命题.所以命题演算的任务是:在把命题抽象化为符号的基础上,研究这些抽象符号之间的关系.

**定义1.2.1** 设$S=\{p_1,p_2,\cdots\}$是可数集,$\neg$与$\to$分别是一元运算与二元运

算,由 $S$ 生成的 $\{\neg, \to\}$ 型自由代数记作 $F(S)$. $F(S)$ 中的元素叫**命题、句子或公式**,$S$ 中的元素叫**原子命题**或**原子公式**.

如1.1节所述,$F(S)$ 也可按例1.1.16去描述. 以上 $\neg$ 与 $\to$ 只是形式上的运算,并不含有任何具体的意义.

### 1.2.2 语构理论——形式演绎体系

(1)公理

如果把 $\neg$ 理解为否定,把 $\to$ 理解为蕴涵(以后在应用时正是这样去理解的),则 $\neg(\neg A)$ 与 $A$ 应当一样,$A \to A$ 应当永远成立,等等. 按说我们应当把 $F(S)$ 中显然成立的公式都肯定下来,但应当肯定的公式太多了,如 $(A\to B)\to(A\to B)$、$\neg(\neg(A\to B))\to(A\to B)$ 等都应肯定. 经过分析,人们挑选出几种公式作为公理而肯定下来,再定一条推理规则,然后就可以由公理出发运用推理规则把全部应当肯定的公式都作为定理而推演出来.

**定义1.2.2** $F(S)$ 中具有以下形式的公式叫**公理**:

(L1) $A\to(B\to A)$;

(L2) $(A\to(B\to C))\to((A\to B)\to(A\to C))$;

(L3) $(\neg B\to\neg A)\to(A\to B)$.

注意:公理不是三条,而是有无穷多条. 以(L3)为例,它说只要形如(L3)的公式都是公理,如

$$(\neg p_1 \to \neg p_2) \to (p_2 \to p_1)$$
$$(\neg(\neg p_3) \to \neg(\neg p_4)) \to (\neg p_4 \to \neg p_3)$$

等都是公理. 为了更加明确,许多教材中都用花写的 $\mathscr{A}$,$\mathscr{B}$ 等描述公理. 本书为简便起见就不用花体字了.

(2)推理规则

只有上述三种公理是不够的,由它们连 $A\to A$ 都推不出来,所以必须再加上如下的推理规则才行.

**定义1.2.3**(分离规则) 由公式 $A\to B$ 与 $A$ 可推得 $B$.

分离规则也叫 **Modus Ponens** 或简称 **MP**.

(3)证明

**定义1.2.4** 一个**证明**是一个公式序列

$$A_1, \quad A_2, \quad \cdots, \quad A_n,$$

这里对每个 $i \leqslant n$,$A_i$ 或者是公理,或者有 $j<i$,$k<i$,使 $A_i$ 是由 $A_j$ 与 $A_k$ 运用MP而得到的公式. 这时 $A_n$ 叫**定理**,上述证明叫 $\boldsymbol{A_n}$ **的证明**. $A_n$ 是定理可记作 $\vdash \boldsymbol{A_n}$.

显然,一个证明序列的前若干项仍组成一个证明序列.

**例1.2.5** 试证:

i) $\vdash A \to A$;

ii) $\vdash \neg A \to (A \to B)$.

**证** i) 以下 1°—5°是 $A \to A$ 的一个证明.

| | | |
|---|---|---|
| 1° | $A \to ((B \to A) \to A)$ | (L1) |
| 2° | $(A \to ((B \to A) \to A)) \to ((A \to (B \to A)) \to (A \to A))$ | (L2) |
| 3° | $(A \to (B \to A)) \to (A \to A)$ | 1°,2°,MP |
| 4° | $A \to (B \to A)$ | (L1) |
| 5° | $A \to A$ | 3°,4°,MP |

ii)

| | | |
|---|---|---|
| 1° | $\neg A \to (\neg B \to \neg A)$ | (L1) |
| 2° | $(\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$ | (L3) |
| 3° | $((\neg B \to \neg A) \to (A \to B)) \to (\neg A \to ((\neg B \to \neg A) \to (A \to B)))$ | (L1) |
| 4° | $\neg A \to ((\neg B \to \neg A) \to (A \to B))$ | 2°,3°,MP |
| 5° | $(\neg A \to ((\neg B \to \neg A) \to (A \to B))) \to$ $((\neg A \to (\neg B \to \neg A)) \to (\neg A \to (A \to B)))$ | (L2) |
| 6° | $(\neg A \to (\neg B \to \neg A)) \to (\neg A \to (A \to B))$ | 4°,5°,MP |
| 7° | $\neg A \to (A \to B)$ | 1°,6°,MP |

**定义 1.2.6** 设 $\Gamma$ 是一族公式,即 $\Gamma \subset F(S)$,设 $A \in F(S)$. **从 $\Gamma$ 到 $A$ 的一个证明**是一个公式序列

$$A_1, \quad A_2, \quad \cdots, \quad A_n,$$

这里 $A_n = A$,且对每个 $i \leqslant n$,$A_i$ 是公理或 $A_i \in \Gamma$ 或存在 $j < i, k < i$,使 $A_i$ 是由 $A_j$ 与 $A_k$ 运用 MP 而得到的公式. 存在从 $\Gamma$ 到 $A$ 的证明记作 $\Gamma \vdash A$.

当 $\Gamma$ 是空集时,$\Gamma \vdash A$ 表示 $A$ 是定理,即 $\vdash A$.

显然, 一个 $\Gamma$ 证明序列的前若干项也构成一个 $\Gamma$ 证明序列.

**定理 1.2.7** (演绎定理) 设 $\Gamma \subset F(S), A \in F(S), B \in F(S)$. 如果 $\Gamma \cup \{A\} \vdash B$,则 $\Gamma \vdash A \to B$.

**证** 由于 $\Gamma \cup \{A\} \vdash B$,故存在从 $\Gamma \cup \{A\}$ 到 $B$ 的证明序列. 按此序列的长度可归纳地证明 $\Gamma \vdash A \to B$ 如下:

i) 若序列长度为 1,则 $B$ 为公理,或 $B \in \Gamma$ 或 $B = A$,则易证 $\Gamma \vdash A \to B$. 证明留给读者.

ii) 设序列长度小于 $n$ 时定理成立,今从 $\Gamma \cup \{A\}$ 到 $B$ 的证明长度为 $n$. 如果 $B$ 是公理,或 $B \in \Gamma$,或 $B = A$,则容易证明 $\Gamma \vdash A \to B$. 所以, 不妨设 $B$ 是由前面的两项 $C$ 与 $C \to B$ 运用 MP 而得到的公式:

$$\cdots, \quad C, \quad \cdots, \quad C \to B, \quad B.$$

由于 $C$ 和 $C \to B$ 都是从 $\Gamma \cup \{A\}$ 证得的公式且证明长度均小于 $n$,那么由归纳假

设知

$$\Gamma \vdash A \to C, \tag{1.2.1}$$

$$\Gamma \vdash A \to (C \to B). \tag{1.2.2}$$

由(1.2.2),(L2)及MP得

$$\Gamma \vdash (A \to C) \to (A \to B). \tag{1.2.3}$$

由(1.2.1),(1.2.3)及MP即得$\Gamma \vdash A \to B$.

以上为了简便起见,我们并没有写出完整的证明序列,读者不难补齐它们,以下我们将继续这样做.

**定理1.2.8**(三段论规则)　$\{A\to B, B\to C\}\vdash A\to C$.

**证**　用两次MP易证$\{A\to B, B\to C\}\cup\{A\}\vdash C$. 所以由演绎定理即得三段论规则.

三段论规则即**Hypothetical Syllogism**,简称**HS**.

**注1.2.9**　HS是由演绎定理推得的,它说只要以$A\to B$与$B\to C$为前提就可推得$A\to C$. 不管$A\to B$与$B\to C$是否为定理. 较弱形式的三段论规则是:若$A\to B$与$B\to C$都是定理,则$A\to C$也是定理. 这一事实可以不用演绎定理而证出. 证明留给读者.

**例1.2.10**　试证:

i) $\vdash(\neg A\to A)\to A$;

ii) $\vdash\neg\neg A\to A$;

iii) $\vdash A\to\neg\neg A$;

iv) $\vdash A\vee B\to B\vee A$,这里$A\vee B$是$\neg A\to B$的简写;

v) $\vdash A\to A\vee B$;

vi) $\vdash(A\to(B\to C))\to(B\to(A\to C))$;

vii)若$\vdash A$,则$\vdash B\to A\wedge B$,这里$A\wedge B$是$\neg(\neg A\vee\neg B)$的简写.

**证**　i) 由演绎定理,只需证$\{\neg A\to A\}\vdash A$. 证明如下:

| | | |
|---|---|---|
| 1° | $\neg A\to A$ | 假设 |
| 2° | $\neg A\to(A\to\neg(\neg A\to A))$ | 例1.2.5 ii) |
| 3° | $(\neg A\to A)\to(\neg A\to\neg(\neg A\to A))$ | 2°,(L2),MP |
| 4° | $\neg A\to\neg(\neg A\to A)$ | 1°,3°,MP |
| 5° | $(\neg A\to A)\to A$ | 4°,(L3),MP |
| 6° | $A$ | 1°,5°,MP |

ii)

| | | |
|---|---|---|
| 1° | $\neg\neg A\to(\neg A\to A)$ | 例1.2.5 ii) |
| 2° | $(\neg A\to A)\to A$ | 本例i) |
| 3° | $\neg\neg A\to A$ | 1°,2°,HS |

iii)

| | | |
|---|---|---|
| 1° | $\neg\neg\neg A\to\neg A$ | 本例ii) |

| | | |
|---|---|---|
| | 2° $(\neg\neg\neg A\to\neg A)\to(A\to\neg\neg A)$ | (L3) |
| | 3° $A\to\neg\neg A$ | 1°,2°,MP |
| iv) 只需证$\{\neg A\to B\}\vdash\neg B\to A$ | | |
| | 1° $\neg A\to B$ | 假设 |
| | 2° $B\to\neg\neg B$ | 本例 iii) |
| | 3° $\neg A\to\neg\neg B$ | 1°,2°,HS |
| | 4° $(\neg A\to\neg\neg B)\to(\neg B\to A)$ | (L3) |
| | 5° $\neg B\to A$ | 3°,4°,MP |
| v) | 1° $A\to(\neg B\to A)$ | (L1) |
| | 2° $(\neg B\to A)\to(\neg A\to B)$ | 本例 iv) |
| | 3° $A\to(\neg A\to B)$ | 1°,2°,HS |
| | 4° $A\to A\vee B$ | 3°的简写 |
| vi) 只需证$\{A\to(B\to C)\}\vdash B\to(A\to C)$. | | |
| | 1° $A\to(B\to C)$ | 假设 |
| | 2° $(A\to B)\to(A\to C)$ | 1°,(L2),MP |
| | 3° $B\to(A\to B)$ | (L1) |
| | 4° $B\to(A\to C)$ | 3°,2°,HS |
| vii) | 1° $(\neg\neg A\to\neg B)\to(\neg\neg A\to\neg B)$ | 例 1.2.5 i) |
| | 2° $\neg\neg A\to((\neg\neg A\to\neg B)\to\neg B)$ | 1°,本例 vi),MP |
| | 3° $A$ | $A$ 是定理 |
| | 4° $A\to\neg\neg A$ | 本例 iii) |
| | 5° $\neg\neg A$ | 3°,4°,MP |
| | 6° $(\neg\neg A\to\neg B)\to\neg B$ | 5°,2°,MP |
| | 7° $(\neg A\vee\neg B)\to\neg B$ | 6°的简写 |
| | 8° $\neg\neg(\neg A\vee\neg B)\to(\neg A\vee\neg B)$ | 本例 ii) |
| | 9° $\neg\neg(\neg A\vee\neg B)\to\neg B$ | 8°,7°,HS |
| | 10° $B\to\neg(\neg A\vee\neg B)$ | 9°,(L3),MP |
| | 11° $B\to A\wedge B$ | 10°的简写 |

(4) 可证等价

**定义 1.2.11** 设 $A,B\in F(S)$,如果 $\vdash A\to B$ 且 $\vdash B\to A$,则称公式 $A$ 与 $B$ 是**可证等价**的.

由 HS 知可证等价是 $F(S)$ 上的等价关系.

由例 1.2.10 看出,$A$ 与$\neg\neg A$ 是可证等价的,$A\vee B$ 与 $B\vee A$ 是可证等价的,下面再举一些可证等价公式的例子.

**例 1.2.12** 试证下列每对公式是可证等价的:

i) $A\vee(B\vee C)$与$(A\vee B)\vee C$;

ii) $A\to\neg B$与$B\to\neg A$;

iii) 当$\vdash A$时,$A\wedge B$与$B$;

iv) $A\wedge(B\vee C)$与$(A\wedge B)\vee(A\wedge C)$.

**证**　i) 由例 1.2.10 易证$A\vee(B\vee C)$与$A\vee(C\vee B)$可证等价,$(A\vee B)\vee C$与$C\vee(A\vee B)$可证等价. 又$A\vee(C\vee B)$是$\neg A\to(\neg C\to B)$的简写,$C\vee(A\vee B)$是$\neg C\to(\neg A\to B)$的简写. 由例 1.2.10 vi) 知$\neg A\to(\neg C\to B)$与$\neg C\to(\neg A\to B)$是可证等价的.

ii) 先证$\{A\to\neg B\}\vdash B\to\neg A$

| | | |
|---|---|---|
| 1° | $A\to\neg B$ | 假设 |
| 2° | $\neg\neg A\to A$ | 例 1.2.10 ii) |
| 3° | $\neg\neg A\to\neg B$ | 1°,2°,HS |
| 4° | $B\to\neg A$ | 3°,(L3),MP |

所以由演绎定理得$\vdash(A\to\neg B)\to(B\to\neg A)$. 同理可证$\vdash(B\to\neg A)\to(A\to\neg B)$. 所以$A\to\neg B$与$B\to\neg A$可证等价.

iii) 当$\vdash A$时,由例 1.2.10 vii),只需证$\vdash A\wedge B\to B$,即$\vdash\neg(\neg A\vee\neg B)\to B$. 由例 1.2.10 iv) 只需证$\vdash\neg B\to(\neg A\vee\neg B)$. 而由例 1.2.10 iv) 与 v)知这是正确的.

iv) 证明留给读者作为练习.

(5) *范式*

由以上讨论知$A\vee B$是$\neg A\to B$的简写,由此易证$A\to B$与$\neg A\vee B$可证等价(即与$\neg\neg A\to B$可证等价). 可见,运算→可用¬与∨来表示. 那么$F(S)$中的每个公式都可用¬与∨来连接. 如果继续采用简化符号∧,用$A\wedge B$来作为$\neg(\neg A\vee\neg B)$的简写,则$F(S)$中的每个公式都可通过$\{p_1,p_2,\cdots\}$中的原子公式用连接词¬,∨与∧连接而得. ¬叫**否定**连接词,∨叫**析取**连接词,∧叫**合取**连接词. 以下采用文献[1]中的范式定义.

**定义 1.2.13**　由有限多个原子公式或其否定式通过合取(析取)连接词连接而得到的公式叫**简单合取式(简单析取式)**. 有限多个简单合取式(简单析取式)通过析取(合取)连接词连接而得的公式叫**析取范式(合取范式)**.

易证$A$,$A\vee A$与$A\wedge A$都是可证等价的. 所以,由∨和∧都是交换的与结合的(即$A\vee B$与$B\vee A$可证等价,$A\wedge B$与$B\wedge A$可证等价)知可以假定简单合取式(简单析取式)中不含重复的原子公式或重复的原子公式的否定式. 例如

$$p_1,\quad p_1\wedge p_2\wedge\neg p_2,\quad p_1\wedge p_1\wedge\neg p_3\wedge\neg p_3$$

都是简单合取式,而第三式与$p_1\wedge\neg p_3$可证等价.

**引理 1.2.14**　i) 简单合(析)取式的否定式可证等价于一简单析(合)取式;

ii) 析(合)取范式的否定式可证等价于一合(析)取范式.

**证** i) 设$A$是简单合取式. 如果$A$中不含连接词$\wedge$,则$A$是$p$或$\neg p$,$p$是原子公式,这时$\neg A$是$\neg p$或$\neg\neg p$,后者可证等价于$p$. 故$\neg A$可证等价于一个简单析取式.

今设$A$中含$k$个连接词$\wedge$时结论成立,那么当$A$中含有$k+1$个连接词$\wedge$时,$A=p\wedge B$或$A=\neg p\wedge B$,这里$B$是含有$k$个连接词$\wedge$的简单合取式. 这时$\neg A$可证等价于$\neg p\vee\neg B$或$p\vee\neg B$. 因为由归纳假设$\neg B$可证等价于一个简单析取式,所以$\neg A$也可证等价于一个简单析取式.

由以上归纳证明知简单合取式的否定式可证等价于一个简单析取式,类似可证简单析取式的否定式可证等价于一个简单合取式.

ii) 用归纳法可证引理的第二部分,证明留给读者.

**定理 1.2.15** 任一公式$A$都可证等价于一个析取范式,也可证等价于一个合取范式.

**证** 我们用连接词$\neg$与$\rightarrow$来表达公式$A$,并就$A$中含连接词$\rightarrow$的个数归纳地证明本定理.

如果$A$中不含连接词$\rightarrow$,则$A$可证等价于$p$或$\neg p$,$p$是原子公式. 这时$A$既是析取范式,也是合取范式.

设$A$中含有不多于$k$个连接词$\rightarrow$时结论成立,今$A$中含$k+1$个连接词$\rightarrow$,则不难证明$A$可证等价于形如$B\rightarrow C$或$\neg(B\rightarrow C)$的公式,其中$B$与$C$均含不多于$k$个连接词$\rightarrow$. 不妨设$A$可证等价于$B\rightarrow C$,则$A$可证等价于$\neg B\vee C$. 由归纳假设$\neg B$可证等价于一个析取范式,$C$也可证等价于一个析取范式. 所以,$A$可证等价于一析取范式. 又,$A$可证等价于$\neg\neg(\neg B\vee C)$或$\neg(B\wedge\neg C)$. 由归纳假设,$B$可证等价于一析取范式,$\neg C$可证等价于一析取范式. 由例 1.2.12 iv) 知$\wedge$对$\vee$而言是分配的(在可证等价的意义下),由此易证$B\wedge\neg C$可证等价于一个析取范式,从而由引理1.2.14 ii)知$\neg(B\wedge\neg C)$可证等价于一个合取范式,因而$A$最终也可证等价于一合取范式.

### 1.2.3 语义理论——真值体系

(1)赋值

在前面我们已经把命题抽象化为形式上的符号. 否定、蕴涵、析取与合取也都是形式上的符号. 我们不能凭常识经验去判断一个命题是否正确,即是否为定理. 例如,不能凭常识就断言一个命题蕴涵其自身(即$A\rightarrow A$)是定理. 断言$A\rightarrow A$是定理是需要证明的(见例 1.2.5 i)),而证明得从(L1)~(L3)这三条不加证明而承认的公理出发运用推理规则 MP 来实现. 这就是命题演算的语构理论,实际上是形式符号体系的形式演算理论. 当然,$\neg$与$\rightarrow$等也确有否定与蕴涵的背景,正因如此形式演算理论才有了实际的应用.

判断一个形式上的命题是否正确还有另外的一套办法,或许是更加自然与直观的办法,那就是通过给公式赋以真假值来实现的办法. 这种理论就是命题演算的语义理论.

**定义 1.2.16**　设 $F(S)$ 是全体公式之集,$v:F(S)\to\{0,1\}$ 是映射,如果 $v$ 满足条件:

i) 对任一公式 $A\in F(S)$,$v(\neg A)=1-v(A)$;

ii) 对任二公式 $A,B\in F(S)$,$v(A\to B)=0$ 当且仅当 $v(A)=1$ 且 $v(B)=0$,

则称 $v$ 为 **$F(S)$ 的一个赋值**,简称**赋值**. 以下用 $\Omega$ 记全体赋值之集.

**注 1.2.17**　i) 虽然赋值 $v:F(S)\to\{0,1\}$ 作为映射是一个整体概念,但为方便计,当 $v$ 给定后我们也把公式 $A$ 在映射 $v$ 下的像 $v(A)$ 叫 $A$ 的赋值.

ii) $F(S)$ 是由 $S$ 生成的 $\{\neg,\to\}$ 型自由代数. 如果在 $\{0,1\}$ 中规定 $\neg 0=1$,$\neg 1=0$,$0\to 0=0\to 1=1\to 1=1$ 且 $1\to 0=0$,则 $\{0,1\}$ 也成为一个 $\{\neg,\to\}$ 型的代数. 容易看出 $v$ 是赋值当且仅当 $v:F(S)\to\{0,1\}$ 是同态.

iii) 既然 $F(S)$ 是由 $S$ 生成的自由代数,那么任何映射 $v_0:S\to\{0,1\}$ 就都可以唯一地扩张为一个赋值 $v:F(S)\to\{0,1\}$, 即不论给 $S$ 中的各原子命题指定什么样的值(当然, 只有 0 与 1 这两个可挑选的余地),总有一个 $F(S)$ 的总体赋值 $v$,使 $v$ 对 $S$ 中的各原子命题而言保持那些事先指定好的值,而且这种 $v$ 只有一个,也就是 $v$ 随着各原子命题处的值的确定而被唯一地确定了.

iv) 如果把赋值 $v$ 的值域 $\{0,1\}$ 扩大为 $\left\{0,\frac{1}{2},1\right\}$ 或 $[0,1]$ 等,并给它们也定义 $\neg$ 与 $\to$ 运算,则也可以展开相应的语义理论,那就是后面的多值逻辑或连续值逻辑理论.

**引理 1.2.18**　赋值 $v$ 也保 $\wedge$ 与 $\vee$,即 $v(A\wedge B)=v(A)\wedge v(B)$,$v(A\vee B)=v(A)\vee v(B)$,这里等式右方的 $\vee$ 与 $\wedge$ 分别是 $\{0,1\}$ 中的上、下确界运算.

**证**　以 $v(A\vee B)=v(A)\vee v(B)$ 为例. $v(A\vee B)=0$ 当且仅当 $v(\neg A\to B)=0$,当且仅当 $v(\neg A)=1$ 且 $v(B)=0$,即 $v(A)=v(B)=0$,也即 $v(A)\vee v(B)=0$. 故 $v(A\vee B)=v(A)\vee v(B)$.

(2) 重言式与矛盾式

设 $p$ 与 $q$ 是原子公式,则对不同的赋值 $v$,$v(p\to q)$ 可等于 1 也可等于 0. 例如,令 $v(p)=0$,$v(q)=0$,则 $v(p\to q)=1$;令 $v(p)=1$ 且 $v(q)=0$,则 $v(p\to q)=0$. 因此,像 $p\to q$ 之类的公式是既可能真(即赋值为 1)也可能假(即赋值为 0)的. 而且这种真值不确定的公式占 $F(S)$ 中公式的绝大多数. 但有两类公式是特殊的. 对一类公式而言,无论怎样赋值它的值都等于 1,我们将称其为重言式或永真式. 而另一类恰恰相反,对任何赋值都取 0 值,我们将称其为矛盾式或永假式.

**定义 1.2.19**　设 $A\in F(S)$. 如果对每个赋值 $v$ 恒有 $v(A)=1$,则称 $A$ 为**重言式**

或**永真式**. 如果对每个赋值 $v$ 恒有 $v(A)=0$,则称 $A$ 为**矛盾式**或**永假式**. $A$ 是重言式记作 $\models A$.

**例 1.2.20** i) $A \to A$ 是重言式,这由定义 1.2.16 ii)立即看出.

ii) $A \to (B \to A)$ 是重言式. 事实上,反设有赋值 $v$ 使 $v(A \to (B \to A))=0$,则由定义 1.2.16 ii),$v(A)=1$ 且 $v(B \to A)=0$. 而后式又表明 $v(B)=1$ 且 $v(A)=0$,矛盾. 故对任何 $v$ 均有 $v(A \to (B \to A))=1$. 从而 $A \to (B \to A)$ 为重言式,即公理(L1)为重言式.

iii) $(\neg A \to \neg B) \to (B \to A)$ 为重言式,即公理(L3)为重言式. 用反证法,设此式关于某赋值 $v$ 的值为 0,则 $v(\neg A \to \neg B)=1$ 且 $v(B \to A)=0$. 由后式知 $v(B)=1$ 且 $v(A)=0$. 由定义 1.2.16 i),$v(\neg A)=1$ 且 $v(\neg B)=0$ 从而由定义 1.2.16 ii)得 $v(\neg A \to \neg B)=0$. 矛盾.

iv) 设 $A$ 为任一重言式,则 $\neg A$ 就是矛盾式. 所以在以上 i) ~ iii) 公式前加 $\neg$ 即得各种矛盾式.

v) 请读者自证公理(L2)为重言式.

### 1.2.4 可靠性定理与完备性定理

以上已经看到,对一个代表命题的公式 $A$,既可以用"$A$ 是定理"来肯定 $A$,又可用"$A$ 是重言式"来肯定 $A$,那么这二者是否是和谐的呢? 回答是肯定的.

**定理 1.2.21** (可靠性定理) 凡定理均为重言式,即若 $\vdash A$,则 $\models A$.

**证** 在例 1.2.20 中已看到,三条公理(L1) ~ (L3)都是重言式. 为证凡定理都是重言式,只需证推理规则 MP 保持重言式,即若 $A \to B$ 与 $A$ 都是重言式,则 $B$ 也是重言式. 事实上,设 $v: F(S) \to \{0,1\}$ 是任一赋值,则由 $A \to B$ 与 $A$ 都是重言式知 $v(A \to B)=1$ 且 $v(A)=1$. 那么由定义 1.2.16 ii)即得 $v(B)=1$. 从而由 $v$ 的任意性知 $B$ 为重言式.

由可靠性定理知例 1.2.5 与例 1.2.10 中的各公式均为重言式.

**定理 1.2.22**(完备性定理) 凡重言式均为定理,即若 $\models A$,则 $\vdash A$.

**证** 设 $A$ 是重言式. 由定理 1.2.15,$A$ 可证等价一个合取范式 $B$,设

$$B = C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_n, \tag{1.2.4}$$

其中每个 $C_i(i \leqslant n)$ 都是一个简单析取式. 因为 $A$ 是重言式,由 $A$ 与 $B$ 可证等价知 $A \to B$ 是定理,从而也是重言式,由 MP 保持重言式知 $B$ 是重言式. 设 $v$ 是任一赋值,则由(1.2.4)式,$v(B)=1$,以及引理 1.2.18 知对每个 $i \leqslant n$ 均有 $v(C_i)=1$. 设

$$C_i = r_{i_1} \vee r_{i_2} \vee \cdots \vee r_{i_{k_i}}, \tag{1.2.5}$$

这里每个 $r_{i_j}$ 是原子公式或原子公式的否定. 如果(1.2.5)式中不同时含一个原子公式及其否定式,则当 $r_{i_j}=p$($p$ 为原子公式)时令 $p$ 对应值 0,当 $r_{ij}=\neg p$ 时令 $p$ 对应值 1,而对 $S$ 中的其余 $p$ 令其对应任意值 0 或 1,则由注 1.2.17 iii)知这种对 $S$

中原子公式的真值指派可唯一地扩张为一个赋值 $v$. 显然, $v(C_i)=0$,从而由引理 1.2.18 知 $v(B)=0$. 此为矛盾. 故(1.2.5)式中必有一对 $p$ 与 $\neg p$ 出现,不妨设它们是前两项. 把第 3 项起的部分记作 $D$,则 $C_i=p\vee\neg p\vee D$. 因为 $p\vee\neg p=\neg p\to\neg p$ 是定理,故由例 1.2.10 v)知 $C_i$ 是定理. 又由例 1.2.10 vii)知两个定理的合取也是定理,从而有限个定理的合取也是定理,故由 $C_i$ 的任意性及(1.2.4)式知 $B$ 是定理. 最后由 $B$ 与 $A$ 可证等价,从而 $B\to A$ 为定理及 MP 知 $A$ 为定理.

### 1.2.5 模型与紧性

对命题演算而言,$F(S)$的一个赋值 $v$ 由它在 $S$ 上的值所唯一确定,这时把在 $v$ 之下取值 1 的那些原子公式拿出来就得到 $S$ 的一个子集 $S_v$. 反过来,任给 $S$ 的一个子集 $S_0$,令 $S_0$ 中的原子公式对应 1,而 $S-S_0$ 中的原子公式对应 0,就可生成一个赋值 $v_{S_0}$. 按这种办法就可得到全体赋值之集 $\Omega$ 到 $S$ 的幂集 $2^S$ 之间的一一对应.

**定义 1.2.23** 设 $S$ 是原子公式集,$S_0$ 是 $S$ 的子集(可以是空集),则称 $S_0$ 为一个**模型**. 设 $v=v_{S_0}$是 $S_0$ 决定的赋值,$A$ 是任一公式,如果 $v(A)=1$,则称 $\boldsymbol{S_0}$ **满足** $\boldsymbol{A}$ 或 $\boldsymbol{S_0}$ **是** $\boldsymbol{A}$ **的模型**,记作 $\boldsymbol{S_0\vDash A}$. 设 $T\subset F(S)$,若对每个 $A\in T$ 均有 $S_0\vDash A$,则称 $\boldsymbol{S_0}$ **是** $\boldsymbol{T}$ **的模型**,记作 $\boldsymbol{S_0\vDash T}$. 如果当 $S_0\vDash T$ 时 $S_0\vDash B(B\in F(S))$,则称 $\boldsymbol{T}$ **满足** $\boldsymbol{B}$,记作 $\boldsymbol{T\vDash B}$,即 $T$ 中各公式的共同模型也是 $B$ 的模型.

并非每个公式都有模型,矛盾式就没有模型. $S$ 的任一子集都是重言式的模型. 一个公式可以有许多模型,如 $S$ 的任一包含 $q$ 的子集都是 $p\to q$ 的模型. 一个模型也可以是许多公式共有的模型,如令 $S_0=\{p\}$,则 $S_0$ 是公式 $p,q\to p$,以及$p\vee q$等许多公式的共同模型. 如果令 $T=\{p,q\to p,p\vee q\}$,则 $S_0\vDash T$.

**例 1.2.24** 设 $T=\{A,A\to B,B\to C\}$,则 $T\vDash C$,即 $T$ 满足 $C$. 事实上,设 $S_0$ 是 $T$ 的模型,$v=v_{S_0}$是 $S_0$ 决定的赋值,则$v(A)=1,v(A\to B)=1,v(B\to C)=1$. 由前面式子得 $v(B)=1$. 再由 $v(B\to C)=1$,即得 $v(C)=1$. 所以 $S_0$ 也是 $C$ 的模型.

设 $T\subset F(S),A\in F(S)$,则 $T\vDash A$ 是个语义方面的概念,它表示 $T$ 中各公式的共同模型也是 $A$ 的模型. $T\vdash A$ 则是语构方面的概念,它表示从 $T$ 可以证得 $A$. 当 $T$ 是空集时 $T\vDash A$ 表示 $A$ 是重言式,因为 $T$ 是空集,每个模型都可看成 $T$ 中公式的共同模型,从而每个模型都是 $A$ 的模型,所以 $A$ 是重言式. 这时 $T\vdash A$ 表示 $A$ 是定理. 由可靠性定理与完备性定理知 $\vDash A$ 当且仅当 $\vdash A$,即 $T\vDash A$ 当且仅当 $T\vdash A$. 如果 $T$ 非空,仍可证明 $T\vDash A$ 当且仅当 $T\vdash A$. 其证明可见文献[2].

设 $X$ 是非空集,$E\subset 2^X$,即 $E$ 是 $X$ 的若干子集构成的集族. 当 $E$ 中任意有限多个集之交非空时称 $E$ 为 $X$ 中的中心集族. 这时有一包含 $E$ 的 $X$ 上的超滤 $\mathscr{D}$,$\mathscr{D}$除了具有一般滤的性质(任二集之交仍属于该滤,该滤在包含一个集的同时包含比这个集大的集)而外,还具有性质:若 $A\cup B=X$,则 $A\in\mathscr{D}$或 $B\in\mathscr{D}$.

**定理 1.2.25**(紧性定理) 设 $T$ 是公式集. 如果 $T$ 的每个有限子集都有模型,

则 $T$ 自身也有模型.

**证** 以 $2^{(T)}$ 表示 $T$ 的有限子集构成的集. 对 $T$ 中每个公式 $A$,令 $\bar{A}=\{i\in 2^{(T)}:A\in i\}$,则对 $T$ 中任意有限个公式 $A_1,\cdots,A_n$ 而言,

$$\{A_1,\cdots,A_n\}\in\bar{A}_1\cap\cdots\cap\bar{A}_n\neq\varnothing,$$

所以 $2^{(T)}$ 的子集族 $E=\{\bar{A}:A\in T\}$ 具有有限交性质,从而有 $2^{(T)}$ 上一包含 $E$ 的超滤 $\mathscr{D}$. 由假设知,对每个 $i\in 2^{(T)}$,$i$ 有模型,从而有赋值 $v_i$ 使对每个 $A\in i$ 均有 $v_i(A)=1$. 现在作 $F(S)$ 的赋值 $v$ 如下:对 $F(S)$ 中的公式 $B$,令

$$v(B)=1\quad 当且仅当\quad \{i:v_i(B)=1\}\in\mathscr{D}\tag{1.2.6}$$

由(1.2.6)式定义的 $v$ 确为 $F(S)$ 的赋值,事实上,

i) 设 $v(B)=1$,即 $\{i:v_i(B)=1\}\in\mathscr{D}$,则因 $\{j:v_j(B)=0\}$ 与 $\{i:v_i(B)=1\}$ 不相交,故由 $\mathscr{D}$ 为滤子知

$$\{j:v_j(\neg B)=1\}=\{j:v_j(B)=0\}\notin\mathscr{D}.$$

从而由(1.2.6)式知 $v(\neg B)=0$. 反之,设 $v(B)=0$,则 $\{i:v_i(B)=1\}\notin\mathscr{D}$. 由 $\mathscr{D}$ 为 $2^{(T)}$ 上的超滤知

$$\begin{aligned}2^{(T)}-\{i:v_i(B)=1\}&=\{j:v_j(B)=0\}\\&=\{j:v_j(\neg B)=1\}\in\mathscr{D}.\end{aligned}$$

故由(1.2.6)式知 $v(\neg B)=1$. 总之 $v(\neg B)=1-v(B)$.

ii) 由(1.2.6)式及 $\mathscr{D}$ 为超滤知

$$\begin{aligned}v(B\to C)=0\quad &当且仅当\quad \{i:v_i(B\to C)=1\}\notin\mathscr{D},\\&当且仅当\quad \{j:v_j(B\to C)=0\}\in\mathscr{D},\\&当且仅当\quad \{j:v_j(B)=1\ 且\ v_j(C)=0\}\in\mathscr{D},\\&当且仅当\quad \{j:v_j(B)=1\}\cap\{k:v_k(\neg C)=1\}\in\mathscr{D},\\&当且仅当\quad \{j:v_j(B)=1\}\in\mathscr{D}\ 且\ \{k:v_k(\neg C)=1\}\in\mathscr{D},\\&当且仅当\quad v(B)=1\quad 且\quad v(\neg C)=1,\\&当且仅当\quad v(B)=1\quad 且\quad v(C)=0,\end{aligned}$$

所以由定义 1.2.16 知 $v$ 是 $F(S)$ 的赋值.

今设 $A$ 是 $T$ 中任一公式,则由 $\bar{A}=\{i:A\in i\}\in E\subset\mathscr{D}$ 以及每个 $i$ 均有模型且 $A$ 属于每个 $\bar{A}$ 中的 $i$ 知若 $i\in\bar{A}$,则 $v_i(A)=1$,所以

$$\bar{A}\subset\{j:v_j(A)=1\}\in\mathscr{D}.$$

故由(1.2.6)式知 $v(A)=1$. 因为 $A$ 是 $T$ 中任意的公式,所以 $T$ 有模型 $S_v$.

### 1.2.6 Lindenbaum 代数

设 $A,B$ 是两个公式,如果对每个赋值 $v$ 都有 $v(A)=v(B)$,则 $v(A\to B)=v(B\to A)=1$ 恒成立,即 $A\to B$ 与 $B\to A$ 都是重言式. 反过来,如果 $A\to B$ 与 $B\to A$ 都是重言式,那么容易证明对任一赋值 $v$ 都有 $v(A)=v(B)$ 成立. 这时我们说 $A$ 与 $B$

是逻辑等价的，即

**定义 1.2.26**　设 $A,B\in F(S)$，如果对每个 $v\in\Omega$，$v(A)=v(B)$ 成立，则称 $A$ 与 $B$ **是逻辑等价的**.

由以上讨论和可靠性定理与完备性定理立即得出下面的

**定理 1.2.27**　设 $A,B\in F(S)$，则以下条件等价：

i) $A$ 与 $B$ 是逻辑等价的；

ii) $A\to B$ 与 $B\to A$ 都是重言式；

iii) $A$ 与 $B$ 是可证等价的.

如果用 $A\sim B$ 表示 $A$ 与 $B$ 可证等价，$A\approx B$ 表示 $A$ 与 $B$ 逻辑等价，则由上述定理知 $\approx$ 与 $\sim$ 是相同的. $\approx$ 显然是 $F(S)$ 上的等价关系. 当 $A\approx B$ 时 $\neg A\approx\neg B$，且当 $A\approx B$，$C\approx D$ 时，$A\to C\approx B\to D$，所以 $\approx$ 还是 $F(S)$ 上的同余关系. 由于 $\vee$ 与 $\wedge$ 都是由 $\neg$ 与 $\to$ 复合而得的运算，所以当 $A\approx B$，$C\approx D$ 时，$A\vee C\approx B\vee D$ 和 $A\wedge C\approx B\wedge D$ 都成立. 以 $\bar{F}$ 表示商代数 $F(S)/\approx$. 以 $\bar{A}$ 记 $A$ 所在的同余类. 对 $A,B\in F(S)$. 规定 $\bar{A}\leqslant\bar{B}$ 当且仅当对每个 $v\in\Omega$，$v(A)\leqslant v(B)$，则 $\leqslant$ 是商代数 $\bar{F}$ 上的偏序.

**定理 1.2.28**　商代数 $(\bar{F},\leqslant)$ 是 Boole 代数.

**证**　i) 设 $\models A$（即 $\vdash A$），即 $A$ 是重言式（也即定理），则易证 $\bar{A}$ 中的公式都是重言式，且重言式都在 $\bar{A}$ 中，那么对任何重言式 $B$ 而言，$\bar{B}=\bar{A}$. 这时 $\bar{A}$ 显然是 $(\bar{F},\leqslant)$ 中的最大元，记作 1. 同理可证全部矛盾式恰为一个同余类，且是 $(\bar{F},\leqslant)$ 中的最小元，记作 0.

ii) 设 $A,B\in F(S)$，显然 $v(A)\leqslant v(A\vee B)$，$v(B)\leqslant v(A\vee B)$. 如果 $v(A)\leqslant v(C)$ 且 $v(B)\leqslant v(C)$，则 $v(A\vee B)=v(A)\vee v(B)\leqslant v(C)$. 这表明 $\overline{A\vee B}$ 是 $\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 在 $\bar{F}$ 中的上确界. 同理可证 $\overline{A\wedge B}$ 是 $\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 在 $\bar{F}$ 中的下确界. 所以 $(\bar{F},\leqslant)$ 是格.

iii) 由 $A\vee\neg A$ 为重言式而 $A\wedge\neg A$ 为矛盾式得 $\bar{A}\vee\overline{\neg A}=1$ 且 $\bar{A}\wedge\overline{\neg A}=0$. 所以 $(\bar{F},\leqslant)$ 是有补格.

iv) 容易直接验证 $v(A\wedge(B\vee C))=v((A\wedge B)\vee(A\wedge C))$，故 $\bar{A}\wedge(\bar{B}\vee\bar{C})=(\bar{A}\wedge\bar{B})\vee(\bar{A}\wedge\bar{C})$. 所以 $(\bar{F},\leqslant)$ 又是分配格.

由以上 i) ~ iv) 知 $(\bar{F},\leqslant)$ 为 Boole 代数.

商代数 $\bar{F}$ 也叫 **Lindenbaum 代数**.

# 第 2 章　多值逻辑的语义理论

## 2.1　引　　言

### 2.1.1　多值逻辑的产生背景与历史概述

用赋值的方法可以描述一个命题的真假，如在 1.2 节中看到的那样，用数字 1 表示真，用数字 0 表示假. 但是在实际生活中是不是每个命题都可用真或假来判断呢？请看一个著名的例子. 1920 年，Łukasiewicz 问“明年 12 月 21 日中午我将在华沙”这一命题是真还是假？显然，这种包含未来事件的命题往往是难以判定真假的，所以 Łukasiewicz 提出了除真(true, T)与假(false, F)之外的第三真值 $I$，$I$ 表示不确定的中间值.

也有人认为，$I$ 可表示无意义命题的值. 例如，组成命题的对象是杂乱无章的东西：水仙花、小狗、棍子、自然数等，考虑以下各命题：

$p$：　7 是素数.

$q$：　9 是素数.

$r$：　11 是水仙花.

以上 $p$ 是真的，$q$ 是假的，而 $r$ 则是无意义的，可用 $I$ 表示其真值.

其实早在古希腊时期亚里士多德就对断言一个命题 $p$ 或其否定 $\neg p$ 必有一个成立的排中律提出了质疑，只不过没有明确提出多值逻辑的理论而已. 系统的多值逻辑理论是由 Łukasiewicz 与 Post 各自独立地于 20 世纪 20 年代提出的. 但这一理论的发展都经历了艰难的历程. 不少学者认为有二值逻辑已经足够了，可以用它去处理多值逻辑的问题. 直到 90 年代还有这种思想的影响存在(见文献[51])，难怪 Rescher 在他的《多值逻辑学》一书中要用很多篇幅去为多值逻辑正名[3]. 不过后来由于包括 Kleene、Chang 和 Epstein 等一批多值逻辑工作者的著名工作，特别是由于多值逻辑理论在电路中的应用而使多值逻辑得到发展与肯定.

### 2.1.2　多值逻辑与经典逻辑的异同

像二值逻辑一样，在多值逻辑中也是用字母与符号来表示命题与复合命题的. 以“如果明年我还在西安工作的话，我就与你共同办公司”这个复合命题为例，用字母 $A$ 表示“明年我还在西安工作”，用字母 $B$ 表示“我与你共同办公司”，则上述复合命题就可用蕴涵连接词写成 $A\rightarrow B$. 再如，对命题“并非明天黄河股票要涨价而

长虹股票要跌价”而言,如果用字母 $A$ 表示“明天黄河股票要涨价”,用字母 $B$ 表示“明天长虹股票要跌价”,那么上述命题就可写为$\neg (A \wedge B)$等. 由此可见,在用字母与逻辑连接词来表示命题方面多值逻辑与二值逻辑没有什么不同. 例如,在Łukasiewicz 的三值逻辑系统中,全体命题(公式)之集 $F(S)$ 仍是由 $S=\{p_1, p_2, \cdots\}$ 生成的$\{\neg, \rightarrow\}$型自由代数(不过这时逻辑连接词$\vee$已有新的简化意义). 对于一般多值逻辑系统而言,$F(S)$ 可以是型较复杂的自由代数.

多值逻辑与二值逻辑的明显不同在于赋值集已不再是$\{0,1\}$. 例如,对“明年我还在西安工作”与“明天长虹股票要跌价”这类命题就可赋给$\frac{1}{2}$值. 用语义理论的术语讲,一个赋值 $v$ 已不是从 $F(S)$ 到$\{0,1\}$而是从 $F(S)$ 到$\left\{0,\frac{1}{2},1\right\}$甚至到含有更多元素的 $n$ 元结构的同态了.

二值逻辑中常用的逻辑连接词有$\neg$ ,$\rightarrow$, $\vee$ 和 $\wedge$ 等,后两个连接词是可以由前面两个来表达的. 在多值逻辑中最常用的仍然是这些连接词,所以单从一个公式的外表上看是难以区别该公式是二值逻辑中的公式还是多值逻辑中的公式. 不过,在多值逻辑情形中,上述各种连接词之间的关系可能有变化. 例如,在Łukasiewicz 逻辑中,$A \vee B$ 是$(A \rightarrow B) \rightarrow B$ 的简写,而不再是$\neg A \rightarrow B$ 的简写. 同时,反过来也无法用$\vee$去表达$\rightarrow$. 这是多值逻辑与二值逻辑在连接词相互表达方面的不同之处. 此外,在多值逻辑中往往还引入更多的连接词,如引入模态词$\Diamond$与$\Box$以加强语气等.

### 2.1.3　多值逻辑的研究内容

多值逻辑也有语构与语义两个方面的研究. 与二值逻辑相比较,从现有的各种多值逻辑的著述来看,似乎语义方面的讨论更多一些. 此外,多值逻辑的一个研究分支是对有关代数理论的研究,如 Kleene 代数、Stone 代数、Post 代数、次 Post 代数、双 Heyting 代数的研究等形成了多值逻辑研究的一个分支. 关于这类代数的研究,可见文献[4].

多值逻辑的又一研究课题是所谓函数完备性问题. 以三值逻辑为例,设 $A$ 是由原子公式 $p_1,\cdots,p_n$ 表达的公式,如 $A=f(p_1,\cdots,p_n)$,这里 $f$ 是用$\neg$ 与$\rightarrow$(或者还有$\vee$、$\wedge$等)组成的公式,那么对每个赋值 $v$,由 $v$ 是同态知 $v(A)=\bar{f}(v(p_1),\cdots,v(p_n))$,这里$\bar{f}$是与 $f$ 有相应结构的$\left\{0,\frac{1}{2},1\right\}$中的运算公式,当然在$\left\{0,\frac{1}{2},1\right\}$中已事先定义了运算$\neg$ 与$\rightarrow$等. 如果暂时忘掉$\bar{f}$的来源并以 $E_3$ 记$\left\{0,\frac{1}{2},1\right\}$,则$\bar{f}$不过是 $E_3$ 上的一个 $n$ 元函数 $\bar{f}: E_3{}^n \rightarrow E_3$. 如果当初 $A=(\neg p_1 \rightarrow p_2) \vee p_3$,则相应的$\bar{f}$就由

$$\bar{f}(x_1,x_2,x_3)=(\neg x_1 \rightarrow x_2) \vee x_3 \tag{2.1.1}$$

来定义，这里在 $E_3$ 中¬，→与∨已有定义，如当 $a,b\in E_3$ 时 $\neg a=1-a$，$a\vee b=\max\{a,b\}$，

$$a\to b=\begin{cases}1, & a\leqslant b,\\ \neg a\vee b, & a>b.\end{cases} \tag{2.1.2}$$

如果定义 $g:E_3\to E_3$，$h:E_3^{\ 2}\to E_3$ 和 $k:E_3^{\ 2}\to E_3$ 为

$$g(x)=\neg x,\quad h(x,y)=x\to y\quad,\quad k(x,y)=x\vee y,$$

则由(2.1.1)式知

$$\bar{f}(x_1,x_2,x_3)=k(h(g(x_1),x_2),x_3),$$

即 $\bar{f}$ 可通过 $g,h$ 与 $k$ 复合而得. 易见，凡 $F(S)$ 中的公式所对应的函数均可由 $g,h$ 与 $k$ 复合而得. 但 $F(S)$ 中的公式所对应的函数，如 $\bar{f}$ 等是有特殊来历的函数，那么一般的与 $F(S)$ 无关的 $n$ 元函数，如 $\varphi:E_3^{\ n}\to E_3$ 是否也可以由上述的 $g,h$ 与 $k$ 复合而得呢？这就是关于函数系 $\{g,h,k\}$ 的完备性问题. 关于函数完备性问题，可见文献[5].

多值逻辑的实用性研究在电路设计上有重要的应用，如前面提到的文献[4,5]等中，就以大量篇幅论述了这方面的问题，文献[5]还详细介绍了多值逻辑在计算机理论方面的应用.

最后，随着近年来对 Fuzzy 控制技术的成功应用，作为其理论基础的 Fuzzy 推理研究也广泛展开，而 Fuzzy 推理是可以纳入多值(连续值)逻辑系统中的，因而是多值逻辑应用的又一个重要方面. 本书将从第 3 章起讨论这一问题.

## 2.2 赋值格上的蕴涵算子

### 2.2.1 [0,1]上若干不同的蕴涵算子

前面已经说过，多值逻辑与二值逻辑的明显不同在于赋值函数 $v$ 的值域已由 $\{0,1\}$ 扩大为至少含有 3 个元素的集，如 $E_3$，$[0,1]$ 乃至一般的格 $L$. 我们将把这个 $v$ 的值域叫**赋值格**，因为以下将看到除个别系统像 Bochvar 的 $B_3$ 外它们确实具有格结构. 事实上，它们还具有更丰富的结构，如运算¬ 与→等. 以 $[0,1]$ 为例，当 $\alpha,\beta\in[0,1]$ 时一般均规定 $\alpha\vee\beta=\max\{\alpha,\beta\}$，$\alpha\wedge\beta=\min\{\alpha,\beta\}$ 以及 $\neg\alpha=1-\alpha$ 等. 但 $\alpha\to\beta$ 的定义却是多种多样的. 这时，$\to:[0,1]^2\to[0,1]$ 是二元函数，为方便起见，我们以 $R$ 记此函数，以 $\alpha'$ 记 $\neg\alpha$，并称 $R$ 为蕴涵算子. 常见的蕴涵算子的定义如下：

①Zadeh 算子 $R_Z$　　$R_Z(a,b)=a'\vee(a\wedge b)$.

②Łukasiewicz 算子 $R_{Lu}$　　$R_{Lu}(a,b)=(a'+b)\wedge 1$.

③Mamdani 算子 $R_M$　　$R_M(a,b)=a\wedge b$.

④Gaines – Rescher 算子 $R_{GR}$　　$R_{GR}(a,b)=\begin{cases}1, & a\leqslant b,\\ 0, & a\nleqslant b.\end{cases}$

⑤Reichenbach 算子 $R_R$　　$R_R(a,b)=a'+ab.$

⑥Gödel 算子 $R_G$　　$R_G(a,b)=\begin{cases}1, & a\leqslant b,\\ b, & a\nleqslant b.\end{cases}$

⑦Goguen 算子 $R_{Go}$　　$R_{Go}(a,b)=\begin{cases}1, & a=0,\\ \dfrac{b}{a}\wedge 1, & a\neq 0.\end{cases}$

⑧Yager 算子 $R_Y$　　$R_Y(a,b)=b^a.$

⑨Kleene – Dienes 算子 $R_{KD}$　　$R_{KD}(a,b)=a'\vee b.$

以上的蕴涵算子中除了那些用到[0,1]的加法、乘法、除法和指数运算的②、⑤、⑦、⑧以外，其余 5 个蕴涵算子均可推广到带有逆序对合对应的有界格中，又作者引入了如下的蕴涵算子

⑩$R_0$ 算子　　$R_0(a,b)=\begin{cases}1, & a\leqslant b,\\ a'\vee b, & a\nleqslant b.\end{cases}$

并于文献[6]中证明了 $R_0$ 是较其他各蕴涵算子具有更多良好性质的算子.

### 2.2.2　Dubois-Prade(D-P)条件

(1)D-P 条件

法国学者 Dubois 与 Prade 对蕴涵算子提出了 10 个条件，我们简称其为 **D-P 条件**. 这 10 个条件如下：

i) $a\leqslant a^*$ 时，　$R(a,b)\geqslant R(a^*,b)$;

ii) $b\leqslant b^*$ 时，　$R(a,b)\leqslant R(a,b^*)$;

iii) $R(0,b)=1$;

iv) $R(1,b)=b$;

v) $R(a,b)\geqslant b$;

vi) $R(a,a)=1$;

vii) $R(a,R(b,c))=R(b,R(a,c))$;

viii) $R(a,b)=1$　当且仅当　$a\leqslant b$;

ix) $R(a,b)=R(b',a')$;

x) $R(x,y)$ 关于 $x,y$ 连续.

(2)对 D-P 条件的评述

首先指出，10 条 D-P 条件不是相互独立的. 事实上，设 ix)成立，则 i)与 ii)等价. 例如，设 i)成立，且 $b\leqslant b^*$，由“′”为逆序对合对应知 $b^{*\prime}\leqslant b'$. 所以由 ix)得

$$R(a,b)=R(b',a')\leqslant R(b^{*\prime},a')=R(a,b^*),$$

即 ii) 成立. 反之,当 ix)成立时也可由 ii)推得 i). 又由 i)和 iv)得

$$R(a,b) \geqslant R(1,b) = b,$$

即 v)成立. 还有,由 ix)与 v)即得 iii):

$$R(0,b) = R(b',1) \geqslant 1.$$

最后,条件 viii)的一半,即当 $a \leqslant b$ 时 $R(a,b)=1$ 由 i)与 vi)即得:当 $a \leqslant b$ 时,

$$R(a,b) \geqslant R(b,b) = 1.$$

综上所述可见,10 个 D-P 条件中 ii),iii),v)以及 viii)的一半均可删去. 当然,把这些可由其他条件推得的条件一并列出也有其好处,使人可以清楚地看到全部性质.

其次,结合赋值可以看出 D-P 条件中若干条件的直观意义. 前面已经说过,赋值 $v$ 是从公式集 $F(S)$ 到赋值格 $L$ 的同态. 蕴涵算子 $R$ 的背景是 $L$ 上的二元运算 $\rightarrow$. 由 $v$ 保运算 $\rightarrow$ 得

$$v(A \rightarrow B) = R(v(A), v(B)). \tag{2.2.1}$$

由于 $A \rightarrow A$ 是重言式,对每个赋值 $v$ 均有 $v(A \rightarrow A)=1$. 所以,只要有 $v: F(S) \rightarrow L$ 和 $A \in F(S)$ 使 $v(A)=a$(一般均如此),由(2.2.1)式就自然推出了条件 vi). viii)的直观背景是说 $A \rightarrow B$ 是重言式当且仅当对每个赋值 $v$ 均有 $v(A) \leqslant v(B)$. 如果承认这一点,那么由 $A$ 为矛盾式时 $A \rightarrow B$ 为重言式即得 iii).

并非 D-P 条件对每个多值逻辑中的赋值格都成立. 以 vii)和 ix)为例,它们分别对应于公理

$$(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (B \rightarrow (A \rightarrow C)) \tag{2.2.2}$$

和

$$(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A), \tag{2.2.3}$$

但并非每个多值系统都承认这两条为公理. 如果再承认

$$(B \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)) \tag{2.2.4}$$

为公理,则在相应的系统中 i)与 ii)成立(假定有可靠性定理). 请读者对条件 i)~ix)作进一步的分析.

值得注意的是,对许多多值系统而言,条件 x)都不成立.

## 2.3 几种三值逻辑系统

本章研究多值逻辑的语义理论,也就是基于赋值概念的理论,暂不涉及基于公理和推理规则的形式演绎理论. 仍用 $F(S)$ 表示全体命题(即公式)的集,用 $L$ 表示赋值格,那么一个赋值 $v: F(S) \rightarrow L$,就是一个从 $F(S)$ 到 $L$ 的同态,它保持 $F(S)$ 与 $L$ 共有的那些运算. 例如,$F(S)$ 中有 $\neg$ ,$\vee$ 与 $\rightarrow$ 运算时,$L$ 上就也有这些运算,且

$$
\begin{aligned}
v(\neg A) &= \neg v(A), \\
v(A \vee B) &= v(A) \vee v(B), \\
v(A \to B) &= v(A) \to v(B).
\end{aligned}
\tag{2.3.1}
$$

注意，对不同的多值逻辑系统而言，$F(S)$是相同的，只要运算种类，也就是型一致的话. 在大多数情形下，各系统的公式集 $F(S)$都是由非空集 $S$ 生成的$\{\neg, \vee, \to\}$型自由代数. 而既然 $F(S)$是自由代数，那么$\neg$，$\vee$，$\to$运算就是纯粹形式上的连接，谈不上什么交换律、结合律等. 至于公理系统，那是要另外加以肯定的东西，不同的多值逻辑理论当然有不同的公理系统与推理规则，而这又是语构理论研究的内容. 对于赋值 $v: F(S) \to L$ 而言，既然 $F(S)$是相对固定的，那么该研究的就是 $L$ 中的运算$\neg$，$\vee$，$\to$等的性质了，也就是该研究(2.3.1)式右边那些运算的性质. 所以，本章中研究的多值逻辑的语义理论主要研究的是重言式理论，而这又归结为对不同的赋值格及其上运算性质的研究. 因此，我们往往省去“逻辑”二字而简单地说“多值系统”.

### 2.3.1　Łukasiewicz 的三值系统 $L_3$

(1)$L_3$ 的真值表

用 $p, q, r$ 等表示命题，用$\neg p$ 表示 $p$ 的否定，分别用 $p \vee q$ 与 $p \wedge q$ 表示 $p$ 与 $q$ 的析取与合取，用 $p \to q$ 表示 $p$ 蕴涵 $q$，则Łukasiewicz 给出的真值表如下：

| $p$ | $\neg p$ |
|---|---|
| $T$ | $F$ |
| $I$ | $I$ |
| $F$ | $T$ |

$\neg p$

| $p \backslash q$ | $T$ | $I$ | $F$ |
|---|---|---|---|
| $T$ | $T$ | $T$ | $T$ |
| $I$ | $T$ | $I$ | $I$ |
| $F$ | $T$ | $I$ | $F$ |

$p \vee q$

| $p \backslash q$ | $T$ | $I$ | $F$ |
|---|---|---|---|
| $T$ | $T$ | $I$ | $F$ |
| $I$ | $I$ | $I$ | $F$ |
| $F$ | $F$ | $F$ | $F$ |

$p \wedge q$

| $p \backslash q$ | $T$ | $I$ | $F$ |
|---|---|---|---|
| $T$ | $T$ | $I$ | $F$ |
| $I$ | $T$ | $T$ | $I$ |
| $F$ | $T$ | $T$ | $T$ |

$p \to q$

这里 $T$ 表示真，$F$ 表示假，$I$ 表示中间值. 所以，现在的赋值格是 $L = \{T, I, F\}$. 以上的真值表实际上是建立了 $L$ 中的四种运算$\neg$，$\vee$，$\wedge$，$\to$. 以第一个真值表为例，它

说当 $v(p)=T$ 时 $v(\neg p)=F$;当 $v(p)=I$ 时 $v(\neg p)=I$;当 $v(p)=F$ 时 $v(\neg p)=T$. 因为 $v(\neg p)=\neg v(p)$,所以此表实际上是分别情况 $v(p)=T,I$ 或 $F$ 而令 $\neg v(p)=F,I$ 或 $T$. 所以,它定义了 $L$ 上的一元运算 $\neg:L\to L$. 其他的几个表则定义了 $L$ 中的二元运算. 例如,$T\vee I=T, I\wedge I=I, I\to F=I$ 等. 这就是我们在前面所说的,多值系统实际上是研究赋值格及其上运算的理论. 以下用 $L_3$ 表示 Łukasiewicz 的三值系统.

(2)一些说明

**注 2.3.1** i) 如果把以上各真值表中 $I$ 所在的行与列都删去,则剩下的部分恰好是二值逻辑中的真值表. 如果把二值系统记为 $\boldsymbol{C}_2$,则 $L_3$ 是 $\boldsymbol{C}_2$ 的扩充.

ii) 如果把 $L_3$ 按真假程度排序,$T\geqslant I\geqslant F$,则由第二和第三两个表看出 $p\vee q$ 取 $p$ 与 $q$ 中真值较大的值,而 $p\wedge q$ 取 $p$ 与 $q$ 中真值较小的值.

iii) 由蕴涵关系表看出,若 $p\to q$ 与 $p$ 均取真值 $T$,则 $q$ 取真值 $T$,因此在 $L_3$ 中 MP 规则成立.

iv) 从真值表可直接验证在 $L_3$ 中,$\vee$ 与 $\wedge$ 都是交换的,且是结合的和相互分配的,同时下述 De Morgan 对偶律成立:

$$\begin{aligned}\neg(a\vee b)&=\neg a\wedge\neg b,\\ \neg(a\wedge b)&=\neg a\vee\neg b.\end{aligned}\tag{2.3.2}$$

这里 $a$ 与 $b$ 表示 $T,I$ 或 $F$. 以后为叙述方便,把满足 iv) 中性质的真值表称为**正则的**.

v) $L_3$ 中的三个元素 $T,I$ 与 $F$ 也经常分别用 $1,\dfrac{1}{2}$ 与 0 去表示.

(3)连接词之间的关系

$L_3$ 中各运算之间有下述关系:

**命题 2.3.2** 在 $L_3$ 中,

i) $a\vee b=(a\to b)\to b$;

ii) $a\to b=\begin{cases}\neg a\vee b, & (a,b)\neq(I,I),\\ T, & (a,b)=(I,I).\end{cases}$

**证** 直接查真值表逐一验证即可.

**注 2.3.3** 从命题 2.3.2 ii)看出运算 $\to$ 可通过 $\neg,\vee$ 并借助 $T$ 值来表达. 但若不借助 $T$ 值,仅用 $\neg,\vee$ 和 $\wedge$ 是无法表达 $\to$ 的. 这是因为

$$\neg I=I\vee I=I\wedge I=I,$$

但 $I\to I=T$,即 $\neg,\vee$ 和 $\wedge$ 作用于 $I$ 仍得 $I$,是无法得出 $I\to I$ 的 $T$ 值的.

(4)模态词◇与□

用◇表示语气词"可能",用□表示"必然",则当 $p$ 真时当然可能真,当 $p$ 不定时,也可能真,而当 $p$ 假时就不能再使 $p$ 可能真了,所以有如下的真值表:

| $p$ | $\Diamond p$ |
|---|---|
| $T$ | $T$ |
| $I$ | $T$ |
| $F$ | $F$ |

类似地有关于“必然”的真值表：

| $p$ | $\Box p$ |
|---|---|
| $T$ | $T$ |
| $I$ | $F$ |
| $F$ | $F$ |

容易验证$\Diamond p$与$\neg p\to p$有相同的真值. 如果把命题与其赋值不加区别，也可写成$\Diamond p=\neg p\to p$. 这是由Łukasiewicz 的学生 Tarski 首先指出的.

(5) $L_3$ 与 $C_2$ 中重言式的比较

**定义 2.3.4**　设 $S$ 是非空集，$F(S)$ 是由 $S$ 生成的 $(\neg, \vee, \to)$ 型自由代数，即 $F(S)$ 是全部公式（命题）之集，$L=\{T, I, F\}$ 是Łukasiewicz 三值系统.

i）映射 $v: F(S)\to L$ 叫**赋值**，若(2.3.1)式成立. 以 $\Omega$ 记全体赋值的集.

ii）设 $A\in F(S)$，如果对每个 $v\in\Omega$ 均有 $v(A)=T$，则称 $A$ 为**重言式**.

**注 2.3.5**　如果限制赋值 $v$ 不取 $I$ 值，即 $v$ 是从 $F(S)$ 到 $\{T, F\}$ 或 $\{1, 0\}$ 的映射，则由命题2.3.2 ii）知 $a\to b=\neg a\vee b$. 这时若取 $F(S)$ 为经典逻辑公式集，即由 $S$ 生成的 $(\neg, \to)$ 型自由代数，则 $v: F(S)\to\{1, 0\}$ 是二值逻辑的赋值，这是因为Łukasiewicz 三值系统 $L_3$ 是 $\boldsymbol{C}_2$ 的扩张. 可见，如果 $A$ 是关于 $L_3$ 的重言式，那么 $A$ 一定也是关于 $\boldsymbol{C}_2$ 的重言式. 以 $A=p\to(q\to p)$ 为例，可以验证无论给 $p$ 与 $q$ 赋以 $T$, $I$, $F$ 中的什么值 $A$ 的赋值均为 $T$，即 $A$ 为 $L_3$ 中的重言式. 那么特别当给 $p$ 与 $q$ 仅赋以 $T$ 与 $F$ 两种可能值时，$A$ 的赋值当然仍只能是 $T$，所以 $A$ 也是 $\boldsymbol{C}_2$ 中的重言式. 以上我们把“$A$ 是关于 $L_3$ 的重言式”简单说成“$A$ 是 $L_3$ 中的重言式”，对 $\boldsymbol{C}_2$ 也是这样简单地说. 以后仍将用这种简化的说法. 由以上分析得：

**命题 2.3.6**　凡 $L_3$ 中的重言式都是 $\boldsymbol{C}_2$ 中的重言式，即

$$T(L_3)\subset T(\boldsymbol{C}_2). \tag{2.3.3}$$

这里 $T(L_3)$ 与 $T(\boldsymbol{C}_2)$ 分别表示 $L_3$ 中与 $\boldsymbol{C}_2$ 中全体重言式的集.

**注 2.3.7**　i）$\boldsymbol{C}_2$ 中的重言式（即 $F(S)$ 中那些关于 $\boldsymbol{C}_2$ 而言的重言式）不必是 $L_3$ 中的重言式. 如 $A=\neg\alpha\vee\alpha$ 是 $\boldsymbol{C}_2$ 中的重言式，这里 $\alpha$ 是原子公式. 但给 $\alpha$ 赋以值 $I$，则 $A$ 的赋值仍为 $I$，可见 $A$ 不是 $L_3$ 中的重言式.

ii) $C_2$ 中的重言式甚至可在 $L_3$ 中取值 $F$. 例如,令

$$A = \neg(\alpha \to \neg\alpha) \vee \neg(\neg\alpha \to \alpha), \tag{2.3.4}$$

则当给 $\alpha$ 赋以 $I$ 值时 $A$ 的赋值就等于 $F$,但 $A$ 是 $C_2$ 中的重言式.

iii) 在多值逻辑中经常考虑那种赋值恒大于或等于比 $T$ 小(但不是 $F$)的真值的那种公式. 在三值情形下这种真值只能是 $I$. 称对每个 $v \in \Omega$ 均有 $v(A) \geqslant I$ 的公式 $A$ 为**准重言式**,那么准重言式就是永远不取 $F$ 值的公式. 如果仅在 $C_2$ 的范围内考虑赋值,准重言式由于不取 $F$ 与 $I$ 值而只能取 $T$ 值,即 $L_3$ 中的准重言式必为 $C_2$ 中的重言式. 但由 ii) 中的(2.3.4)式知 $C_2$ 中的重言式也不必为 $L_3$ 中的准重言式. 如果以 $QT(L_3)$ 记 $L_3$ 中的准重言式之集的话,则有

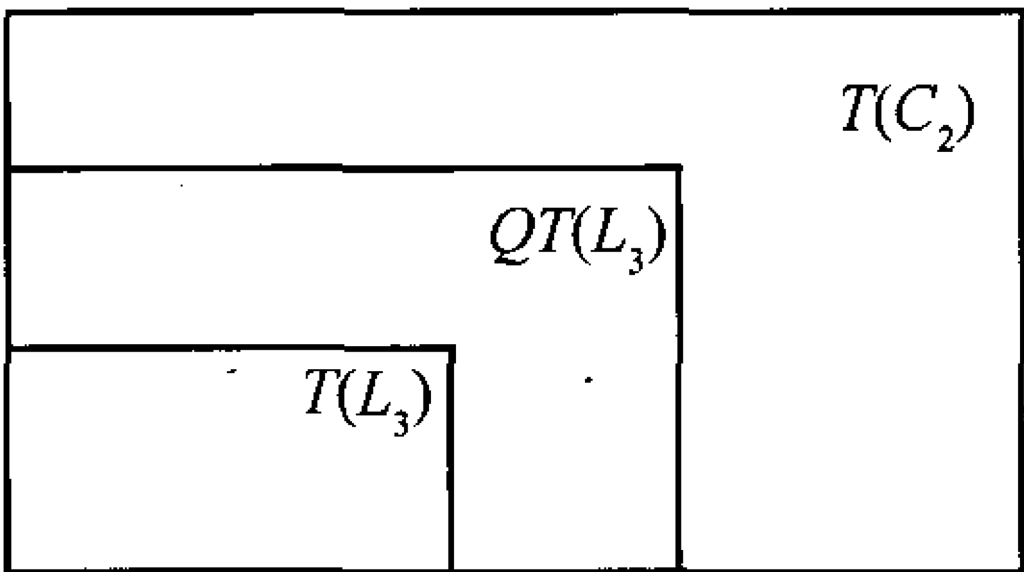


图 2.1

$$T(L_3) \subset QT(L_3) \subset T(C_2)$$

或用图 2.1 表示.

### 2.3.2 Bochvar 的三值系统 $B_3$

苏联数学家 Bochvar 于 1939 年提出了他的三值系统 $B_3$. 在他的系统中 $I$ 不再是界于 $T$ 与 $F$ 之间的真值,不能再设想 $T \geqslant I \geqslant F$,因为任何真值只要通过 $\vee$, $\wedge$ 或 $\to$ 与 $I$ 相作用其结果均为 $I$. 这时赋值集 $L = \{T, I, F\}$ 已不再构成格了. 可以这样设想:$I$ 代表无意义,任何值一旦与无意义的值一起运算,其结果自然也是无意义的了.

(1) $B_3$ 的真值表

| $p$ | $\neg p$ |
|---|---|
| $T$ | $F$ |
| $I$ | $I$ |
| $F$ | $T$ |

$\neg p$

| $p \backslash q$ | $T$ | $I$ | $F$ |
|---|---|---|---|
| $T$ | $T$ | $I$ | $T$ |
| $I$ | $I$ | $I$ | $I$ |
| $F$ | $T$ | $I$ | $F$ |

$p \vee q$

| $p \backslash q$ | $T$ | $I$ | $F$ |
|---|---|---|---|
| $T$ | $T$ | $I$ | $F$ |
| $I$ | $I$ | $I$ | $I$ |
| $F$ | $F$ | $I$ | $F$ |

$p \wedge q$

| $p \backslash q$ | $T$ | $I$ | $F$ |
|---|---|---|---|
| $T$ | $T$ | $I$ | $F$ |
| $I$ | $I$ | $I$ | $I$ |
| $F$ | $T$ | $I$ | $T$ |

$p \to q$

(2)一些说明

**注 2.3.8**　i) $B_3$ 真值表也是 $\boldsymbol{C}_2$ 真值表的扩充.

ii) $(\neg, \vee, \rightarrow)$ 型代数 $\{T, I, F\}$ 已不再是格了.

iii) MP 规则仍成立.

iv) $B_3$ 真值表也是正则的.

v) 关于赋值与重言式,仍由定义 2.3.4 描述. 准重言式的意义也与 $L_3$ 中的一样.

(3)$B_3$ 中的准重言式与 $\boldsymbol{C}_2$ 中的重言式

首先指出,在 $B_3$ 中是没有重言式的. 因为只要给原子公式赋以 $I$ 值,则由它们表达的公式肯定有赋值 $I$. 但 $B_3$ 中是有准重言式的,如 $A = \alpha \rightarrow \alpha$ 就是,因为当 $v(\alpha) = I$ 时 $v(A) = I$;当 $v(\alpha) \neq I$ 时 $v(A) = T$. 实际上我们有下述结果:

**命题 2.3.9**　$B_3$ 中的准重言式与 $\boldsymbol{C}_2$ 中的重言式一致,即

$$QT(B_3) = T(\boldsymbol{C}_2). \tag{2.3.5}$$

**证**　设 $A$ 是 $\boldsymbol{C}_2$ 中的重言式,$A = f(p_1, \cdots, p_n)$,则当给 $p_1, \cdots, p_n$ 赋以 $F, T$ 值时,$A$ 的赋值为 $T$,而当给 $p_1, \cdots, p_n$ 中至少一个赋以 $I$ 值时,$A$ 的赋值就是 $I$. 总之,$F$ 不会出现,故 $A$ 为 $B_3$ 中的准重言式.

反过来,设 $A$ 是 $B_3$ 中的准重言式,则无论给 $p_1, \cdots, p_n$ 赋以 $T, I$ 或 $F$ 中的什么值,$A$ 的赋值均不为 $F$. 特别地,当只给 $p_1, \cdots, p_n$ 赋以 $T, F$ 值时 $A$ 的赋值不为 $F$. 由 $B_3$ 真值表是 $\boldsymbol{C}_2$ 真值表的扩充知这时 $A$ 的赋值只能是 $T$. 所以 $A$ 是 $\boldsymbol{C}_2$ 中的重言式.

Bochvar 还引入了一个公式 $p$ 的外部断语 $A_p$ 和弱断语 $W_p$ 以及相应的运算 $\neg$, $\vee$, $\wedge$ 与 $\Rightarrow$ 等. 有兴趣的读者可参阅 Rescher 的 Many-Valued Logic 一书.

### 2.3.3　Kleene 的三值系统 $K_3$

Kleene 于 1938 年引入了他的三值系统 $K_3$. $K_3$ 与 Łukasiewicz 的三值系统 $L_3$ 的差别仅在于蕴涵算子→的真值表不同.

(1)$K_3$ 的真值表

只给出 $K_3$ 的蕴涵算子的真值表如下:

| $p \backslash q$ | $T$ | $I$ | $F$ |
|---|---|---|---|
| $T$ | $T$ | $I$ | $F$ |
| $I$ | $T$ | $I$ | $I$ |
| $F$ | $T$ | $T$ | $T$ |

$p \rightarrow q$

与Łukasiewicz 的蕴涵真值表相比较可见,在 $L_3$ 中的 $I \to I = T$,而在 $K_3$ 中 $I \to I = I$. 又容易验证在 $K_3$ 中 $p \to q = \neg p \vee q$ 与 $p \vee q = \neg p \to q$ 均成立. 正因如此,在 $K_3$ 中是没有重言式的,同时可设 $K_3$ 中的公式仅含连接词$\neg$与$\to$.

$K_3$ 真值表也是 $C_2$ 真值表的扩充,它也保持 MP 并且是正则的.

(2)$K_3$ 中的准重言式

因为 $K_3$ 真值表是 $C_2$ 真值表的扩充,$K_3$ 中的准重言式必为 $C_2$ 中的重言式. 反过来,$C_2$ 中的重言式也是 $K_3$ 中的准重言式,即下面的命题成立:

**命题 2.3.10** $K_3$ 中的准重言式与 $C_2$ 中的重言式一致,即

$$QT(K_3) = T(C_2). \tag{2.3.6}$$

为证这一命题我们先证明一个引理.

**引理 2.3.11** 设 $A$ 由 $S$ 中的原子公式经$\neg$ 与$\to$连接而成,$\varphi: S \to \{T,I,F\}$ 为任一映射. 作映射 $\varphi^*: S \to \{T,F\}$ 如下:

$$\varphi^*(p_i) = \begin{cases} \varphi(p_i), & \text{若 } \varphi(p_i) \in \{T,F\}, \\ T, & \text{若 } \varphi(p_i) = I, \end{cases}$$

则 $\varphi$ 与 $\varphi^*$ 各诱导出一个赋值 $v_\varphi: F(S) \to \{T,I,F\}$ 与 $v_{\varphi^*}: F(S) \to \{T,F\}$.

i) 如果 $v_\varphi(A) = T$,则 $v_{\varphi^*}(A) = T$.

ii) 如果 $v_\varphi(A) = F$,则 $v_{\varphi^*}(A) = F$.

**证** 按 $A$ 中所含连接词$\neg$ 与$\to$的总个数归纳证明.

如果 $A$ 中只含一个连接词,则 $A = \neg p$ 或 $A = p \to q$,这里 $p, q \in S$. 当 $A = \neg p$ 时,无论 $v_\varphi(A) = T$ 或 $v_\varphi(A) = F$ 均有 $\varphi(p) \neq I$. 从而 $v_{\varphi^*}(A) = v_\varphi(A)$. 当 $A = p \to q$ 时,若 $v_\varphi(A) = T$,则 $\varphi(p) = F$ 或 $\varphi(q) = T$,这时 $\varphi^*(p) = F$ 或 $\varphi^*(q) = T$,从而 $v_{\varphi^*}(A) = T$. 若 $v_\varphi(A) = F$,则 $\varphi(p) = T$ 且 $\varphi(q) = F$,这时$\varphi^*(p) = T$ 且 $\varphi^*(q) = F$,从而$v_{\varphi^*}(A) = F$. 故引理中的条件当 $A$ 只含一个连接词时成立.

假定当 $A$ 含不多于 $k$ 个连接词时引理成立,今 $A$ 含有 $k+1$ 个连接词,设 $A = \neg B$,$B$ 含 $k$ 个连接词. 由归纳假设,当 $v_\varphi(B) = T$ 或 $F$ 时 $v_{\varphi^*}(B) = T$ 或 $F$. 故当 $v_\varphi(A) = F$ 或 $T$ 时,$v_{\varphi^*}(A) = F$ 或 $T$. 设 $A = B \to C$,则 $B$ 与 $C$ 均含不多于 $k$ 个连接词. 如果$v_\varphi(A) = T$,则 $v_\varphi(B) = F$ 或 $v_\varphi(C) = T$. 由归纳假设 $v_{\varphi^*}(B) = F$ 或 $v_{\varphi^*}(C) = T$,从而 $v_{\varphi^*}(A) = T$. 如果 $v_\varphi(A) = F$,则 $v_\varphi(B) = T$ 且 $v_\varphi(C) = F$. 由归纳假设 $v_{\varphi^*}(B) = T$ 且 $v_{\varphi^*}(C) = F$,从而$v_{\varphi^*}(A) = F$.

由以上归纳证明知引理 2.3.11 成立.

现在来证明命题 2.3.10. 只需证明当 $A$ 是 $C_2$ 重言式时 $A$ 是 $K_3$ 准重言式. 设 $A$ 由原子公式 $p_1, \cdots, p_n$ 经连接词$\neg$ 与$\to$连接而成,$\varphi$ 与 $\varphi^*$ 的意义同引理 2.3.11,设 $A$ 不是 $K_3$ 准重言式,则有 $\varphi$ 使 $v_\varphi(A) = F$. 这时由引理知 $v_{\varphi^*}(A) = F$,从而 $A$ 不是 $C_2$ 重言式. 这就证明了(2.3.6)式.

### 2.3.4　Gödel 的三值系统 $G_3$

(1) $G_3$ 的真值表

在 Gödel 的系统 $G_3$ 中, $p \vee q$ 与 $p \wedge q$ 的真值表与 $L_3$ 和 $K_3$ 中的都一样(那么 $F \leqslant I \leqslant T$ 成立), 只有 $p \to q$ 的定义不同. 如果用 $|p|$ 表示 $p$ 的赋值, 则

$$|p \to q| = \begin{cases} T, & |p| \leqslant |q|, \\ |q|, & |p| \nleqslant |q|. \end{cases} \tag{2.3.7}$$

它所对应的蕴涵算子就是 2.2 节的 1 中的 $R_G$. $|\neg p| = |p| \to F$. 与 $L_3$ 和 $K_3$ 系统一样, $G_3$ 的真值表也是 $C_2$ 真值表的扩充, 它也保持 MP 并且是正则的.

(2) 直觉主义命题演算系统

这里我们加一点语构方面的讨论. 直觉主义命题演算(intuitionistic propositional calculus, IPC)有两条公理:

(M1) $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$;

(M2) $A \to (B \to A)$.

我们看到(M1)与(M2)就是二值逻辑中的公理(L2)与(L1). 这里没有了涉及非运算 $\neg$ 的公理(L3). 因为直觉主义者崇尚构造性证明, 他们不承认 $\neg\neg A = A$. 也不承认排中律 $A \vee \neg A$(即不认为 $A \vee \neg A$ 是定理或重言式). 如果把由(M1)与(M2)出发利用 MP 规则推得的命题叫 IPC 定理, 则有下面的命题.

**命题 2.3.12**　IPC 定理都是 $G_3$ 系统中的重言式.

**证**　因为 MP 保持重言式, 所以只需验证(M1)与(M2)是重言式. 设 $v: F(S) \to \{T, I, F\}$ 是任一 $G_3$ 赋值, 以 $|A|$ 记 $v(A)$. 先证(M2)为 $G_3$ 重言式. 事实上, 当 $|B| \leqslant |A|$ 时 $|B \to A| = T$, 那么 $|A| \leqslant |B \to A|$, 从而 $|A \to (B \to A)| = T$. 当 $|B| \nleqslant |A|$ 时, $|B \to A| = |A|$, 从而由 $|A| \leqslant |A|$ 仍得到 $|A \to (B \to A)| = T$.

现在证明(M1)为重言式. 如果 $|B| > |C|$, 则 $|B \to C| = |C|$. 这时(M1)是否取值 $T$ 取决于

$$(A \to C) \to ((A \to B) \to (A \to C)) \tag{2.3.8}$$

是否取值 $T$. 但由(2.3.8)式就是(M2)知(2.3.8)式为 $G_3$ 重言式, 所以当 $|B| > |C|$ 时(M1)的 $v$ 赋值为 $T$. 如果 $|B| \leqslant |C|$, 则当 $|A| > |C|$ 时,

$$|(A \to B) \to (A \to C)| = |B \to C| = T.$$

而当 $|A| \leqslant |C|$ 时, 由 $|A \to C| = T$ 仍有

$$|(A \to B) \to (A \to C)| = T.$$

从而总有

$$|(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))| = T.$$

所以(M1)是 $G_3$ 重言式

**注 2.3.13**　i) $G_3$ 重言式不必是 IPC 定理, 如 $(A \to B) \vee (B \to A)$ 是 $G_3$ 重言式,

但它不是 IPC 定理. Gödel 证明了下述一般性结果:

在任何含有有限多条公理以及推理规则 MP 的系统中,其定理的集与 $G_3$ 重言式的集都不一致. 换句话说, $G_3$ 重言式不可有限公理化.

ii) (M1)不是 $L_3$ 重言式. 事实上,当 $A,B$ 的赋值均为 $I$,而 $C$ 的赋值为 $F$ 时(这是可能的,如令 $A,B$ 与 $C$ 分别为原子公式 $p,q$ 与 $r$ 就行)(M1)的赋值等于 $I$,所以(M1)不是 $L_3$ 重言式. 又在系统 $B_3$ 与 $K_3$ 中没有重言式,所以(M1)自然也不是 $B_3$ 重言式和 $K_3$ 重言式了.

## 2.4　一般多值逻辑系统

在本节中,我们研究一般的 $n$ 值或无穷值逻辑系统. 这时真值 $T$ 与 $F$ 也往往分别写成 1 与 0.

### 2.4.1　Łukasiewicz 的 $n$ 值系统 $L_n$

(1) $L_n$ 的结构

设真值集(或赋值格) $L$ 已由 $\{T,I,F\}$ 扩充为含有 $n$ 个元素的线性序集

$$L = \{0,\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-2},1\},$$

其中 0 表示假,1 表示真,而 $\alpha_i(1\leqslant i\leqslant n-2)$ 则表示中间值. 可以这样理解: $\alpha_i$ 的足标 $i$ 越大它就代表越真的值. 换句话说,按真假程度排序时有

$$\alpha_0 = 0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_{n-2} < 1 = \alpha_{n-1}. \tag{2.4.1}$$

这里分别把 0 与 1 记作 $\alpha_0$ 与 $\alpha_{n-1}$ 有时会方便一些.

为适应表达否命题的真假程度的需要,在 $L$ 上应当引入非运算 $\neg: L\to L$,或者为简便计把 $\neg$ 改记为"$'$",则对每个 $\alpha\in L$,应当有 $\alpha'\in L$,且

$$\begin{aligned}&(\alpha')' = \alpha,\\&\alpha\leqslant\beta \quad 当且仅当 \quad \beta'\leqslant\alpha',\end{aligned} \tag{2.4.2}$$

即 $':L\to L$ 是 $L$ 上的逆序对合对应. 一般均假定 $\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-2}$ 是 $[0,1]$ 的 $n-1$ 等分点,如 $L_4=\left\{0,\frac{1}{3},\frac{2}{3},1\right\}$, $L_5=\left\{0,\frac{1}{4},\frac{2}{4},\frac{3}{4},1\right\}$ 等. 这时 $\alpha'=1-\alpha$.

至于运算 $\vee$ 与 $\wedge$,因为 $L$ 上已有了序(2.4.1),它们分别表示在此序之下的上、下确界运算.

现在只剩下在 $L$ 上定义蕴涵运算 $\to$ 了:对 $L$ 中任二元 $\alpha$ 与 $\beta$,规定

$$\alpha\to\beta = \min\{1,\alpha'+\beta\}. \tag{2.4.3}$$

这里 $\alpha'=1-\alpha$. 在 $L$ 上定义了 $\neg$ , $\vee$ , $\wedge$ 与 $\to$ 之后,把 $L$ 称为 Łukasiewicz 的 **$n$ 值系统 $L_n$**. 当然,正如以前所讲述的,关于 $L_n$ 的重言式理论虽已涉及 $L_n$ 之外的公式集 $F(S)$,我们也把它纳入于系统 $L_n$ 研究的内容,这里 $F(S)$ 仍为由 $S$ 生成的( $\neg$ , $\vee$ ,

$\rightarrow$)型自由代数，而 $A \wedge B$ 仍为 $\neg(\neg A \vee \neg B)$ 的简写.

过去我们是用真值表来描述 $L_3$ 的，而现在是用表达式(2.4.1)～(2.4.3)来定义 $L_n$ 的，这比用列表的方法要节省许多篇幅.

(2) $L_n$ 的子代数

$L_n$ 是$(\neg, \vee, \rightarrow)$型代数. 设 $M$ 是 $L_n$ 的非空子集. 如果 $M$ 关于运算$\neg$，$\vee$ 与$\rightarrow$都封闭，则称 $M$ 为 $L_n$ 的**子代数**. 任取 $\alpha \in M$，则由(2.4.3)式得 $\alpha \rightarrow \alpha = \min\{1, \alpha' + \alpha\} = 1$ 知 $1 \in M$，那么 $0 = \neg 1 \in M$. 可见，$L_n$ 的子代数一定包含 0 与 1. 又 $\boldsymbol{C}_2 = \{0, 1\}$ 显然是 $L_n$ 的一个子代数，它是 $L_n$ 的最小子代数.

**例 2.4.1**　i) $L_3$ 是 $L_5$ 的子代数.

ii) $L_4$ 是 $L_7$ 的子代数.

iii) $L_5$ 是 $L_9$ 的子代数.

一般地有如下命题.

**命题 2.4.2**　$L_n$ 是 $L_{2n-1}$ 的子代数.

**证**

$$L_n = \left\{0, \frac{1}{n-1}, \cdots, \frac{n-2}{n-1}, 1\right\},$$

$$L_{2n-1} = \left\{0, \frac{1}{2n-2}, \cdots, \frac{2n-4}{2n-2}, \frac{2n-3}{2n-2}, 1\right\}.$$

由于 $L_n$ 中各元的分母均为 $n-1\left(0 \text{ 与 } 1 \text{ 也可看为} \frac{0}{n-1} \text{与} \frac{n-1}{n-1}\right)$，而 $L_{2n-1}$ 中各元的分母均为 $2n-2$，所以 $L_n$ 是 $L_{2n-1}$ 的子集，它由 $L_{2n-1}$ 中分子为偶数的项组成. 由于分母为 $n-1$ 的分数的全体关于(2.4.2)式与(2.4.3)式中定义的运算$'$与$\rightarrow$都封闭，且对线性序集而言 $L_{2n-1}$ 的任何子集关于运算 $\vee$ 都封闭，所以 $L_n$ 是 $L_{2n-1}$ 的子代数.

上述命题可以推广为如下定理.

**定理 2.4.3**　$L_n$ 是 $L_m$ 的子代数当且仅当 $m = kn - k + 1\ (k = 1, 2, \cdots)$.

证明留给读者.

(3) 不同系统 $L_n$ 中重言式的比较

设 $L_n$ 是 $L_m$ 的子代数，$v: F(S) \rightarrow L_n$ 是同态，则把 $v$ 看作从 $F(S)$ 到 $L_m$ 中的映射时它也是同态. 设 $A$ 是系统 $L_m$ 中的重言式，则对所有同态 $v: F(S) \rightarrow L_m$ 均有 $v(A) = 1$. 特别对同态 $v: F(S) \rightarrow L_n$ 也有 $v(A) = 1$. 这表明系统 $L_m$ 中的重言式一定也是系统 $L_n$ 中的重言式，即下面的定理成立.

**定理 2.4.4**　设 $L_n$ 是 $L_m$ 的子代数，则 $L_m$ 中的重言式也是 $L_n$ 中的重言式，即

$$T(L_m) \subset T(L_n), \tag{2.4.4}$$

特别是恒有

$$T(L_k) \subset T(\boldsymbol{C}_2) \quad (k = 3, 4, \cdots). \tag{2.4.5}$$

**注 2.4.5**　如果 $L_n$ 不是 $L_m$ 的子代数，则它们的重言式之间就不必有上述关

系. 如,令

$$A = (p \to \neg p) \wedge (\neg p \to p) \to \neg p \vee p, \tag{2.4.6}$$

则 $A \in T(L_4)$. 事实上,$L_4 = \left\{0,\frac{1}{3},\frac{2}{3},1\right\}$. 如果 $|p| = 0$ 或 $|p| = 1$,则 $|\neg p \vee p| = 1$,从而 $|A| = 1$. 如果 $|p| = \frac{1}{3}$,则 $|\neg p \vee p| = \frac{2}{3}$, $|(p\to\neg p)\wedge(\neg p\to p)| = |\neg p\to p| = \frac{2}{3}$,从而仍有 $|A| = 1$. 如果 $|p| = \frac{2}{3}$,则 $|\neg p \vee p| = \frac{2}{3}$ 且 $|(p\to\neg p)\wedge(\neg p\to p)| = |p\to\neg p| = \frac{2}{3}$,仍得 $|A| = 1$. 所以 $A \in T(L_4)$,但 $A$ 不是 $L_3$ 中的重言式. 例如,令 $|p| = \frac{1}{2}$,则 $|\neg p \vee p| = \frac{1}{2}$, $|(p\to\neg p)\wedge(\neg p\to p)| = 1$,从而 $|A| = \frac{1}{2}$. 所以 $A \notin T(L_3)$.

再令

$$B = \neg p \vee [(p \to \neg p) \to (\neg p \to p)], \tag{2.4.7}$$

则 $B \in T(L_3)$ 但 $B \notin T(L_4)$. 事实上,若 $|p| = 0$,则在 $L_3$ 中 $|B| = 1$. 若 $|p| = \frac{1}{2}$,则 $|(p\to\neg p)\to(\neg p\to p)| = 1\to 1 = 1$,从而 $|B| = 1$. 若 $|p| = 1$,则 $|(p\to\neg p)\to(\neg p\to p)| = 0\to 1 = 1$. 仍有 $|B| = 1$,所以 $B \in T(L_3)$. 但在 $L_4$ 中令 $|p| = \frac{1}{3}$,则 $|(p\to\neg p)\to(\neg p\to p)| = 1\to\frac{2}{3} = \frac{2}{3}$,且 $|\neg p| = \frac{2}{3}$,所以 $|B| = \frac{2}{3}$,从而 $B \notin T(L_4)$.

### 2.4.2 标准序列逻辑系统 $S_n$

(1) $S_n$ 的结构

**标准序列逻辑系统 $S_n$** 也叫 Gaines-Rescher 系统,它的真值集或赋值格与格 $L_n$ 一致,只是其上的蕴涵运算不同了. 设 $\alpha,\beta \in S_n$,则代替(2.4.3)式,规定

$$\alpha \to \beta = \begin{cases} 1, & \alpha \leqslant \beta, \\ 0, & \alpha \nleqslant \beta. \end{cases} \tag{2.4.8}$$

(2) $S_n$ 的子代数

因为 $S_n$ 仍为线性序集,它的任一非空子集 $M$ 自然对 $\vee$ 与 $\wedge$ 运算封闭,如果 $M$ 是对称的,则 $M$ 对 $\neg$ 运算也封闭. 由(2.4.8)式看出,只要 $\{0,1\} \subset M$,$M$ 就对蕴涵运算→封闭. 所以,$S_n$ 的子代数比 $L_n$ 的子代数简单,即 $S_n$ 的任一包含 $\{0,1\}$ 的对称子集都是 $S_n$ 的子代数. 由于上述条件也是子代数所必须具备的,所以有

**定理 2.4.6** $S_n$ 的子集 $M$ 是它的子代数的充要条件如下:

i) $\{0,1\} \subset M$;

ii) 若 $\alpha \in M$,则 $\alpha' \in M$.

**例 2.4.7**　设 $S_6 = \left\{0,\frac{1}{5},\frac{2}{5},\frac{3}{5},\frac{4}{5},1\right\}$,$M = \left\{0,\frac{1}{5},\frac{4}{5},1\right\}$,则 $M$ 是 $S_6$ 的子代数. 但 $M$ 不是 $S_4 = \left\{0,\frac{1}{3},\frac{2}{3},1\right\}$. 容易看出 $M$ 与 $S_4$ 是同构的:令 $\varphi(0)=0$,$\varphi(1)=1$,$\varphi\left(\frac{1}{5}\right)=\frac{1}{3}$,$\varphi\left(\frac{4}{5}\right)=\frac{2}{3}$,则 $\varphi: M \to S_4$ 是双射且 $\varphi$ 保 $\vee$,$\wedge$,$\neg$ 与$\to$. 所以 $M$ 与 $S_4$ 同构. 如果我们把同构的代数不加区别,就可以说 $S_4$ 是 $S_6$ 的子代数. 在此意义下有如下定理.

**定理 2.4.8**　i) $S_n$ 是 $S_{n+2}$的子代数.

ii) $S_{2n}$是 $S_{2n+1}$的子代数.

(3) 不同的系统 $S_n$ 中重言式的比较

设 $S_n$ 同构于 $S_m$ 的子代数 $M$,$\varphi: S_n \to M$ 是同构映射. 设公式 $A$ 是系统 $S_m$ 中的重言式,则 $A$ 必为系统 $S_n$ 中的重言式. 事实上,设 $v: F(S) \to S_n$ 是任一 $S_n$ 赋值,则 $\varphi v: F(S) \to M \subset S_m$ 是 $S_m$ 赋值,从而由 $A$ 是 $S_m$ 重言式知 $\varphi v(A)=1$. 但 $\varphi$ 是同构,所以 $v(A)=1$,从而由 $v$ 的任意性知 $A$ 是 $S_n$ 重言式, 即把定理 2.4.8 中的 $L_n$,$L_m$ 与 $L_k$ 分别换为 $S_n$,$S_m$ 与 $S_k$(或在同构意义下)时所得的定理仍成立,也即下述定理成立.

**定理 2.4.9**　设 $S_n$ 同构于 $S_m$ 的子代数,则 $S_m$ 中的重言式也是 $S_n$ 中的重言式,即

$$T(S_m) \subset T(S_n), \tag{2.4.9}$$

特别是恒有

$$T(S_k) \subset T(\boldsymbol{C}_2) \quad (k = 3,4,\cdots). \tag{2.4.10}$$

由定理 2.4.9 与定理 2.4.8 得如下推论.

**推论 2.4.10**　i) $T(S_{n+2}) \subset T(S_n)$.

ii) $T(S_{2n+1}) \subset T(S_{2n})$.

**注 2.4.11**　i) 在讨论系统 $L_m$ 的子代数时并未涉及同构概念,这是因为 $L_m$ 的子代数自然形成一个等距离的子集,从而自然成为某标号较小的 $L_n$ 而不需要借助同构概念.

ii) 一般的 $S_n$ 与 $S_m$ 重言式不必有定理 2.4.9 中的关系. 例如,令

$$A = \neg((p \to \neg p) \wedge (\neg p \to p)), \tag{2.4.11}$$

则容易直接验证 $A \in T(S_4)$,但 $A \notin T(S_3)$. 令

$$B = \neg p \vee [(p \to \neg p) \to (\neg p \to p)], \tag{2.4.12}$$

即 $B$ 同于(2.4.7)式的 $B$,则可验证 $B \in T(S_3)$,但 $B \notin T(S_4)$.

### 2.4.3　$G_3$ 系统的推广

设赋值格仍为由 $n$ 个元组成的线性序集,0 与 1 分别是其最小元与最大元. 这 $n$ 个元均匀分布,$\alpha'$由 $\alpha \to 0$ 定义,只是→的定义为

$$\alpha \to \beta = \begin{cases} 1, & \alpha \leqslant \beta, \\ \beta, & \alpha \nleqslant \beta. \end{cases} \tag{2.4.13}$$

这实际上就是(2.3.7)式. 这样得到的系统叫 Gödel 的 $n$ 值系统,记作 $G_n$. 当 $n=3$ 时就回到了 2.3 节中的 Gödel 三值系统.

设 $M$ 是 $G_n$ 的非空子集,如果 $1 \in M$,则由(2.4.13)式知 $M$ 对→运算封闭,由此易证定理2.4.6对 $G_n$ 也成立. 进一步可知从(2.4.7)式到(2.4.10)式对于 $G_n$ 系统也都成立. 所以下面的定理成立.

**定理 2.4.12**　i) $G_n$ 是 $G_{n+2}$的子代数,从而

$$T(G_{n+2}) \subset T(G_n).$$

ii) $G_{2n}$是 $G_{2n+1}$的子代数,从而

$$T(G_{2n+1}) \subset T(G_{2n}).$$

请读者自己举例说明 $T(G_3)$与 $T(G_4)$互不包含.

### 2.4.4　$K_3$ 系统的推广

(1)$K_n$ 的结构与 $K_n$ 中的准重言式

设赋值格仍如前所述,但蕴涵算子的定义为

$$\alpha \to \beta = \alpha' \vee \beta, \tag{2.4.14}$$

则所得的系统叫 Kleene 的 $n$ 值系统,记作 $K_n$. 当 $n=3$ 时就回到了 2.3 节中的 Kleene 三值系统.

因为对任一公式 $A=f(p_1,\cdots,p_k)$,由(2.4.14)式,当给每个 $p_i$ 均赋以异于 0 和 1 的值时 $A$ 的赋值就不为 1,所以在 $K_n$ 中是没有重言式的,当然也就没有矛盾式. 那么我们转而考虑那些对任何赋值 $v$ 恒有 $v(A)\neq 0$ 的公式 $A$ 并称其为**准重言式**.

设 $K_n$ 是 $K_m$ 的子代数. 如果对每个 $K_m$ 赋值 $v:F(S)\to K_m$ 恒有 $v(A)\neq 0$,那么对每个 $K_n$ 赋值 $v:F(S)\to K_n$(它也是 $K_m$ 赋值)也恒有 $v(A)\neq 0$,即 $K_m$ 准重言式必为 $K_n$ 准重言式. 易证下面的定理.

**定理 2.4.13**　i) $K_n$ 是 $K_{n+2}$的子代数,从而

$$QT(K_{n+2}) \subset QT(K_n).$$

ii) $K_{2n}$是 $K_{2n+1}$的子代数,从而

$$QT(K_{2n+1}) \subset QT(K_{2n}).$$

(2) $\alpha$-重言式

准重言式是个很粗糙的概念. 以赋值格含 11 个元

$$\left\{0,\frac{1}{10},\frac{1}{5},\frac{3}{10},\frac{2}{5},\frac{1}{2},\frac{3}{5},\frac{7}{10},\frac{4}{5},\frac{9}{10},1\right\} \tag{2.4.15}$$

为例. 如果对每个赋值 $v$ 恒有 $v(A)\geqslant\frac{1}{10}$,则 $A$ 是准重言式. 而如果对每个赋值 $v$ 均有 $v(A)\geqslant\frac{4}{5}$ 或均有 $v(A)\geqslant\frac{9}{10}$ 等,则 $A$ 也是准重言式. 可见,准重言式是应当再细分的,如可将恒有 $v(A)\geqslant\frac{1}{10}$ 的公式 $A$ 叫 $\frac{1}{10}$-重言式,而将恒满足 $v(A)\geqslant\frac{9}{10}$ 的公式 $A$ 叫 $\frac{9}{10}$-重言式等.

**定义 2.4.14**　设 $A\in F(S)$,$L$ 是某线性序的 $n$ 值系统,$\alpha\in L$. 如果对每个赋值 $v:F(S)\to L$ 恒有 $v(A)\geqslant\alpha$,则称 $A$ 为 **$\alpha$-重言式**.

易见 1-重言式就是重言式. 每个公式都是 0-重言式,所以 0-重言式是没有用处的,今后经常假定 $\alpha$-重言式中的 $\alpha$ 是大于零的.

(3) 在系统 $K_n$ 中前缀 $\alpha$ 的不灵敏性

我们既然引入了 $\alpha$-重言式概念,自然是要把 $F(S)$ 中的公式按其"真度"进行区分. 例如,对于(2.4.15)式中的值而言,设对任何赋值 $v$ 均有 $v(A)\geqslant\frac{1}{10}$,而 $v(B)\geqslant\frac{7}{10}$,我们就认为 $B$ 的"真度"高于 $A$. 我们希望 $\alpha$-重言式的概念关于其前缀 $\alpha$ 是灵敏的,即不同的前缀可以区分不同的重言式. 确切地说,$\alpha$ 较小时 $\alpha$-重言式类应较大. 但对系统 $K_n$ 而言,$\alpha$ 是不灵敏的. 先看 $K$ 的下标为奇数的情形,考虑 $K_{2n+1}$,这时 $\frac{1}{2}\in K_{2n+1}$. 作映射 $\varphi:K_{2n+1}\to K_3$ 如下:

$$\varphi(\alpha)=\begin{cases}1, & \alpha>\frac{1}{2},\\ \frac{1}{2}, & \alpha=\frac{1}{2},\\ 0, & \alpha<\frac{1}{2},\end{cases}\quad \alpha\in K_{2n+1}. \tag{2.4.16}$$

由于 $\varphi$ 保序,当然也保 $\vee$. 容易验证 $\varphi$ 也保 $'$,即

$$\varphi(\alpha')=(\varphi(\alpha))', \tag{2.4.17}$$

那么由 $\alpha\to\beta=\alpha'\vee\beta$ 知 $\varphi$ 也保 $\to$. 所以 $\varphi$ 为同态.

**注 2.4.15** 设 $A=f(p_1,\cdots,p_t)\in F(S)$. 以 $\bar{f}$ 表示某多值系统 $M$ 与 $f$ 相应的运算,即 $\bar{f}(x_1,\cdots,x_t)$ 通过 $\vee$,$'$ 与 $\to$ 作用于 $M$ 中的变量 $x_1,\cdots,x_t$ 的方式正如 $f$ 通过 $\vee$,$\neg$ 与 $\to$ 作用于 $F(S)$ 中的原子公式 $p_1,\cdots,p_t$ 的方式. 例如,当 $A=p_1\vee p_2\to\neg p_3$ 时,$\bar{f}(x_1,x_2,x_3)=x_1\vee x_2\to x_3'$. 因此,对任一赋值 $v$,由 $v$ 为同态得

$$v(A)=v(f(p_1,\cdots,p_n))=\bar{f}(v(p_1),\cdots,v(p_n)). \tag{2.4.18}$$

今后将经常用到(2.4.18)式.

**定理 2.4.16** 系统 $K_{2n+1}$ 中只有一种 $\alpha$-重言式,即 $\frac{1}{2}$-重言式.

**证** 设 $A=f(p_1,\cdots,p_t)\in F(S)$. 当给各 $p_i(1\leqslant i\leqslant t)$ 都赋以 $\frac{1}{2}$ 值时则 $A$ 的赋值为 $\frac{1}{2}$. 可见,当 $\alpha>\frac{1}{2}$ 时 $\alpha$-重言式是不存在的. 今设 $0<\alpha\leqslant\frac{1}{2}$. $A$ 是 $\alpha$-重言式,则对任一 $K_{2n+1}$ 赋值 $v$ 恒有 $v(A)\geqslant\alpha$. 特别地,对只取 $0,\frac{1}{2}$ 与 1 三个值的 $K_{2n+1}$ 赋值 $u$ 而言,$u(A)\geqslant\alpha$ 恒成立. 这时 $u$ 也可看作是 $K_3$ 赋值. 由于由(2.4.16)式定义的 $\varphi$ 是同态,对任一 $K_{2n+1}$ 赋值 $v$,$\varphi v:F(S)\to K_3$ 也是同态,由(2.4.18)式得

$$\varphi v(A)=\bar{f}(\varphi v(p_1),\cdots,\varphi v(p_t)). \tag{2.4.19}$$

由 $A$ 为 $\alpha$-重言式及 $\alpha>0$ 知当给 $\bar{f}(x_1,\cdots,x_t)$ 中各变量赋以 $K_{2n+1}$ 中,特别是赋以 $K_3$ 中任何值时 $\bar{f}(x_1,\cdots,x_t)$ 的值均不为零,所以由(2.4.19)式知 $\varphi v(A)$ 的值不为零. 但由 $\varphi v(p_i)\in K_3(1\leqslant i\leqslant t)$ 知 $\varphi v(A)\in K_3$,所以 $\varphi v(A)\geqslant\frac{1}{2}$,从而由(2.4.16)知 $v(A)\geqslant\frac{1}{2}$. 这就证明了 $A$ 是 $\frac{1}{2}$-重言式.

现在考虑系统 $K_{2n}$ 中的 $\alpha$-重言式. 这时 $\frac{1}{2}\notin K_{2n}$. 定义 $\varphi:K_{2n}\to \boldsymbol{C}_2$ 为

$$\varphi(\alpha)=\begin{cases}1, & \alpha>\frac{1}{2},\\ 0, & \alpha<\frac{1}{2},\end{cases}\qquad \alpha\in K_{2n}. \tag{2.4.20}$$

易证 $\varphi$ 为同态,用与上面类似的方法可证:

**定理 2.4.17** 系统 $K_{2n}$ 中只有一种 $\alpha$-重言式,即 $\frac{n}{2n-1}$-重言式.

注意,$\frac{n}{2n-1}$ 是 $K_{2n}$ 中第一个大于 $\frac{1}{2}$ 的数. 例如,关于系统 $K_4=\left\{0,\frac{1}{3},\frac{2}{3},1\right\}$ 而言,只有 $\frac{2}{3}$-重言式. 关于系统 $K_8=\left\{0,\frac{1}{7},\frac{2}{7},\frac{3}{7},\frac{4}{7},\frac{5}{7},\frac{6}{7},1\right\}$ 而言,只有 $\frac{4}{7}$-重言

式,等等.

## 2.5　$\Sigma$-($\alpha$-重言式)理论

### 2.5.1　多值系统 $W_n$、$\overline{W}$与 $W$

(1) 系统 $W_n$

我们在 2.2 节中曾引入过蕴涵算子 $R_0$,

$$R_0(a,b) = \begin{cases} 1, & a \leqslant b, \\ a' \vee b, & a \nleqslant b. \end{cases} \tag{2.5.1}$$

以后将看到 $R_0$ 较其他算子具有更多的好的性质. 与(2.4.14)式相比,我们在 $a \leqslant b$ 时把 $a' \vee b$ 修改成了 1,所以 $R_0$ 算子也可叫做**修正的 Kleene 算子**. 带有这种蕴涵算子的 $n$ 值线性序系统记作 $W_n$.

在前面已经看到,关于系统 $K_n$ 而言,$\alpha$-重言式中的前缀 $\alpha$ 是不灵敏的,只要 $\alpha \neq 0$,无论 $\alpha$ 在一定范围内怎样变化,$\alpha$-重言式都是同一类公式. 这种情况在修正的 Kleene 系统 $W_n$ 中有所改善,以下将看到在系统 $W_n$ 中可以有多种不同的$\alpha$-重言式(见文献[8]).

(2) 系统 $\overline{W}$ 与 $W$ 中的广义重言式

由于我们的讨论当把 $W_n$ 扩大为连续值集[0,1]或可数值集 $\boldsymbol{Q} \cap [0,1]$($\boldsymbol{Q}$ 表示全体有理数之集)时反而更简单一些,所以我们的讨论将在无穷值系统中进行.

**定义 2.5.1**　在[0,1]中规定

$$\neg \alpha = 1 - \alpha,$$

$$\alpha \vee \beta = \max\{\alpha, \beta\},$$

$$\alpha \to \beta = \begin{cases} 1, & \alpha \leqslant \beta, \\ \neg \alpha \vee \beta, & \alpha \nleqslant \beta. \end{cases}$$

则[0,1]成为一($\neg$, $\vee$, $\to$)型代数,记为 $\overline{W}$.

当把[0,1]换为 $\boldsymbol{Q} \cap [0,1]$时,称相应的系统为 $W$.

今后在 $\overline{W}$ 或 $W$ 中,常用$\alpha'$表示$\neg \alpha$. 用 $\overline{\Omega}$ 记全体赋值 $v: F(S) \to \overline{W}$的集,以 $\Omega$ 记全体赋值 $v: F(S) \to W$ 的集,这时(2.4.18)式仍然有效. $\overline{\Omega}$ 与 $\Omega$ 都叫做关于 $F(S)$的语义.

**定义 2.5.2**　设 $A \in F(S)$, $0 < \alpha \leqslant 1$. 若对每个 $v \in \overline{\Omega}$ 恒有$v(A) \geqslant \alpha$($v(A) > \alpha$),则称 $A$ 为 $\alpha$-重言式($\alpha^+$-重言式),其全体记作 $\alpha$-$T(\overline{W})$($\alpha^+$-$T(\overline{W})$). 以上各种重言式通称为**广义重言式**.

对系统 $W$ 而言 $\alpha$-$T(W)$与 $\alpha^+$-$T(W)$有相应的意义.

(3)广义重言式的分类

**定理 2.5.3** 设 $A\in F(S)$, $0<\alpha\leqslant\frac{1}{2}$, 则 $A$ 是 $\overline{W}$ 中的 $\alpha$-重言式当且仅当 $A$ 是 $\overline{W}$ 中的 $\frac{1}{2}$-重言式,即

$$\alpha-T(\overline{W})=\frac{1}{2}-T(\overline{W}),\quad 0<\alpha\leqslant\frac{1}{2}. \tag{2.5.2}$$

**证** 若 $A\in\frac{1}{2}-T(\overline{W})$,则显然 $A\in\alpha-T(\overline{W})$. 反之,设 $W_3=\left\{0,\frac{1}{2},1\right\}$. 作映射 $\varphi:\overline{W}\to W_3$ 如(2.4.16)式所示,但 $\alpha\in\overline{W}$. 易证 $\varphi$ 保 $\vee$ 与 $\neg$,以下证 $\varphi$ 保蕴涵运算 $\to$.

设 $\alpha\leqslant\beta$,则由 $\varphi$ 保序知 $\varphi(\alpha)\leqslant\varphi(\beta)$. 这时

$$\varphi(\alpha\to\beta)=\varphi(1)=\varphi(\alpha)\to\varphi(\beta).$$

若 $\alpha>\beta$,则

$$\varphi(\alpha\to\beta)=\varphi(\neg\alpha\vee\beta)=\neg\varphi(\alpha)\vee\varphi(\beta). \tag{2.5.3}$$

这时若 $\varphi(\alpha)>\varphi(\beta)$,则由(2.5.3)式得

$$\varphi(\alpha\to\beta)=\varphi(\alpha)\to\varphi(\beta).$$

若 $\varphi(\alpha)=\varphi(\beta)$,则 $\varphi(\alpha)\to\varphi(\beta)=1$. 由 $\alpha>\beta$ 知,这时不可能有 $\varphi(\alpha)=\varphi(\beta)=\frac{1}{2}$.

i) 若 $\varphi(\alpha)=\varphi(\beta)=1$,则由(2.5.3)式得 $\varphi(\alpha\to\beta)=\neg\varphi(\alpha)\vee\varphi(\beta)=0\vee1=1$.

ii) 若 $\varphi(\alpha)=\varphi(\beta)=0$,则由(2.5.3)式仍有 $\varphi(\alpha\to\beta)=\neg\varphi(\alpha)\vee\varphi(\beta)=1\vee0=1$.

总之,$\varphi(\alpha\to\beta)=\varphi(\alpha)\to\varphi(\beta)$ 成立,所以 $\varphi$ 为($\neg$,$\vee$,$\to$)型同态.

设 $A=f(p_1,\cdots,p_t)\in\alpha-T(\overline{W})$,则对每个 $v\in\overline{\Omega}$, $v(A)\neq0$,从而对每个 $W_3$ 赋值 $u$ 也有 $u(A)\neq0$. 注意: $\varphi v(p_i)\in W_3(i=1,\cdots,t)$. 由 $\varphi$ 为同态知

$$\begin{aligned}\varphi(v(A))&=\varphi(\bar{f}(v(p_1),\cdots,v(p_t)))\\&=\bar{f}(\varphi v(p_1),\cdots,\varphi v(p_t))\neq0.\end{aligned}$$

故 $\varphi(v(A))=\frac{1}{2}$ 或 1. 那么由(2.4.16)式知 $v(A)\geqslant\frac{1}{2}$,故 $A\in\frac{1}{2}-T(\overline{W})$. 这就证明了(2.5.2)式.

**定理 2.5.4** 设 $A\in F(S)$, $\frac{1}{2}<\alpha\leqslant1$,则 $A$ 是 $\overline{W}$ 中的 $\alpha$-重言式当且仅当 $A$ 是 $\overline{W}$ 中的重言式,即

$$\alpha-T(\overline{W})=T(\overline{W})\left(\frac{1}{2}<\alpha\leqslant1\right). \tag{2.5.4}$$

**证** 显然 $T(\overline{W})\subset\alpha-T(\overline{W})$. 反之,不妨设 $\alpha\neq1$,即 $\frac{1}{2}<\alpha<1$. 令 $V_\alpha=[1-\alpha,$

$\alpha]$. 在 $V_\alpha$ 中运算 $\neg$ 与 $\vee$ 同 $\overline{W}$, 但规定

$$\beta \to \gamma = \begin{cases} \alpha, & \beta \leqslant \gamma, \\ \neg\beta \vee \gamma, & \beta \nleqslant \gamma. \end{cases}$$

则 $V_\alpha$ 是 $(\neg, \vee, \to)$ 型代数. 令 $E_\alpha = \{0\} \cup (1-\alpha, \alpha) \cup \{1\}$. 在 $E_\alpha$ 中规定运算 $\neg$, $\vee$ 与 $\to$ 同 $\overline{W}$, 则 $E_\alpha$ 也是 $(\neg, \vee, \to)$ 型代数. 易证 $E_\alpha$ 是 $\overline{W}$ 的子代数. 定义映射 $g: \overline{W} \to V_\alpha$ 和 $h: V_\alpha \to E_\alpha$ 如下:

$$g(\beta) = (2\alpha - 1)\beta + (1 - \alpha) \qquad (0 \leqslant \beta \leqslant 1),$$

$$h(\gamma) = \begin{cases} \gamma, & \gamma \in (1-\alpha, \alpha), \\ 1, & \gamma = \alpha, \\ 0, & \gamma = 1 - \alpha. \end{cases}$$

显然, $g$ 与 $h$ 都是保序的双射. 可以证明 $g$ 与 $h$ 都是同构. 事实上, 以 $g$ 为例. $g$ 显然保 $\vee$. 又

$$\begin{aligned} g(\neg\beta) &= (2\alpha - 1)(1 - \beta) + (1 - \alpha) = \alpha - (2\alpha - 1)\beta \\ &= 1 - [(2\alpha - 1)\beta + (1 - \alpha)] = \neg g(\beta), \end{aligned}$$

即 $g$ 保 $\neg$. 最后, 设 $\beta \leqslant \gamma$, 则 $g(\beta) \leqslant g(\gamma)$. 这时

$$g(\beta \to \gamma) = g(1) = \alpha = g(\beta) \to g(\gamma).$$

设 $\beta > \gamma$, 则由 $g$ 为保序双射知 $g(\beta) > g(\gamma)$, 故由 $g$ 保 $\neg$ 与 $\vee$ 得

$$\begin{aligned} g(\beta \to \gamma) &= g(\neg\beta \vee \gamma) \\ &= \neg g(\beta) \vee g(\gamma) = g(\beta) \to g(\gamma). \end{aligned}$$

这就证明了 $g$ 为同构. 类似可证 $h$ 也是同构.

设 $A = f(p_1, \cdots, p_t) \in \alpha - T(\overline{W})$, $v \in \overline{\Omega}$, 则 $v(A) \geqslant \alpha$. 特别地, 对任一 $E_\alpha$ 赋值 $u$, $u(A) \geqslant \alpha$. 由 $E_\alpha$ 为 $\overline{W}$ 的子代数知这时 $u(A) \in E_\alpha$, 从而只能 $u(A) = 1$. 由 $g$ 与 $h$ 为同构知 $h \circ g: \overline{W} \to E_\alpha$ 为同构. 这时由 $h \circ g(v(p_i)) \in E_\alpha (i = 1, \cdots, t)$ 知

$$h \circ g(v(A)) = \bar{f}(h \circ g(v(p_1)), \cdots, h \circ g(v(p_t))) = 1.$$

那么由 $h \circ g$ 为同构得 $v(A) = (h \circ g)^{-1}(1) = 1$. 这就证明了 (2.5.4) 式.

**定理 2.5.5**　关于 $\overline{W}$ 而言, $F(S)$ 中只有三种不同的广义重言式, 即 $\frac{1}{2}$-重言式, $\left(\frac{1}{2}\right)^+$-重言式与重言式.

**证**　设 $0 < \alpha \leqslant \frac{1}{2}$, 则由定理 2.5.3 知 $\alpha$-重言式就是 $\frac{1}{2}$-重言式. 设 $\frac{1}{2} < \alpha \leqslant 1$, 则由定理 2.5.4 知 $\alpha$-重言式就是重言式. 可见, $\alpha$-重言式只有以上两种.

其次, 设 $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, 取 $\beta$ 使 $\alpha < \beta < \frac{1}{2}$, 则由定理 2.5.3 得

$$\frac{1}{2} - T(\overline{W}) \subset \beta - T(\overline{W}) \subset \alpha^+ - T(\overline{W}) \subset \alpha - T(\overline{W}) = \frac{1}{2} - T(\overline{W}).$$

故 $\alpha^+$-重言式即$\frac{1}{2}$-重言式.

设$\frac{1}{2}<\alpha<1$. 取$\beta$使$\alpha<\beta<1$,则由定理2.5.4得

$$T(\overline{W}) \subset \beta - T(\overline{W}) \subset \alpha^+ - T(\overline{W}) \subset \alpha - T(\overline{W}) = T(\overline{W}).$$

故 $\alpha^+$-重言式即重言式.

至此已证广义重言式只能是$\frac{1}{2}$-重言式、重言式和$\left(\frac{1}{2}\right)^+$-重言式. 这是三个不同的广义重言式类. 事实上,令 $A=\neg p \vee p$,则易证 $A\in\frac{1}{2}-T(\overline{W})$. 由于当$v(p)=\frac{1}{2}$时$v(A)=\frac{1}{2}$,故$A\notin\left(\frac{1}{2}\right)^+$-$T(\overline{W})$. 令 $B=(q\to\neg p\vee p)\vee q$,则当$v(q)\leqslant v(\neg p\vee p)$时,$v(B)=1>\frac{1}{2}$. 当 $v(q)>v(\neg p\vee p)$时,$v(B)\geqslant v(q)>\frac{1}{2}$. 故 $B\in\left(\frac{1}{2}\right)^+$-$T(\overline{W})$. 由于当 $v(p)=\frac{1}{2}$,$v(q)=\frac{2}{3}$时 $v(B)=\frac{2}{3}$,故 $B\notin T(\overline{W})$. 最后,令 $C=p\to p$,则 $C\in T(\overline{W})$. 可见,$\frac{1}{2}$-重言式类、$\left(\frac{1}{2}\right)^+$-重言式类与重言式类是三个不同的广义重言式类.

与以上推理完全类似,可以证明如下定理.

**定理 2.5.6** 关于 $W$ 而言,$F(S)$中只有三种不同的广义重言式,即$\frac{1}{2}$-重言式、$\left(\frac{1}{2}\right)^+$-重言式与重言式.

由定理2.5.5与定理2.5.6可见,如果用一切可能的由映射 $v_0:S\to\overline{W}$ 或 $v_0:S\to W$ 生成的赋值来描述广义重言式的话,那么表面上可取无限多不同值的前缀 $\alpha$ 实际上只给出三类不同的广义重言式. 这对于需要区分具有各种不同层次的真度的公式而言是不合用的. 因此,我们转而考虑语义 $\overline{\Omega}$ 或 $\Omega$ 的某子集 $\Sigma$,用 $\Sigma$ 表示某些特定的赋值的集,研究由语义 $\Sigma$ 中的赋值所界定的所谓 $\Sigma$-( $\alpha$ -重言式)与 $\Sigma$-( $\alpha^+$-重言式)理论(见文献[8]).

### 2.5.2 系统$\overline{W}$中的 $\Sigma$-广义重言式理论与类类互异定理

(1) 系统 $W_n$ 与部分赋值

在应用上经常用离散情形作为连续情形的近似. 例如,出于某种需要可以用[0,1]中一切分母为1000的分数之集去代替[0,1],即只需考虑[0,1]中小数点后最多有3位的小数. 如果精度不够,还可考虑4位小数或5位小数的全体等. 这样作实际上是用 $\overline{W}$ 的某种有限子集 $W_n$ 去取代 $\overline{W}$. 这时命题变元集 $S$ 上的一切映射

$v_0:S\to W_n$ 确定的赋值的集 $\Sigma$ 是全部可能的 $\overline{W}$ 赋值的集 $\overline{\Omega}$ 的一个真子集. 当限制赋值 $v$ 取自 $\Sigma$ 时,可引入相对于 $\Sigma$ 的 $\Sigma$-广义重言式如下:

**定义 2.5.7**　设 $\Sigma\subset\overline{\Omega},\alpha\in[0,1],A\in F(S)$. 如果对一切 $v\in\Sigma$ 恒有 $v(A)\geqslant\alpha$,则称 $A$ 为 **$\Sigma$-($\alpha$-重言式)**. 如果对一切 $v\in\Sigma$ 恒有 $v(A)>\alpha$,则称 $A$ 为 **$\Sigma$-($\alpha^+$-重言式)**. 特别地,当 $\Sigma$ 是由一切映射 $v_0:S\to W_n$ 生成的赋值组成的集时, $\Sigma$-($\alpha$-重言式)($\Sigma$-($\alpha^+$-重言式))也称为**系统 $W_n$ 中的 $\alpha$-重言式($\alpha^+$-重言式)**,这里 $W_n$ 是含有 $n$ 个元的 $\overline{W}$ 的子代数.

(2) $W_n$ 的对称表示法

赋值集之间的同构变换是不改变广义重言式的. 选取方便的赋值集往往可使叙述与证明得到简化. 例如,$[0,1]$与$[-1,1]$作为$(\neg,\vee,\to)$型代数是同构的,这时在前者中$\neg\alpha=1-\alpha$,而在后者中$\neg\alpha$ 定义为 $-\alpha$. 后者的这种形式上的对称性在使用上更加方便,所以以下对有限赋值集也采用对称形式.

**定义 2.5.8**　设 $n$ 为自然数,令

$$W_{2n}=\{F=-n,1-n,\cdots,-1,1,\cdots,n-1,n=T\},$$
$$W_{2n+1}=\{F=-n,1-n,\cdots,-1,0,1,\cdots,n-1,n=T\}.$$

规定当 $\alpha,\beta\in W_{2n}$或 $W_{2n+1}$时$\neg\alpha=-\alpha,\alpha\vee\beta=\max\{\alpha,\beta\}$,

$$\alpha\to\beta=\begin{cases}T, & \alpha\leqslant\beta,\\ \neg\alpha\vee\beta, & \alpha\nleqslant\beta.\end{cases}$$

则 $W_{2n}$与 $W_{2n+1}$都是$(\neg,\vee,\to)$型代数,并称为**修正的有限 Kleene 系统**,或直接称为**系统 $W_{2n}$或 $W_{2n+1}$**.

易证 $W_2$ 同构于 $C_2$, $W_3$ 同构于 $L_3$.

**定义 2.5.9**　定义映射 $\varphi_1:W_{2n}\to W_2$ 与 $\varphi_2:W_{2n+1}\to W_3$ 如下:

$$\varphi_1(\alpha)=\begin{cases}T, & \alpha>0,\\ F, & \alpha<0;\end{cases}\qquad(2.5.5)$$

$$\varphi_2(\alpha)=\begin{cases}T, & \alpha>0,\\ 0, & \alpha=0,\\ F, & \alpha<0.\end{cases}\qquad(2.5.6)$$

称 $\varphi_1$ 与 $\varphi_2$ 为标准映射. 在无需区分 $2n$ 与 $2n+1$ 时,$\varphi_1$ 与 $\varphi_2$ 也统一记为 $\varphi$.

与(2.4.16)式及(2.4.20)式为同态一样,我们有如下命题.

**命题 2.5.10**　映射 $\varphi$ 是$(\neg,\vee,\to)$型同态,叫标准同态.

(3) $W_{2n}$与 $W_{2n+1}$ 中的 $\alpha$-重言式

**定理 2.5.11**　设 $A\in F(S)$,则 $A$ 是关于 $W_{2n}$的 1-重言式当且仅当 $A$ 是关于 $C_2$ 的重言式,即

$$1-T(W_{2n})=T(C_2)\qquad(n=1,2,\cdots).\qquad(2.5.7)$$

注意，当 $n\neq1$ 时 1 不是 $T$.

**证** 设 $A\in 1-T(W_{2n})$，则对任一 $W_{2n}$赋值 $v$ 恒有 $v(A)\geqslant1$. 特别地，对任一 $\boldsymbol{C}_2$ 赋值 $u$ 恒有 $u(A)\geqslant1$. 因为 $\boldsymbol{C}_2$ 是 $W_{2n}$的子代数(这里取 $\boldsymbol{C}_2$ 为其同态象 $\{-n,n\}$)，$u(A)\in C_2$，故 $u(A)=T$，即 $A\in T(\boldsymbol{C}_2)$. 反之，设 $A=f(p_1,\cdots,p_t)$，$\varphi v(p_i)\in\{F,T\}$ $(1\leqslant i\leqslant t)$. 所以若 $A\in T(\boldsymbol{C}_2)$，则

$$\begin{aligned}\varphi(v(A)) &= \varphi(\bar{f}(v(p_1),\cdots,v(p_t)))\\ &= \bar{f}(\varphi v(p_1),\cdots,\varphi v(p_t)) = T.\end{aligned}$$

从而由(2.5.5)式知 $v(A)\in\varphi^{-1}(T)$，那么 $v(A)>0$，即 $v(A)\geqslant1$，所以 $A\in1-T(W_{2n})$.

与以上证明类似并注意 $W_3$ 与 $L_3$ 同构可得如下定理.

**定理 2.5.12** 设 $A\in F(S)$，则 $A$ 是关于 $W_{2n+1}$的 1-重言式当且仅当 $A$ 是关于 $L_3$ 的重言式，即

$$1-T(W_{2n+1}) = T(L_3) \quad (n=1,2,\cdots). \tag{2.5.8}$$

与证明定理 2.5.3 的方法类似可以证明下面的两个定理.

**定理 2.5.13** 设 $A\in F(S)$，$-n<\alpha\leqslant1$，则 $A$ 是关于 $W_{2n}$的 $\alpha$-重言式当且仅当 $A$ 是关于 $W_{2n}$的 1-重言式，从而由定理 2.5.11，$A$ 也是经典重言式，即

$$\begin{aligned}\alpha-T(W_{2n}) &= 1-T(W_{2n})\\ &= T(\boldsymbol{C}_2) \quad (-n<\alpha\leqslant1;\ n=1,2,\cdots).\end{aligned} \tag{2.5.9}$$

**定理 2.5.14** 设 $A\in F(S)$，$-n<\alpha\leqslant0$，则 $A$ 是关于 $W_{2n+1}$的 $\alpha$-重言式当且仅当 $A$ 是关于 $W_{2n+1}$的 0-重言式，即

$$\alpha-T(W_{2n+1}) = 0-T(W_{2n+1}) \quad (-n<\alpha\leqslant0;\ n=1,2,\cdots). \tag{2.5.10}$$

以上两个定理表明，当 $\alpha$ 在 $-n$ 与 1(或 0)之间变化时，带前缀 $\alpha$ 的广义重言式类不变，是同一经典重言式类或同一 0-重言式类. 但当 $\alpha$ 取 0 以上的各值时情况完全不同，这时的广义重言式是类类互异的. 我们需要先引入一个概念.

(4) 可达 $\alpha$-重言式

**定义 2.5.15** 设 $A\in F(S)$，$-n<\alpha\leqslant n$. 如果 $A\in\alpha-T(W_{2n})$ $(A\in\alpha-T(W_{2n+1}))$且有 $W_{2n}(W_{2n+1})$赋值 $v$ 使 $v(A)=\alpha$，则称 $A$ 为**可达 $\boldsymbol{\alpha}$-重言式**，其全体记作

$$[\alpha]-T(W_{2n})([\alpha]-T(W_{2n+1})).$$

下面的命题是显然的.

**命题 2.5.16** 公式 $A$ 是可达 $\alpha$-重言式当且仅当 $A$ 是 $\alpha$-重言式但 $A$ 不是$(\alpha+1)$-重言式，即

$$\begin{aligned}&[\alpha]-T(W_{2n}) = (\alpha-T(W_{2n}))-((\alpha+1)-T(W_{2n})),\\ &[\alpha]-T(W_{2n+1}) = (\alpha-T(W_{2n+1}))-((\alpha+1)-T(W_{2n+1}))\\ &\qquad(-n<\alpha<n,\quad n=1,2,\cdots).\end{aligned} \tag{2.5.11}$$

由此命题以及上面的两个定理得如下推论.

**推论 2.5.17** i) 当 $-n<\alpha<1$ 时, $[\alpha]-T(W_{2n})=\varnothing$.

ii) 当 $-n<\alpha<0$ 时, $[\alpha]-T(W_{2n+1})=\varnothing$.

iii) 当 $\alpha\neq\beta$ 时,可达 $\alpha$-重言式类与可达 $\beta$-重言式类不相交.

(5) 类类互异定理与升级算法

**定理 2.5.18** (类类互异定理) 设 $0\leqslant\alpha\leqslant n,0\leqslant\beta\leqslant n,\alpha\neq\beta$,则

$$\alpha-T(W_{2n})\neq\beta-T(W_{2n}),$$

$$\alpha-T(W_{2n+1})\neq\beta-T(W_{2n+1}).$$

**证** 以 $W_{2n}$ 为例进行证明. 这时由 $0\notin W_{2n}$ 知 $1\leqslant\alpha\leqslant n$. 只需证明当 $1\leqslant\alpha\leqslant n$ 时可达 $\alpha$-重言式是**类类不空**的.

i) 令 $A=\neg p\vee p$,这里 $p\in S$,则易证 $A\in 1-T(W_{2n})$. 令 $v(p)=1$ 便得 $v(\neg p)=-1$,从而 $v(A)=1$. 故 $A$ 是可达 1-重言式,即 $[1]-T(W_{2n})\neq\varnothing$.

ii) 设已证 $[k]-T(W_{2n})\neq\varnothing,1\leqslant k<n$. 任取可达 $k$-重言式 $A$. 设 $A=f(p_1,\cdots,p_t)$,则存在 $p_1,\cdots,p_t$ 的一组赋值 $\delta_1,\cdots,\delta_t$,对 $F(S)$ 的任一 $W_{2n}$ 赋值 $v$,只要 $v(p_i)=\delta_i(i=1,\cdots,t)$,就有 $v(A)=k$. 因为 $S$ 是无限集,可取原子公式 $q\in S$ 使 $q\neq p_i(i=1,\cdots,t)$. 令

$$B=(q\to A)\vee q, \tag{2.5.12}$$

则对任一 $W_{2n}$ 赋值 $v$,若 $v(q)\leqslant v(A)$,则 $v(B)=T=n\geqslant k+1$. 若 $v(q)>v(A)$,则 $v(q)\geqslant k+1$,从而 $v(B)\geqslant k+1$. 总之 $B\in(k+1)-T(W_{2n})$. 作映射 $u_0:S\to W_{2n}$ 使 $u_0(p_i)=\delta_i(i=1,\cdots,t),u_0(q)=k+1$. 以 $u$ 记由 $u_0$ 生成的赋值,则 $u(A)=k,u(q)=k+1$,从而

$$\begin{aligned}u(B)&=u(q\to A)\vee u(q)=(u(q)\to u(A))\vee u(q)\\&=-u(q)\vee u(A)\vee u(q)=k+1,\end{aligned}$$

故 $B\in[k+1]-T(W_{2n})\neq\varnothing$. 这就证明了可达 $\alpha$-重言式当 $\alpha\geqslant1$ 时类类不空. 从而 $\alpha$-重言式当 $\alpha\geqslant1$ 时是类类互异的.

**注 2.5.19** 由(2.5.12)式给出的从 $A$ 到 $B$ 的算法是很有用的,我们称其为**升级算法**,因为这种算法作用于可达 $\alpha$-重言式 $A$ 就得到可达 $(\alpha+1)$-重言式 $B$. 如果要升两级,可再选原子命题 $r$ 使 $r$ 不同于 $p_1,\cdots,p_t$ 以及 $q$. 令

$$C=(r\to((q\to A)\vee q))\vee r,$$

则 $C$ 是可达 $(\alpha+2)$-重言式. 重复使用升级算法可得出真值越来越高的可达重言式,甚至得出重言式.

### 2.5.3 有限值系统中广义重言式的重言式表示定理

在前面曾论述了在多值逻辑系统中引入广义重言式的必要性. 然而, $\alpha$-重言式毕竟不同于真正的重言式,特别是当 $\alpha$ 取比较低的真值时,如当 $\alpha$ 取刚刚过半

的真值时,由类类互异定理可见 α-重言式与重言式相去甚远,中间还隔了许多不同的类. 然而, 在本节中我们将证明关于一种有限值逻辑系统而言的广义重言式必可升级为关于另一有限值逻辑系统而言的重言式. 我们需要一个引理.

**引理 2.5.20** 设 $1\leqslant k\leqslant n$,令 $\varphi_1:W_{2n}\to W_{2k}$ 与 $\varphi_2:W_{2n+1}\to W_{2k+1}$ 如下:

$$\varphi_i(\alpha)=\begin{cases}\alpha, & |\alpha|<k,\\ k, & \alpha\geqslant k,\\ -k, & \alpha\leqslant -k,\end{cases}\qquad (i=1,2). \tag{2.5.13}$$

则 $\varphi_i(i=1,2)$ 为同态映射.

**证** 以 $\varphi=\varphi_2$ 为例. 由于 $\varphi$ 保序,所以 $\varphi$ 保运算 $\vee$. 由 $\varphi$ 的定义以及运算 $\neg$ 的定义的对称性知 $\varphi$ 保运算 $\neg$. 以下只需证 $\varphi$ 保蕴涵运算 $\to$,即

$$\varphi(\alpha\to\beta)=\varphi(\alpha)\to\varphi(\beta). \tag{2.5.14}$$

设 $\alpha\leqslant\beta$,则 $\varphi(\alpha)\leqslant\varphi(\beta)$. 这时在 $W_{2n+1}$ 中有 $\alpha\to\beta=n$,从而由(2.5.13)式知 $\varphi(\alpha\to\beta)=\varphi(n)=k$. 在 $W_{2k+1}$ 中 $\varphi(\alpha)\to\varphi(\beta)=k$,故(2.5.14)式成立. 设 $\alpha>\beta$,则在 $W_{2n+1}$ 中 $\alpha\to\beta=\neg\alpha\vee\beta$. 由于已证 $\varphi$ 保 $\neg$ 与 $\vee$,故

$$\varphi(\alpha\to\beta)=\varphi(\neg\alpha\vee\beta)=\neg\varphi(\alpha)\vee\varphi(\beta).$$

这时由 $\varphi$ 保序知 $\varphi(\alpha)\geqslant\varphi(\beta)$. 若 $\varphi(\alpha)>\varphi(\beta)$,则 $\varphi(\alpha)\to\varphi(\beta)=\neg\varphi(\alpha)\vee\varphi(\beta)$,从而(2.5.14)式成立. 设 $\varphi(\alpha)=\varphi(\beta)$,则 $\varphi(\alpha)\to\varphi(\beta)=k$. 以下只需证明 $\neg\varphi(\alpha)\vee\varphi(\beta)=k$. 事实上,由 $\alpha>\beta$ 及(2.5.13)式知不可能 $|\varphi(\alpha)|=|\varphi(\beta)|<k$. 从而 $|\alpha|\geqslant k$, $|\beta|\geqslant k$. 如果 $\alpha>\beta\geqslant k$,则 $\varphi(\alpha)=\varphi(\beta)=k$,所以 $\neg\varphi(\alpha)\vee\varphi(\beta)=k$. 如果 $\beta<\alpha\leqslant -k$,则 $\varphi(\alpha)=\varphi(\beta)=-k$,仍有 $\neg\varphi(\alpha)\vee\varphi(\beta)=k$. 引理证毕.

**定理 2.5.21** (广义重言式的重言式表示定理) 设 $A\in F(S)$, $1\leqslant k<n$,则 $A$ 是 $W_{2n}(W_{2n+1})$ 中的 $k$-重言式当且仅当 $A$ 是 $W_{2k}(W_{2k+1})$ 中的重言式,即

$$\begin{aligned}k-T(W_{2n})&=T(W_{2k}),\\ k-T(W_{2n+1})&=T(W_{2k+1}),\end{aligned}\qquad (n=1,2,\cdots;\quad 1\leqslant k<n). \tag{2.5.15}$$

**证** 以下设 $\psi_1:W_{2k}\to W_{2n}$ 与 $\psi_2:W_{2k+1}\to W_{2n+1}$ 为嵌入映射,则显然有

$$\varphi_1\psi_1=Id_{W_{2k}},\qquad \varphi_2\psi_2=Id_{W_{2k+1}}.$$

现在以 $W_{2n+1}$ 为例证明本定理.

设 $A=f(p_1,\cdots,p_t)\in k-T(W_{2n+1})$, $u$ 是 $F(S)$ 的 $W_{2k+1}$ 赋值. 令 $v_0(p_i)=\psi_2u(p_i)(1\leqslant i\leqslant t)$,则有 $F(S)$ 的 $W_{2n+1}$ 赋值 $v$ 使 $v(p_i)=v_0(p_i)(1\leqslant i\leqslant t)$. 由 $A\in k-T(W_{2n+1})$ 得 $v(A)\geqslant k$. 那么由(2.5.13)式就有 $\varphi_2v(A)=k$. 但由引理知 $\varphi_2$ 为同态,所以

$$\begin{aligned}k=\varphi_2v(A)&=\varphi_2\bar{f}(v(p_1),\cdots,v(p_t))\\ &=\varphi_2\bar{f}(\psi_2u(p_1),\cdots,\psi_2u(p_t))\\ &=\bar{f}(\varphi_2\psi_2u(p_1),\cdots,\varphi_2\psi_2u(p_t))\end{aligned}$$

$$=\bar{f}(u(p_1),\cdots,u(p_t)),$$

从而

$$u(A)=\bar{f}(u(p_1),\cdots,u(p_t))=k.$$

因为 $u$ 是任一 $W_{2k+1}$ 赋值,故 $A$ 为 $W_{2k+1}$ 重言式,即 $A\in T(W_{2k+1})$.

反之,设 $A\in T(W_{2k+1})$,$v$ 是 $F(S)$ 的任一 $W_{2n+1}$ 赋值,则由引理知 $\varphi_2 v$ 是 $F(S)$ 的 $W_{2k+1}$ 赋值. 故由 $A\in T(W_{2k+1})$ 知 $\varphi_2 v(A)=k$,那么由(2.5.13)式便得 $v(A)\geqslant k$,即 $A\in k-T(W_{2n+1})$.

# 第 3 章　命题演算的形式系统$\mathscr{L}^*$

## 3.1　Fuzzy 推理与 Fuzzy 逻辑

### 3.1.1　概况

在第 2 章中我们讨论了多值逻辑的语义理论,它与经典逻辑的明显不同表现在它的赋值集已不再是由 0 与 1 两个真值组成的集,它可以有由三个元、$n$ 个元,甚至无穷多个元组成的赋值集. 与语义理论相配套,多值逻辑的语构理论也不同于经典逻辑. 例如,在 2.3 节中介绍 Gödel 的三值系统 $G_3$ 时我们曾介绍过直觉主义命题演算系统,其公理体系中仅含两条公理(M1)与(M2). 20 世纪 90 年代以来,随着 Fuzzy 控制技术在家电产品等方面的成功应用,作为其理论基础的 Fuzzy 推理以及相关的 Fuzzy 逻辑理论也得到发展. 所谓 Fuzzy 逻辑,按其历史演变来看,可分为两个不同的层次:第一个层次相对简单一些,无非是把对一个命题的真度的判断从二值判断扩充为连续值乃至格值判断而已. 换句话说,Fuzzy 逻辑就是赋值格为[0,1](或更广泛一些的格 L)的逻辑. 这时代表各种命题的仍然是抽象的字母或者是这些字母通过一些必要的连接词,如¬ ,∨ ,→等连接而成的式子. 所以, 单从公式的外表看是无法知道它是 Fuzzy 逻辑的公式还是经典逻辑的公式的. 第二个层次则相对复杂一些,这时公理系统自身中的公式也被赋予了某种真度,同时推理规则也被程度化了. 这是我们在第 7 章中将要详细研究的 Pavelka 的 Fuzzy 逻辑系统. 在本章中我们将介绍第一层次意义下的 Fuzzy 逻辑. 当然,这也就是赋值集为[0,1]的多值逻辑,我们之所以冠以 Fuzzy 的定语,是因为它与第 4 章将研究的 Fuzzy 推理是紧密联系的.

我们先简短地回顾一下 Fuzzy 逻辑与 Fuzzy 推理的发展状况. 自 1965 年 Zadeh 提出 Fuzzy 集概念[9]以来,关于 Fuzzy 系统的研究得到迅猛发展,这种研究在理论与应用两个方面都取得了丰硕的成果. 相对而言,Fuzzy 系统研究在应用方面取得的成功似乎更为引人注目,特别是 Fuzzy 控制技术被广泛应用于包括各类家电产品在内的各工业领域所取得的成功更为令人瞩目,可以说其应用较之于理论有超前的发展,或者换句话说,Fuzzy 控制技术的理论基础并没有取得像其应用那样的成功. 事实上,Fuzzy 控制技术的理论基础的核心是 Fuzzy 推理理论. 一方面,关于 Fuzzy 推理已有大量的研究成果(见文献[10]);另一方面,这些理论研究似乎尚没有一个可靠的逻辑基础. 或许 20 世纪 90 年代初发生的一场风波能够证实这种情

况. 美国加州大学圣地亚哥分校的 Elkan 于 1993 年 7 月在美国第 11 届人工智能年会上所作的题为"Fuzzy 逻辑的似是而非的成功"的报告[11]引起了一场轩然大波. 1994 年,由宾夕法尼亚大学的 Shastri 主持,在 IEEE Expert 杂志上发表了 Elkan 的修改论文,同时发表了包括 Zadeh 在内的 15 位从事人工智能与 Fuzzy 系统研究的专家们的反驳文章. 最后 Elkan 又以"关于 Fuzzy 逻辑的似是而非的争论"作答[12]. 一年后, Watkins 又在同一刊物上撰文指出上述辩论的双方都错了[13]. 足见该领域的理论基础是相当薄弱的. 文献[11]中曾给出下面的定理.

**定理 3.1.1**　若$\neg(A\wedge\neg B)$与$B\vee(\neg A\wedge\neg B)$逻辑等价,则对任意两公式 $A$ 与 $B$,要么$t(B)=t(A)$,要么$t(B)=1-t(A)$.

这里 $t$ 是任一赋值. 因为恒真公式是存在的,设为 $A$,则$t(A)=1$. 那么,由定理知对任一公式 $B$ 而言,$t(B)=1$ 或 $t(B)=0$. 由此 Elkan 得出结论说 Fuzzy 逻辑只能是二值逻辑. 文献[11]中还说 Fuzzy 推理都是简单的,没有复合推理链等. 吴望名[14]对此进行了较深入的分析,澄清了文献[11]中的错误观点.

事实上,关于 Fuzzy 推理与 Fuzzy 逻辑这两个方面都已有大量的研究,只是似乎至今也没有很好地结合起来. 以 Fuzzy 命题演算为例,一方面,我们希望有一个从少数几条公理出发可以应用 MP 规则与 HS 规则进行演绎的形式系统,另一方面,我们当然应当允许一个模糊公式的赋值不再限于取 0 与 1 两个极端值而是可以取$[0,1]$中的任意值,同时随之而来的是我们应当把重言式的条件放宽,考虑 $\alpha$-重言式. 这时我们关心的是形如 $A\to B$ 的 $\alpha$-重言式以及相关的运算. 如何将以上两个方面和谐地结合起来? 这类研究似乎很不够. 在早期的工作中,1978 年 Baldwin 等曾给出近似推理的公理化形式[15],但似乎着重于用他们的真值限定法处理与 Zadeh 语义变量相关的推理而远远称不上是形式演绎系统. 1980 年,刘叙华讨论了取值于他所引进的带分界元的有余格的一种 Fuzzy 逻辑[16],而他的侧重点则在于在更广的框架下研究归结原理,并未与 Fuzzy MP 等联系起来. 1987 年, Schwartz 建立了比较完整的形式演绎系统[17],但他借助上、下文无关语法且最终对一个公式的赋值非 0 即 1,并未为 Fuzzy MP 和 MT 等提供逻辑依据. 90 年代以来,以"Fuzzy Logic"命名的书籍已经不少,如 Gottwald 的 Fuzzy Sets and Fuzzy Logic[18]、Lowen 等的 Fuzzy Logic[19]等. 但 Gottwald 只限于语义推理 $\models$ 而不涉及语构推理 $\vdash$. 更有甚者,他的书中有结论 $\models\neg(H\wedge\neg H)$,这等价于说 $H\wedge\neg H$ 的赋值恒为零,从而将 Fuzzy 公式 $H$ 可能与其否定$\neg H$ 的赋值相等的情形排除在外,也就难以用来解决 Fuzzy 推理问题. 至于 Lowen 等的书,虽然名为 Fuzzy Logic,而其中收入的 48 篇文章中无一是讨论 Fuzzy 命题演算系统的. 在 Dubois 等的长篇评述文章及其所列出的数百篇参考文献中似乎也未见到将 Fuzzy 推理与 Fuzzy 逻辑成功地结合的例子. Elkan 之所以在文献[11]中提出问题,原因之一是如今被广泛使用的各种 Fuzzy 推理缺少严格的逻辑基础,而 Elkan 本人也处于不太清楚的状态. 例如,他说的"如果

$\neg(A\wedge\neg B)$与$B\vee(\neg A\wedge\neg B)$逻辑等价"就含混不清,因为什么是"逻辑等价"本身就不清楚,同时为什么要以上述二公式"逻辑等价"为前提也讲不清楚.不过他说没有较长的复合推理链则是事实.总之,Fuzzy 推理确实是缺乏逻辑依据的.Pavelka 的三篇著名的文章[20~22]无疑是 Fuzzy 逻辑方面的奠基性工作(我们将在第7章中系统介绍).但他仍未以他的理论去分析研究 Fuzzy 推理问题.我们在本书的第3、4章中把 Fuzzy 推理理论纳入 Fuzzy 逻辑的框架中.在本章中我们先从语构方面出发,建立适用于 Fuzzy 命题演算的形式系统,然后在第4章从配套的语义理论出发为 Fuzzy Modus Ponens 与 Fuzzy Modus Tollens 建立严格的逻辑基础.

### 3.1.2 经典公理系统的不适应性

在1.2节中我们介绍了经典命题演算的公理系统(L1)、(L2)与(L3)以及推理规则 MP.如果不与语义理论挂钩、不与 Fuzzy 推理的实际相结合,是无法对上述公理体系作评价的.因为这个体系是无矛盾的且在经典逻辑当中被很好地使用着.但是,如果要为 Fuzzy 推理建立形式演绎基础的话,则(L2)必须放弃.这得结合语义方面的分析方能看得清楚.

**定义 3.1.2** 设 $S$ 为无限集,$F(S)$是 $S$ 生成的$(\neg,\vee,\rightarrow)$型自由代数,$[0,1]$上的运算$\rightarrow$由某蕴涵算子 $R$ 确定,$\Sigma$ 是若干赋值 $v:F(S)\rightarrow[0,1]$的集,$A,B\in F(S)$,$\alpha\in(0,1]$.

i) 称从对每个 $v\in\Sigma$,$v(A)\geqslant\alpha$,$v(A\rightarrow B)\geqslant\alpha$ 推得 $v(B)\geqslant\alpha$ 的规则为 $\Sigma$-($\alpha$-MP)规则.

ii) 称从对每个 $v\in\Sigma$,$v(A)>\alpha$,$v(A\rightarrow B)>\alpha$ 推得 $v(B)>\alpha$ 的规则为 $\Sigma$-($\alpha^+$-MP)规则,$\alpha<1$.

iii) 称从对每个 $v\in\Sigma$,$v(A\rightarrow B)\geqslant\alpha$,$v(B\rightarrow C)\geqslant\alpha$ 推得$v(A\rightarrow C)\geqslant\alpha$的规则为 $\Sigma$-($\alpha$-HS)规则.

iv) 称从对每个 $v\in\Sigma$,$v(A\rightarrow B)>\alpha$,$v(B\rightarrow C)>\alpha$ 推得 $v(A\rightarrow C)>\alpha$ 的规则为 $\Sigma$-($\alpha^+$-HS)规则,$\alpha<1$.

当 $\Sigma$ 是一切赋值之集 $\Omega$ 时,以上各前缀"$\Sigma$-"可以略去.当$\alpha=1$时 1-MP 规则与 1-HS 规则都是语义上的概念,与语构上的 MP 规则和 HS 规则不同.

为适应 Fuzzy 推理的需要,我们希望定义 3.1.2 中的各条规则对某 $\alpha$ 成立,而这是与经典公理体系(L1)、(L2)和(L3)无法共容的,即使对很一般的蕴涵算子 $R$ 也是如此.下面的三个定理反映了这种情况.

**定理 3.1.3** 设 $R(x,y)$关于 $y$ 不减,$v(A\rightarrow B)$由 $R(v(A),v(B))$定义.如果有 $A,B\in F(S)$以及 $v\in\Sigma$ 使 $v(A)=\frac{1}{2}$,$v(B)=0$,则以下两条件不能兼顾:

i) $\Sigma$-$\left(\left(\frac{1}{2}\right)^+\text{-MP}\right)$规则与 $\Sigma$-$\left(\left(\frac{1}{2}\right)^+\text{-HS}\right)$规则成立.

ii)(L1)、(L2)与(L3)都是 $\Sigma$-$\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{+}\text{-重言式}\right)$.

**证**　用反证法. 为简便起见,把前缀 $\Sigma$-略去不写. 设 i)与 ii)都成立. 由(L2)为 $\left(\frac{1}{2}\right)^{+}$-重言式知对每个 $v\in\Sigma$,

$$v((A\to(A\to B))\to((A\to A)\to(A\to B)))>\frac{1}{2}. \tag{3.1.1}$$

类似地,由(L1)与(L3)为 $\left(\frac{1}{2}\right)^{+}$-重言式知对每个 $v\in\Sigma$ 有

$$v(A\to(\neg B\to A))>\frac{1}{2}, \tag{3.1.2}$$

$$v((\neg B\to\neg A)\to(A\to B))>\frac{1}{2}. \tag{3.1.3}$$

取 $A,B\in F(S)$ 以及 $v\in\Sigma$ 使 $v(A)=\frac{1}{2}$, $v(B)=0$. 由 $v$ 为同态知 $v(\neg A)=(v(A))'=\frac{1}{2}$. 所以

$$\begin{aligned}v(\neg B\to\neg A)&=R(v(\neg B),v(\neg A))\\&=R(v(\neg B),v(A))\\&=v(\neg B\to A).\end{aligned} \tag{3.1.4}$$

由(3.1.3)式与(3.1.4)式得

$$\begin{aligned}&v((\neg B\to A)\to(A\to B))\\&=R(v(\neg B\to A),v(A\to B))\\&=R(v(\neg B\to\neg A),v(A\to B))\\&=v((\neg B\to\neg A)\to(A\to B))>\frac{1}{2}.\end{aligned} \tag{3.1.5}$$

把 $\left(\frac{1}{2}\right)^{+}$-HS 规则用于(3.1.2)式和(3.1.5)式得

$$v(A\to(A\to B))>\frac{1}{2}.$$

再由 $\left(\frac{1}{2}\right)^{+}$-MP 规则以及(3.1.1)式就得到

$$v((A\to A)\to(A\to B))>\frac{1}{2}. \tag{3.1.6}$$

如果 $v(A\to A)\leqslant\frac{1}{2}$,注意 $R(x,y)$ 关于 $y$ 不减以及(L1)为 $\left(\frac{1}{2}\right)^{+}$-重言式得

$$\frac{1}{2}<v(A\to(A\to A))$$

$$
\begin{aligned}
&= R(v(A), v(A \to A)) \\
&\leqslant R\left(v(A), \frac{1}{2}\right) \\
&= R(v(A), v(A)) \\
&= v(A \to A) \leqslant \frac{1}{2},
\end{aligned}
$$

此为矛盾. 故 $v(A \to A) > \frac{1}{2}$,从而由$\left(\frac{1}{2}\right)^{+}$-MP 规则以及(3.1.6)式得

$$v(A \to B) > \frac{1}{2}. \tag{3.1.7}$$

但 $v(\neg\neg A) = v(A), v(\neg\neg B) = v(B)$,所以由(3.1.7)式得

$$v(\neg\neg A \to \neg\neg B) > \frac{1}{2}. \tag{3.1.8}$$

再由(L3)为$\left(\frac{1}{2}\right)^{+}$-重言式并运用$\left(\frac{1}{2}\right)^{+}$-MP 规则于(3.1.8)式以及

$$v((\neg\neg A \to \neg\neg B) \to (\neg B \to \neg A)) > \frac{1}{2},$$

即得

$$v(\neg B \to \neg A) > \frac{1}{2}.$$

由(3.1.4)式,这也就是

$$v(\neg B \to A) > \frac{1}{2}. \tag{3.1.9}$$

最后,由 $v(\neg B) = (v(B))' = 1 > \frac{1}{2}$,$\left(\frac{1}{2}\right)^{+}$-MP 规则以及(3.1.9)式得$v(A) > \frac{1}{2}$. 这与$v(A) = \frac{1}{2}$的假定相矛盾. 定理 3.1.3 证毕.

在以下两个定理中设 $v(A \to B)$ 由 $R(v(A), v(B))$ 定义,这里 $R$ 为任一蕴涵算子.

**定理 3.1.4** 设有 $A, B \in F(S)$ 和 $v \in \Sigma$ 使 $v(A) = \frac{1}{2}, v(B) = 0$,则以下两条不能兼顾:

i) $\Sigma$-$\left(\frac{1}{2}\text{-MP}\right)$规则成立;

ii) (L1)与(L3)都是 $\Sigma$-$\left(\frac{1}{2}\text{-重言式}\right)$.

**证** 用反证法. 设 i)与 ii)都成立. 仍将前缀 $\Sigma$-省去不写. 由(L1)为$\frac{1}{2}$-重言式

知对每个 $v\in\Sigma$,

$$v(\neg\neg A\to(\neg B\to\neg\neg A))\geqslant\frac{1}{2}.\tag{3.1.10}$$

取 $A,B\in F(S)$ 以及 $v\in\Sigma$ 使 $v(A)=\frac{1}{2}$, $v(B)=0$, 则由 $v$ 为同态知 $v(\neg\neg A)=v(A)=\frac{1}{2}$. 所以由(3.1.10)式与$\frac{1}{2}$-MP 规则得

$$v(\neg B\to\neg\neg A)\geqslant\frac{1}{2}.\tag{3.1.11}$$

又，由(L3)为$\frac{1}{2}$-重言式得

$$v((\neg B\to\neg\neg A)\to(\neg A\to B))\geqslant\frac{1}{2},\tag{3.1.12}$$

所以由(3.1.11)式、(3.1.12)式与$\frac{1}{2}$-MP 规则得

$$v(\neg A\to B)\geqslant\frac{1}{2}.\tag{3.1.13}$$

再由 $v(\neg A)=v(A)=\frac{1}{2}$与(3.1.13)式以及$\frac{1}{2}$-MP 规则即得$v(B)\geqslant\frac{1}{2}$. 与 $v(B)=0$ 的假设相矛盾.

**定理 3.1.5**　设有 $A\in F(S)$ 和 $v\in\Sigma$ 使 $v(A)=\frac{1}{2}$, 则经典二值命题演算中的定理不可能都是 $\Sigma$-$\left(\left(\frac{1}{2}\right)^+\text{-重言式}\right)$, 从而更不能都是重言式.

**证**　设 $v(A)=\frac{1}{2}$, 则 $v(\neg A)=\frac{1}{2}$, 这时 $v(\neg A\vee A)=\frac{1}{2}$. 但 $\neg A\vee A$ 是经典命题演算的定理, 它不是 $\Sigma$-$\left(\left(\frac{1}{2}\right)^+\text{-重言式}\right)$, 从而也不是重言式.

**注 3.1.6**　i) 以上三个定理中最后一个定理的要求最少, 只要求有 $A$ 及 $v$ 使 $v(A)=\frac{1}{2}$成立, 而这在 Fuzzy 赋值中是经常会发生的, 可见经典命题演算的公理体系必须改变才有可能使它的定理都是重言式.

ii) 当 $v(A)=\frac{1}{2}$时 $\neg A\vee A$ 不是重言式, 针对经典命题演算而言, 这等价于说 $A\to A$ 不是重言式或 $A\to A$ 不是定理. 但在3.2节将看到在新系统 $\mathscr{L}^*$ 中 $A\to A$ 是定理, 这是因为 $\neg A\vee B$ 已不再是 $A\to B$ 的简写了.

iii) 以上的前两个定理都有$\frac{1}{2}$-MP 或$\left(\frac{1}{2}\right)^+$-MP 与$\left(\frac{1}{2}\right)^+$-HS 的要求. 今后我

们希望保持$\left(\frac{1}{2}\right)^+$-MP 与$\left(\frac{1}{2}\right)^+$-HS. 那么由第一个定理可见对(L1)、(L2)、(L3)这个公理体系必须加以改造才行.

## 3.2 命题演算的形式演绎系统 $\mathscr{L}^*$

### 3.2.1 $\mathscr{L}^*$ 中的公理与推理规则

(1)$\mathscr{L}^*$ 中的公理

**定义 3.2.1** 设 $S$ 是无穷集,$F(S)$是由 $S$ 生成的$(\neg,\vee,\to)$型自由代数. 称 $F(S)$中具有以下各种形式的公式为**公理**:

(L*1) $A\to(B\to A)$;

(L*2) $(\neg A\to\neg B)\to(B\to A)$;

(L*3) $(A\to(B\to C))\to(B\to(A\to C))$;

(L*4) $(B\to C)\to((A\to B)\to(A\to C))$;

(L*5) $A\to\neg\neg A$;

(L*6) $A\to A\vee B$;

(L*7) $A\vee B\to B\vee A$;

(L*8) $(A\to C)\wedge(B\to C)\to(A\vee B\to C)$;

(L*9) $(A\wedge B\to C)\to(A\to C)\vee(B\to C)$;

(L*10) $(A\to B)\vee((A\to B)\to\neg A\vee B)$.

以上形如 $P\wedge Q$ 的公式是$\neg(\neg P\vee\neg Q)$的简写.

(2)$\mathscr{L}^*$ 中的推理规则

**定义 3.2.2** $\mathscr{L}^*$ 中有两条**推理规则**:

(I 1)**MP 规则**;

(I 2)**交推理规则**:由 $A\to B$ 与 $A\to C$ 推得 $A\to B\wedge C$.

**定义 3.2.3** 由公式集 $F(S)$、公理(L*1)~(L*10)以及推理规则(I1)与(I2)组成的系统叫做**系统 $\mathscr{L}^*$**.

(3)系统 $\mathscr{L}^*$ 中的证明和定理

**定义 3.2.4** 系统 $\mathscr{L}^*$ 中的**证明**是一个 $F(S)$中公式的有限序列 $A_1,\cdots,A_n$. 对每个$i\leqslant n$,$A_i$ 是 $\mathscr{L}^*$ 中的公理,或者存在$j<i$ 和 $k<i$,使$A_i$ 是通过$A_j$ 和$A_k$ 运用推理规则(I1)或(I2)而得的公式. 上述证明叫 **$A_n$ 的证明**,记作 $\vdash A_n$. $A_n$ 叫 $\mathscr{L}^*$ 中的**定理**.

**定义 3.2.5** 设 $\Gamma\subset F(S)$,$A\in F(S)$. 从 $\Gamma$ 到 $A$ 的推演是一个 $F(S)$中公式的有限序列 $A_1,\cdots,A_n$,$A_n=A$. 对每个 $i\leqslant n$,$A_i$ 是 $\mathscr{L}^*$ 中的公理,或者 $A_i\in\Gamma$,或者存在

$j<i$ 和 $k<i$,使 $A_i$ 是通过 $A_j$ 和 $A_k$ 运用推理规则(I1)或(I2)而得的公式. 这时也说公式 **$A$ 可从 $\Gamma$ 推出**,记作 $\Gamma \vdash A$.

显然, $A$ 是定理当且仅当 $A$ 可从空集推出.

从以上两个定义可直接看出定理3.2.6成立.

**定理3.2.6**　i) 证明的截片是证明,即若 $A_1,\cdots,A_n$ 是 $A_n$ 的证明,则对每个 $i\leqslant n$,$A_1,\cdots,A_i$ 是 $A_i$ 的证明.

ii) 证明的连写是证明,即若

$$A_{k1},\ \cdots,\ A_{kn_k}$$

是 $A_{kn_k}$的证明,$k=1,\cdots,m$,则

$$A_{11},\ \cdots,\ A_{1n_1},\ \cdots,\ A_{m1},\ \cdots,\ A_{mn_m}$$

是 $A_{mn_m}$ 的证明.

iii) 设 $\Gamma\subset F(S)$,$A\in F(S)$. $A_1,\cdots,A_n$ 是 $F(S)$ 中的序列,$A_n=A$. 如果对每个 $i\leqslant n$,$A_i$ 是 $\mathscr{L}^*$ 中的定理,或者 $A_i\in\Gamma$,或者存在 $j<i$ 和 $k<i$ 使 $A_i$ 是通过 $A_j$ 和 $A_k$ 运用推理规则(I1)或(I2)而得的公式,则 $A$ 可从 $\Gamma$ 推出. 特别地,当 $\Gamma$ 是空集时,$A$ 是 $\mathscr{L}^*$ 中的定理.

**例3.2.7**　i) $\vdash \neg\neg A\rightarrow A$;

ii)令 $\Gamma=\{A\rightarrow(B\rightarrow C),A\rightarrow B,A\}$,则 $\Gamma\vdash C$.

事实上,i)的证明如下:

| | | |
|---|---|---|
| 1° | $\neg A\rightarrow\neg\neg\neg A$ | (L*5) |
| 2° | $(\neg A\rightarrow\neg\neg\neg A)\rightarrow(\neg\neg A\rightarrow A)$ | (L*2) |
| 3° | $\neg\neg A\rightarrow A$ | 1°,2°,MP |

ii)的证明如下:

| | | |
|---|---|---|
| 1° | $A$ | $\Gamma$ 中元 |
| 2° | $A\rightarrow(B\rightarrow C)$ | $\Gamma$ 中元 |
| 3° | $B\rightarrow C$ | 1°,2°,MP |
| 4° | $A\rightarrow B$ | $\Gamma$ 中元 |
| 5° | $B$ | 1°,4°,MP |
| 6° | $C$ | 3°,5°,MP |

### 3.2.2　三段论推理规则与可证等价

(1) HS

由第1章注1.2.9知三段论规则

$$\{A\rightarrow B,B\rightarrow C\}\vdash A\rightarrow C$$

是由那里的演绎定理推得的. 在第4章中将看到,在系统 $\mathscr{L}^*$ 中演绎定理不成立. 但在 $\mathscr{L}^*$ 中三段论规则仍成立,即下面的定理成立.

**定理 3.2.8** (HS 规则) 设 $\Gamma=\{A\to B, B\to C\}$,则 $\Gamma\vdash(A\to C)$.

**证**

| | | |
|---|---|---|
| 1° | $B\to C$ | $\Gamma$ 中元 |
| 2° | $(B\to C)\to((A\to B)\to(A\to C))$ | (L*4) |
| 3° | $(A\to B)\to(A\to C)$ | 1°,2°,MP |
| 4° | $A\to B$ | $\Gamma$ 中元 |
| 5° | $A\to C$ | 3°,4°,MP |

综合使用 HS 与定理 3.2.6 可以方便地证明一些 $\mathscr{L}^*$ 中的定理.

**例 3.2.9** i) $\vdash(A\to B)\to(\neg B\to\neg A)$;

ii) $\vdash A\wedge B\to B\wedge A$.

事实上,i)的证明如下:

| | | |
|---|---|---|
| 1° | $(A\to B)\to((\neg\neg A\to A)\to(\neg\neg A\to B))$ | (L*4) |
| 2° | $[(A\to B)\to((\neg\neg A\to A)\to(\neg\neg A\to B))]$ $\to[(\neg\neg A\to A)\to((A\to B)\to(\neg\neg A\to B))]$ | (L*3) |
| 3° | $(\neg\neg A\to A)\to((A\to B)\to(\neg\neg A\to B))$ | 1°,2°,MP |
| 4° | $\neg\neg A\to A$ | 定理 |
| 5° | $(A\to B)\to(\neg\neg A\to B)$ | 3°,4°,MP |
| 6° | $B\to\neg\neg B$ | (L*5) |
| 7° | $(B\to\neg\neg B)\to((\neg\neg A\to B)\to(\neg\neg A\to\neg\neg B))$ | (L*4) |
| 8° | $(\neg\neg A\to B)\to(\neg\neg A\to\neg\neg B)$ | 6°,7°,MP |
| 9° | $(A\to B)\to(\neg\neg A\to\neg\neg B)$ | 5°,8°,HS |
| 10° | $(\neg\neg A\to\neg\neg B)\to(\neg B\to\neg A)$ | (L*2) |
| 11° | $(A\to B)\to(\neg B\to\neg A)$ | 9°,10°,HS |

ii)的证明如下:

| | | |
|---|---|---|
| 1° | $\neg B\vee\neg A\to\neg A\vee\neg B$ | (L*7) |
| 2° | $((\neg B\vee\neg A)\to(\neg A\vee\neg B))\to$ $(\neg(\neg A\vee\neg B)\to\neg(\neg B\vee\neg A))$ | 定理 i) |
| 3° | $\neg(\neg A\vee\neg B)\to\neg(\neg B\vee\neg A)$ | 1°,2°,MP |
| 4° | $A\wedge B\to B\wedge A$ | 3°的简写 |

(2) 可证等价

**定义 3.2.10** 设 $A,B\in F(S)$,如果 $\vdash(A\to B)$且 $\vdash(B\to A)$,则称 $A$ 与 $B$ **可证等价**,记作 $\boldsymbol{A\sim B}$.

**命题 3.2.11** 可证等价是 $F(S)$上的等价关系.

**证** 由定义知 ~ 是对称的. 由 HS 知 ~ 是传递的. 所以只需证明 ~ 的反身性如下:

1°　$A\to((B\to\neg\neg B)\to A)$　　(L*1)

2°　$(A\to((B\to\neg\neg B)\to A))\to((B\to\neg\neg B)\to(A\to A))$　　(L*3)

3°　$(B\to\neg\neg B)\to(A\to A)$　　1°,2°,MP

4°　$B\to\neg\neg B$　　(L*5)

5°　$A\to A$　　3°,4°,MP

**注 3.2.12**　由例 3.2.7i) 与公理(L*5)知 $A\sim\neg\neg A$. 由例 3.2.9i) 与公理(L*2)知 $A\to B\sim\neg B\to\neg A$. 由公理(L*7)知 $A\vee B\sim B\vee A$，因为(L*7)本身也说 $B\vee A\to A\vee B$ 是公理，$C\vee D\to D\vee C$ 是公理等等. 基于同样的原因，由例 3.2.9ii) 知 $A\wedge B\sim B\wedge A$.

命题 3.2.11 的结论还可以进一步加强. 我们需要一个引理.

**引理 3.2.13**　i) 如果 $\vdash B$，则 $\vdash A\to A\wedge B$；

ii) 如果 $\vdash A$ 且 $\vdash B$，则 $\vdash A\wedge B$；

iii) 如果 $\vdash A\to C$ 且 $\vdash B\to C$，则 $\vdash A\vee B\to C$；

iv) 如果 $\vdash A\to B$ 且 $\vdash C\to D$，则 $\vdash A\vee C\to B\vee D$.

**证**　i) 的证明如下：

1°　$A\to A$　　定理

2°　$B\to(A\to B)$　　(L*1)

3°　$B$　　定理

4°　$A\to B$　　2°,3°,MP

5°　$A\to A\wedge B$　　交推理规则

ii) 的证明如下：

1°　$B$　　定理

2°　$A\to A\wedge B$　　定理 i)

3°　$A$　　定理

4°　$A\wedge B$　　2°,3°,MP

iii) 的证明如下：

1°　$A\to C$　　定理

2°　$B\to C$　　定理

3°　$(A\to C)\wedge(B\to C)$　　定理 ii)

4°　$(A\to C)\wedge(B\to C)\to(A\vee B\to C)$　　(L*8)

5°　$A\vee B\to C$　　3°,4°,MP

iv) 的证明作为练习留给读者.

**命题 3.2.14**　可证等价关系 ~ 是 $F(S)$ 上的 $(\neg,\vee,\to)$ 型同余关系，即

i) 若 $A\sim B$，则 $\neg A\sim\neg B$.

ii) 若 $A\sim B$ 且 $C\sim D$，则 $A\vee C\sim B\vee D$.

iii) 若 $A \sim B$ 且 $C \sim D$,则 $A \to C \sim B \to D$.

**证** i)设 $A \sim B$,则 $\vdash A \to B$,那么由例 3.2.9i)和 MP 即得 $\vdash \neg B \to \neg A$. 同理 $\vdash \neg A \to \neg B$,所以 $\neg A \sim \neg B$.

ii) 设 $A \sim B$ 且 $C \sim D$,由 $\vdash A \to A$ 与 $\vdash C \to D$ 以及引理 3.2.13iv)得 $\vdash A \vee C \to A \vee D$. 由 $A \sim B$ 类似可证 $\vdash A \vee D \to B \vee D$. 由 HS 即得 $\vdash A \vee C \to B \vee D$. 同理 $\vdash B \vee D \to A \vee C$. 所以 $A \vee C \sim B \vee D$.

iii)设 $A \sim B$ 且 $C \sim D$. 由 $\vdash C \to D$ 与($L^*4$)利用 MP 即得 $\vdash (A \to C) \to (A \to D)$. 同理,由 $\neg A \sim \neg B$ 从而 $\vdash \neg A \to \neg B$ 可得 $\vdash (\neg D \to \neg A) \to (\neg D \to \neg B)$. 再由 $\vdash (A \to D) \to (\neg D \to \neg A)$ 以及 $\vdash (\neg D \to \neg B) \to (B \to D)$ 利用 HS 即得 $\vdash (A \to D) \to (B \to D)$. 前面已证 $\vdash (A \to C) \to (A \to D)$. 再次使用 HS 就得到 $\vdash (A \to C) \to (B \to D)$. 同理可证相反的蕴涵式,即 $\vdash (B \to D) \to (A \to C)$. 所以 $A \to C \sim B \to D$.

### 3.2.3 $\mathscr{L}^*$ 中常用的定理

**例 3.2.15** i) $\vdash A \wedge B \to A$;

ii) $\vdash (A \to C) \to (A \wedge B \to C)$;

iii) $\vdash (A \to C) \vee (B \to C) \to (A \wedge B \to C)$.

**证** i) 可证明如下:

| | | |
|---|---|---|
| 1° | $\neg A \to \neg A \vee \neg B$ | ($L^*6$) |
| 2° | $\neg(\neg A \vee \neg B) \to \neg\neg A$ | 1°,(3.2.9),MP |
| 3° | $\neg\neg A \to A$ | 定理 |
| 4° | $\neg(\neg A \vee \neg B) \to A$ | 2°,3°,HS |
| 5° | $A \wedge B \to A$ | 4°的简写 |

ii) 可证明如下:

| | | |
|---|---|---|
| 1° | $A \wedge B \to A$ | 定理 i) |
| 2° | $\neg A \to \neg(A \wedge B)$ | 1°,(3.2.9),MP |
| 3° | $(\neg C \to \neg A) \to (\neg C \to \neg(A \wedge B))$ | 2°,($L^*4$),MP |
| 4° | $(A \to C) \to (A \wedge B \to C)$ | 3°,(3.2.9),($L^*2$),HS |

iii) 可证明如下:

| | | |
|---|---|---|
| 1° | $(A \to C) \to (A \wedge B \to C)$ | 定理 ii) |
| 2° | $(B \to C) \to (B \wedge A \to C)$ | 定理 ii) |
| 3° | $(B \wedge A \to C) \to (A \wedge B \to C)$ | $B \wedge A \sim A \wedge B, C \sim C$,命题 3.2.14,HS |
| 4° | $(B \to C) \to (A \wedge B \to C)$ | 2°,3°,HS |
| 5° | $(A \to C) \vee (B \to C) \to (A \wedge B \to C)$ | 1°,4°,引理 3.2.13iii) |

**例 3.2.16** i) $\vdash (A \vee B \to C) \to (A \to C)$;

ii) $\vdash (A \vee B \to C) \to (A \to C) \wedge (B \to C)$;

iii) $\vdash (B \to C) \to (A \lor B \to A \lor C)$;

iv) $\vdash (B \to C) \to (A \land B \to A \land C)$;

v) $\vdash (A \to B) \lor (B \to A)$

**证**　i) 的证明如下:

1° $A \to A \lor B$　　(L*6)

2° $\neg (A \lor B) \to \neg A$　　1°,(3.2.9),MP

3° $(\neg C \to \neg (A \lor B)) \to (\neg C \to \neg A)$　　2°,(L*4),MP

4° $(A \lor B \to C) \to (A \to C)$　　3°,(3.2.9),(L*2),HS

ii) 的证明如下:

1° $(A \lor B \to C) \to (A \to C)$　　定理 i)

2° $(B \lor A \to C) \to (B \to C)$　　定理 i)

3° $(A \lor B \to C) \to (B \to C)$　　$A \lor B \sim B \lor A, C \sim C$,命题 3.2.14iii),HS

4° $(A \lor B \to C) \to (A \to C) \land (B \to C)$　　1°,3°,交推理规则

iii) ~v) 的证明作为练习留给读者.

**例 3.2.17**　$A \lor (B \lor C) \sim (A \lor B) \lor C, A \land (B \land C) \sim (A \land B) \land C$.

**证**　以第一式为例,且只证 $A \lor (B \lor C) \to (A \lor B) \lor C$. 相反,蕴涵式可类似证明. 事实上,由 $\vdash A \to A \lor B$ 与 $\vdash A \lor B \to (A \lor B) \lor C$ 及 HS 得 $\vdash A \to (A \lor B) \lor C$. 类似可证

$$\vdash B \to (A \lor B) \lor C, \quad \vdash C \to (A \lor B) \lor C.$$

由以上两式及引理 3.2.13iii) 得 $\vdash B \lor C \to (A \lor B) \lor C$. 从而由 $\vdash A \to (A \lor B) \lor C$ 再次应用引理 3.2.13iii) 即得 $\vdash A \lor (B \lor C) \to (A \lor B) \lor C$.

**例 3.2.18**　$\neg (A \lor B) \sim \neg A \land \neg B, \neg (A \land B) \sim \neg A \lor \neg B$.

**证**　因为 $A \sim \neg\neg A, B \sim \neg\neg B$,由命题 3.2.14 得 $A \lor B \sim \neg\neg A \lor \neg\neg B$. 而 $\neg A \land \neg B$ 是 $\neg (\neg\neg A \lor \neg\neg B)$ 的简写,所以由命题 3.2.14 即得 $\neg (A \lor B) \sim \neg A \land \neg B$. 类似可证第二个关系式. 本例可简单地表述为:**可证等价关系满足 De Morgan 对偶律.**

**例 3.2.19**　i) $A \to B \lor C \sim (A \to B) \lor (A \to C)$;

ii) $A \to B \land C \sim (A \to B) \land (A \to C)$.

**证**　i) 先证 $\vdash (A \to B \lor C) \to (A \to B) \lor (A \to C)$.

1° $(A \to B \lor C) \to (\neg (B \lor C) \to \neg A)$　　例 3.2.9i)

2° $(\neg (B \lor C) \to \neg A) \to (\neg B \land \neg C \to \neg A)$

　　$\neg (B \lor C) \sim \neg B \land \neg C$,命题 3.2.14

3° $(\neg B \land \neg C \to \neg A) \to (\neg B \to \neg A) \lor (\neg C \to \neg A)$　　(L*9)

4° $(A \to B \lor C) \to (A \to B) \lor (A \to C)$　　1°,2°,3°,HS,命题 3.2.14

其次证明 $\vdash (A \to B) \lor (A \to C) \to (A \to B \lor C)$.

1° $B \to B \vee C$ (L*6)

2° $(A \to B) \to (A \to B \vee C)$ 1°,(L*4),MP

3° $C \to B \vee C$ (L*6),命题 3.2.14

4° $(A \to C) \to (A \to B \vee C)$ 3°,(L*4),MP

5° $(A \to B) \vee (A \to C) \to (A \to B \vee C)$ 2°,4°,引理 3.2.13iii)

至此 i)已得证. 请读者自行证明 ii).

**例 3.2.20** $A \wedge (B \vee C) \sim (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$;

$A \vee (B \wedge C) \sim (A \vee B) \wedge (A \vee C)$.

**证** 以第一式为例进行证明. 先证明 $\vdash A \wedge (B \vee C) \to (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$.

1° $B \vee C \to B \vee C$ 定理

2° $(B \vee C \to B) \vee (B \vee C \to C)$ 1°,例 3.2.19i)

3° $(B \vee C \to B) \to (A \wedge (B \vee C) \to A \wedge B)$ 例 3.2.16iv)

4° $(B \vee C \to C) \to (A \wedge (B \vee C) \to A \wedge C)$ 例 3.2.16iv)

5° $(B \vee C \to B) \vee (B \vee C \to C) \to$
$(A \wedge (B \vee C) \to A \wedge B) \vee (A \wedge (B \vee C) \to A \wedge C)$ 3°,4°,引理 3.2.13iv)

6° $(A \wedge (B \vee C) \to A \wedge B) \vee (A \wedge (B \vee C) \to A \wedge C)$ 2°,5°,MP

7° $A \wedge (B \vee C) \to (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ 6°,例 3.2.19i) MP

其次证明 $\vdash (A \wedge B) \vee (A \wedge C) \to A \wedge (B \vee C)$.

1° $B \to B \vee C$ (L*6)

2° $A \wedge B \to A \wedge (B \vee C)$ 1°,例 3.2.16iv),MP

3° $C \to C \vee B$ (L*6)

4° $C \vee B \to B \vee C$ (L*7)

5° $C \to B \vee C$ 3°,4°,HS

6° $A \wedge C \to A \wedge (B \vee C)$ 5°,例 3.2.16iv),MP

7° $(A \wedge B) \vee (A \wedge C) \to A \wedge (B \vee C)$ 2°,6°,引理 3.2.13iii)

至此第一式已证毕,请读者自行证明第二式. 并证明下面的例3.2.21.

**例 3.2.21** $A \vee A \sim A, A \wedge A \sim A$.

总结以上各例并作适当补充可得以下定理.

**定理 3.2.22** (可证等价定理) 以下各可证等价关系成立:

i) $A \vee A \sim A, A \wedge A \sim A$;

ii) $\neg \neg A \sim A$;

iii) 交换律成立,即 $A \vee B \sim B \vee A, A \wedge B \sim B \wedge A$;

iv) 结合律成立,即 $A \vee (B \vee C) \sim (A \vee B) \vee C, A \wedge (B \wedge C) \sim (A \wedge B) \wedge C$;

v) De Morgan 对偶律成立,即$\neg (A \vee B) \sim \neg A \wedge \neg B, \neg (A \wedge B) \sim \neg A \vee \neg B$;

vi) 分配律成立,即 $A \wedge (B \vee C) \sim (A \wedge B) \vee (A \wedge C), A \vee (B \wedge C) \sim (A \vee B) \wedge$

$(A \vee C)$;

vii) $A \to B \vee C \sim (A \to B) \vee (A \to C)$, $A \to B \wedge C \sim (A \to B) \wedge (A \to C)$;

viii) $A \vee B \to C \sim (A \to C) \wedge (B \to C)$, $A \wedge B \to C \sim (A \to C) \vee (B \to C)$;

ix) $A \to (B \to C) \sim B \to (A \to C)$;

x) $A \to B \sim \neg B \to \neg A$, $A \to \neg B \sim B \to \neg A$, $\neg A \to B \sim \neg B \to A$.

### 3.2.4　代换定理

代换定理在证明 $\mathscr{L}^*$ 中的定理时是很有用的. 它说如果把组成一个公式 $A$ 的某个子公式用可证等价的公式去代换,所得公式与 $A$ 是可证等价的,即

**定理 3.2.23** (代换定理)　设公式 $A$ 由子公式 $B_1, \cdots, B_t$ 通过连接词 $\neg$, $\vee$ 与 $\to$ 连接而成, $A = f(B_1, \cdots, B_t)$. 如果 $B_1 \sim C_1$, 则

$$A \sim f(C_1, B_2, \cdots, B_t). \tag{3.2.1}$$

**证**　按子公式间连接词的个数归纳证明.

i) 设 $A$ 中不含连接词[①], 则 $t=1$ 且 $A = f(B_1) = B_1$. 这时由 $B_1 \sim C_1$ 得 $A \sim C_1 = f(C_1)$, 即(3.2.1)式成立.

ii) 设 $A$ 中含有不多于 $k$ 个连接词时定理成立. 今 $A$ 中各子公式间共有 $k+1$ 个连接词.

1°　设 $A = f(B_1, \cdots, B_t) = \neg g(B_1, \cdots, B_t)$. 由归纳假设知

$$g(B_1, \cdots, B_t) \sim g(C_1, B_2, \cdots, B_t),$$

所以由命题 3.2.14 即得(3.2.1)式.

2°　设 $A = f(B_1, \cdots, B_t) = g(B_1, \cdots, B_t) \vee h(B_1, \cdots, B_t)$. 则 $g$ 与 $h$ 中各子公式间的连接词均不多于 $k$ 个. 由归纳假设知

$$g(B_1, \cdots, B_t) \sim g(C_1, B_2, \cdots, B_t),$$
$$h(B_1, \cdots, B_t) \sim h(C_1, B_2, \cdots, B_t),$$

所以由命题 3.2.14 仍可证得(3.2.1)式.

3°　设 $A = f(B_1, \cdots, B_t) = g(B_1, \cdots, B_t) \to h(B_1, \cdots, B_t)$. 这时可像 2° 一样证得(3.2.1)式.

由以上 i) 与 ii) 知代换定理成立.

连续使用代换定理 $t$ 次可得以下推论.

**推论 3.2.24**　设公式 $A$ 由子公式 $B_1, \cdots, B_t$ 通过连接词 $\neg$, $\vee$ 与 $\to$ 连接而成, $A = f(B_1, \cdots, B_t)$. 如果 $B_i \sim C_i$, $1 \leqslant i \leqslant t$, 则

$$A \sim f(C_1, \cdots, C_t). \tag{3.2.2}$$

---

①这时子公式自身可以含有连接词, 如 $B_1 = p_1 \vee p_2 \to p_3$ 等.

**注 3.2.25** 因为可证等价关系是保持定理的,所以当 $A$ 是定理时(3.2.1)式的右边公式也就是定理. 例如,由 $A\to(B\to A)$ 是公理从而也是定理以及 $B\to A\sim\neg A\to\neg B$ 立即得出 $\vdash A\to(\neg A\to\neg B)$. 或以 $C$ 记 $\neg B$,就得到

$$\vdash(A\to(\neg A\to C)). \tag{3.2.3}$$

这样推出(3.2.3)式比直接证明(3.2.3)式要容易许多. 再如,由($\mathrm{L}^*3$)知 $(A\to(\neg B\to C))\to(\neg B\to(A\to C))$ 是定理,那么由 $\neg B\to C\sim\neg C\to B$ 与 $A\to C\sim\neg C\to\neg A$ 立即得出

$$\vdash(A\to(\neg C\to B))\to(\neg B\to(\neg C\to\neg A)), \tag{3.2.4}$$

而(3.2.4)式是不容易直接证明的. 下面再看两个例子.

**例 3.2.26** 试证 $\vdash\neg A\wedge A\to\neg B\vee B$.

**证** 1° $(A\to B)\vee(B\to A)$ 定理(例 3.2.16v)

2° $(A\to B)\to(\neg A\to B)\vee(A\to B)$ ($\mathrm{L}^*6$),($\mathrm{L}^*7$),HS

3° $(A\to B)\to(\neg A\wedge A\to B)$ 2°,等价定理 viii),代换

4° $(B\to A)\to(\neg A\to\neg B)\vee(A\to\neg B)$ 等价定理 x),($\mathrm{L}^*6$),HS

5° $(B\to A)\to(\neg A\wedge A\to\neg B)$ 4°,等价定理 viii),代换

6° $(A\to B)\vee(B\to A)\to(\neg A\wedge A\to\neg B\vee B)$

引理 3.2.13iv),等价定理 viii),代换

7° $\neg A\wedge A\to\neg B\vee B$ 1°,6°,MP

**例 3.2.27** 试证

$$\vdash(A\to(B\to C))\vee(B\to(\neg A\to C))\vee((B\to C)\to\neg A\vee A).$$

**证** 1° $\neg A\wedge A\to\neg(B\to C)\vee(B\to C)$ 上例定理

2° $(\neg A\wedge A\to\neg(B\to C))\vee(\neg A\wedge A\to(B\to C))$ 1°,等价定理 vii)

3° $((B\to C)\to\neg A\vee A)\vee(\neg A\wedge A\to(B\to C))$

2°,等价定理 ii),v),x),代换

4° $(A\to(B\to C))\vee(\neg A\to(B\to C))\vee((B\to C)\to\neg A\vee A)$

3°,等价定理 iii),viii),x),代换

5° $(A\to(B\to C))\vee(B\to(\neg A\to C))\vee((B\to C)\to\neg A\vee A)$

4°,等价定理 ix),代换

## 3.3 $\mathscr{L}^*$-Lindenbaum 代数与 $R_0$-代数

### 3.3.1 $\mathscr{L}^*$-Lindenbaum 代数

在 1.2 节的 6 中我们曾经介绍过关于经典命题演算的 Lindenbaum 代数 $\bar{F}$,$\bar{F}$ 是 $(\neg,\to)$ 型的全体公式代数 $F(S)$ 关于逻辑等价关系 $\approx$ 作商而得的 $(\neg,\to)$ 型代

数,那里已证明了 $\bar{F}$ 是 Boole 代数. 对经典命题逻辑而言,由于完备性定理成立,逻辑等价关系≈与可证等价关系~是一致的,所以 $F(S)/\approx = F(S)/\sim$. 关于我们的系统 $\mathscr{L}^*$,也可对 $(\neg, \vee, \to)$ 型的公式代数 $F(S)$ 按可证等价或逻辑等价作商而得出相应的商代数来. 只是迄今为止我们还没有讨论 $\mathscr{L}^*$ 的语义理论,所以在本章中我们先考虑 $F(S)$ 关于可证等价关系~所作的商代数.

**定理 3.3.1**　设 $F(S)$ 是 $(\neg, \vee, \to)$ 型公式代数. ~是 $\mathscr{L}^*$ 中的可证等价关系,则可在 $(\neg, \vee, \to)$ 型商代数 $[F] = F(S)/\sim$ 引入偏序≤使得

i) $([F], \leqslant)$ 构成一个有界分配格,且对 $[F]$ 中任二元 $a = [A]$ 与 $b = [B]$,$a \vee b = [A \vee B]$ 恰为 $a$ 与 $b$ 在这个格中的上确界,$a \wedge b = [A \wedge B]$ 恰为 $a$ 与 $b$ 在这个格中的下确界.

ii) 对 $[F]$ 中任二元 $a = [A]$ 与 $b = [B]$,$\neg\neg a = a$,且若 $a \leqslant b$,则 $\neg b \leqslant \neg a$. 即 $\neg : [F] \to [F]$ 是 $([F], \leqslant)$ 上的逆序对合对应.

iii) 以 $f(a,b)$ 记 $[F]$ 上的蕴涵运算 $a \to b$,则

1°　$f(\neg a, \neg b) = f(b,a)$.

2°　$f(1,a) = a, f(a,a) = 1$.

3°　$f(b,c) \leqslant f(f(a,b), f(a,c))$.

4°　$f(a, f(b,c)) = f(b, f(a,c))$.

5°　$f(a, b \vee c) = f(a,b) \vee f(a,c)$,

　　$f(a, b \wedge c) = f(a,b) \wedge f(a,c)$.

6°　$f(a,b) \vee f(f(a,b), \neg a \vee b) = 1$.

这里 1 是 $([F], \leqslant)$ 中的最大元. 以下称 $([F], \leqslant)$ 为 **$\mathscr{L}^*$-Lindenbaum 代数**,简记为 $[F]$.

**证**　i) 由命题 3.2.14 知可证等价关系~是 $F(S)$ 上的同余关系,这一点保证了等价类之间的 $(\neg, \vee, \to)$ 型运算与各类中代表元的选取无关. 对 $F(S)$ 中的每个公式 $A$,以 $[A]$ 表示 $A$ 所在的等价类,则

$$\begin{aligned} \neg [A] &= [\neg A], \\ [A] \vee [B] &= [A \vee B], \\ [A] \to [B] &= [A \to B]. \end{aligned} \tag{3.3.1}$$

应该注意的是,以上第二式中的 $[A] \vee [B]$ 还没有 $[A]$ 与 $[B]$ 的上确界的意思,因为在 $[F]$ 中还没有引进偏序.

现定义≤如下:

$$[A] \leqslant [B] \quad \text{当且仅当} \quad \vdash A \to B. \tag{3.3.2}$$

易证(3.3.2)式与 $[A]$,$[B]$ 中代表元 $A$,$B$ 的选取无关. 又,

1°　由 $\vdash A \to A$ 知 $[A] \leqslant [A]$ 成立.

2°　由 $[A] \leqslant [B]$ 且 $[B] \leqslant [A]$ 知 $\vdash A \to B$ 且 $\vdash B \to A$,从而 $A$ 与 $B$ 在同一可证

等价关系的类中,即$[A]=[B]$.

3° 由$[A]\leqslant[B]$且$[B]\leqslant[C]$知$\vdash A\to B$且$\vdash B\to C$,从而由 HS 知$\vdash A\to C$,即$[A]\leqslant[C]$.

所以$\leqslant$是$[F]$上的偏序.

设$A$是$\mathscr{L}^*$中的定理,则易证对每个$B\in F(S)$,$\vdash B\to A$. 所以由(3.3.2)式知$A$所在的等价类$[A]$是$[F]$中的最大元. 这时$\vdash\neg A\to B$对每个$B$都成立,所以由(3.3.2)式知$\neg A$所在的等价类$[\neg A]$是$[F]$中的最小元. 以下分别用1和0记$[F]$中的最大元与最小元.

设$A,B\in F(S)$,则$\vdash A\to A\vee B$,$\vdash B\to A\vee B$. 由此可知$[A\vee B]$是$[A]$与$[B]$在$[F]$中的上界. 设$[C]$是$[A]$与$[B]$的任一上界,则$\vdash A\to C$且$\vdash B\to C$. 由引理3.2.13iii)得$\vdash A\vee B\to C$,故$[A\vee B]\leqslant[C]$. 这就证明了$[A\vee B]$是$[A]$与$[B]$在$[F]$中的上确界. 那么由(3.3.1)式,$[A]\vee[B]$就具有了$[A]$与$[B]$的上确界的含义. 同理可证$[A\wedge B]$是$[A]$与$[B]$在$[F]$中的下确界,即

$$[A]\wedge[B]=[A\wedge B]=\inf\{[A],[B]\}.\tag{3.3.3}$$

注意,因为$A\wedge B$是$F(S)$中$\neg(\neg A\vee\neg B)$的简写,故由(3.3.1)式得

$$[A\wedge B]=[\neg(\neg A\vee\neg B)]=\neg(\neg[A]\vee\neg[B]).$$

从而由(3.3.3)式得

$$[A]\wedge[B]=\neg(\neg[A]\vee\neg[B]).\tag{3.3.4}$$

(3.3.4)式说明$[A]$与$[B]$的下确界也可理解为(3.3.4)式右边的简写.

至此已证明了$[F]$是有最大元1与最小元0的格. 由(3.3.1)式、(3.3.3)式以及等价定理的 vi)便知$[F]$是分配格.

ii)由等价定理的 ii)知$\neg:[F]\to[F]$是对合对应. 再由该定理的 x)可证$\neg$还是逆序对应. 故$\neg$是$[F]$上的逆序对合对应.

iii)的证明如下:设$a=[A],b=[B],c=[C]$.

1° 由(3.3.1)式及等价定理的 x)有

$$\begin{aligned}f(\neg a,\neg b)&=\neg[A]\to\neg[B]=[\neg A\to\neg B]\\&=[B\to A]=[B]\to[A]=f(b,a).\end{aligned}$$

2° 任取$\mathscr{L}^*$中的定理$B$,则$1=[B]$. 易证这时$B\to A\sim A$,所以$f(1,a)=1\to a=[B]\to[A]=[B\to A]=[A]=a$. 又,$f(a,a)=1$是显然的.

3° 由(3.3.2)式与$(L^*4)$知$[B\to C]\leqslant[(A\to B)\to(A\to C)]$. 由此以及(3.3.1)式立即得出$f(b,c)\leqslant f(f(a,b),f(a,c))$.

4° 由(3.3.2)式与$(L^*3)$得

$$[A\to(B\to C)]\leqslant[B\to(A\to C)].$$

由此以及(3.3.1)式立即得出$f(a,f(b,c))=f(b,f(a,c))$.

5° 由等价定理的 vii)即得.

6° 由公理(L*10)即得.

**注 3.3.2** 由[$F$]上逆序对合对应¬的存在可证 De Morgan 对偶律成立[23],即

$$\neg([A]\vee[B])=\neg[A]\wedge\neg[B],\quad \neg([A]\wedge[B])=\neg[A]\vee\neg[B]. \tag{3.3.5}$$

这一点也可从等价定理的 v)直接得出. 为方便计,以下改用"′"表示"¬"并用小写字母 $a,b$ 等分别表示等价类[$A$],[$B$]等,则(3.3.5)式可写作

$$(a\vee b)'=a'\wedge b',\quad (a\wedge b)'=a'\vee b'. \tag{3.3.6}$$

### 3.3.2 $R_0$-代数

(1)定义

以上述 $\mathscr{L}^*$-Lindenbaum 代数为背景,我们引入下面的定义.

**定义 3.3.3** 设 $M$ 是$(\neg,\vee,\to)$型代数. 如果

i) $M$ 上有偏序≤使$(M,\leq)$成为有界分配格,且∨是关于序≤的 $M$ 中的上确界运算.

ii) ¬ 是关于序≤而言的 $M$ 上的逆序对合对应.

iii) 对 $M$ 中任二元 $a$ 与 $b$,以 $f(a,b)$ 记 $a\to b$,则

1° $f(\neg a,\neg b)=f(b,a)$.

2° $f(1,a)=a$, $f(a,a)=1$.

3° $f(b,c)\leq f(f(a,b),f(a,c))$.

4° $f(a,f(b,c))=f(b,f(a,c))$.

5° $f(a,b\vee c)=f(a,b)\vee f(a,c)$,

$f(a,b\wedge c)=f(a,b)\wedge f(a,c)$.

6° $f(a,b)\vee f(f(a,b),\neg a\vee b)=1$.

这里 1 是 $M$ 中的最大元,那么称 $M$ 为 $R_0$-代数. 以后经常用 $a'$表示¬ $a$.

(2)例子

**例 3.3.4** 设 $B$ 是 Boole 代数,对 $B$ 中任二元 $a$ 与 $b$,规定¬ $a=a'$,这里 $a'$是 $a$ 的补元. 规定

$$a\to b=a'\vee b. \tag{3.3.7}$$

则 $B$ 成为 $R_0$-代数. 事实上,$B$ 自然是有界分配格,且由¬ $a$ 是 $a$ 的补元 $a'$知¬ $:B\to B$ 是 $B$ 上的逆序对合对应. 以下证明条件 iii)成立. 由 Boole 代数的性质得

1° $f(\neg a,\neg b)=a'\to b'=(a')'\vee b'$

$=b'\vee a=b\to a=f(b,a)$.

2° $f(1,a)=1'\vee a=0\vee a=a$. $f(a,a)=a'\vee a=1$.

3° $f(f(a,b),f(a,c))=(a'\vee b)'\vee(a'\vee c)$

$$= (a \wedge b') \vee (a' \vee c)$$
$$= (a \vee a' \vee c) \wedge (b' \vee a' \vee c)$$
$$= b' \vee a' \vee c \geqslant b' \vee c = f(b,c).$$

4° $f(a,f(b,c)) = a' \vee (b' \vee c) = b' \vee (a' \vee c)$
$= f(b,f(a,c))$.

5° $f(a,b \vee c) = a' \vee (b \vee c) = (a' \vee b) \vee (a' \vee c)$
$= f(a,b) \vee f(a,c)$.

又由 Boole 代数为分配格得

$$f(a,b \wedge c) = a' \vee (b \wedge c) = (a' \vee b) \wedge (a' \vee c)$$
$$= f(a,b) \wedge f(a,c).$$

6° 由 $f(a,b) = a' \vee b$ 得

$$f(a,b) \vee f(f(a,b), a' \vee b) \geqslant f(a' \vee b, a' \vee b) = 1.$$

综上所述知 Boole 代数是 $R_0$-代数，其中蕴涵由(3.3.7)式确定.

**例 3.3.5** 取 $M = [0,1]$. 对 $a,b \in [0,1]$，令 $\neg a = a' = 1 - a$，$a \vee b$ 为 $a$ 与 $b$ 的上确界. 但令

$$a \to b = f(a,b) = R_0(a,b) = \begin{cases} 1, & a \leqslant b, \\ a' \vee b, & a \nleqslant b. \end{cases}$$

则 $M$ 成为 $R_0$-代数. 今后称此 $M$ 为 **$R_0$-单位区间**，记作 $\overline{W}$.

只需证明 $R_0$-代数的条件 iii)

1° 设 $a' \leqslant b'$，则 $b \leqslant a$. 这时

$$f(a',b') = 1 = f(b,a).$$

设 $a' > b'$，则 $a < b$，这时仍有

$$f(a',b') = (a')' \vee b' = b' \vee a = f(b,a).$$

2° 若 $a < 1$，则 $f(1,a) = 1' \vee a = 0 \vee a = a$. 若 $a = 1$，则 $f(1,a) = 1 = a$. 又，$f(a,a) = 1$ 显然成立.

3° 易证对于 $\overline{W}$ 而言，$f(x,y)$ 关于 $y$ 不减，关于 $x$ 不增. 设 $e = f(f(a,b), f(a,c))$，则当 $b \leqslant c$ 时，$e = 1 \geqslant f(b,c)$. 当 $a \leqslant b$ 时，$e = f(a,c) \geqslant f(b,c)$. 故不妨设 $a > b > c$，并不妨设 $f(a,b) > f(a,c)$，即 $a' \vee b > a' \vee c$. 如此则必有 $a' < b$. 从而 $e = f(a' \vee b, a' \vee c) = f(b, a' \vee c) \geqslant f(b,c)$. 总之，$e \geqslant f(b,c)$. 所以性质 3° 成立.

4° 由对称性知只需证明 $f(a,f(b,c)) \leqslant f(b,f(a,c))$. 若 $a > f(b,c)$，则 $f(a,f(b,c)) = a' \vee (b' \vee c) = b' \vee (a' \vee c) \leqslant f(b,f(a,c))$. 若 $a \leqslant f(b,c)$，则当 $b \leqslant c$ 时 $b \leqslant f(a,c)$，从而 $f(b,f(a,c)) = 1 \geqslant f(a,f(b,c))$. 故可设 $b > c$. 这时 $a \leqslant b' \vee c$. 若 $a \leqslant c$，则由 $f(a,c) = 1$ 知 $f(a,f(b,c)) \leqslant f(b,f(a,c))$. 若 $a \leqslant b'$，则 $b \leqslant a' \leqslant f(a,c)$. 仍有 $f(b,f(a,c)) = 1 \geqslant f(a,f(b,c))$.

5°　由于 $f(x,y)$ 仍然关于 $y$ 单调递增,故可像例 3.3.4 一样证明条件 5°中的两个等式成立.

6°　不妨设 $a>b$,这时由 $f(a,b)=a'\vee b$ 知条件 6°成立.

**例 3.3.6**　设 $X\neq\varnothing$,$M=[0,1]^X$,这里 $[0,1]$ 是 $R_0$-单位区间,则 $M$ 按点式序以及按点式蕴涵构成 $R_0$-代数，即如果对 $A,B\in M$,规定

$$A\leqslant B \quad 当且仅当对每个 x\in X,\quad A(x)\leqslant B(x),$$

$$(A\to B)(x) = A(x)\to B(x).$$

则 $M$ 成为 $R_0$-代数,叫做 **$R_0$-方体**. 证明留给读者.

**例 3.3.7**　**Łukasiewicz 单位区间**不是 $R_0$-代数. 事实上,令 $a=0.6$,$b=0.4$,则 $f(a,b)=0.8$,$f(a,b)\to a'\vee b=0.8\to 0.4=0.6$. 所以性质 6°不成立.

(3) $R_0$-代数的性质

**命题 3.3.8**　设 $M$ 是 $R_0$-代数,$a,b,c\in M$,则

i) $f(a,b)=1$　当且仅当 $a\leqslant b$.

ii) $f(x,y)$ 关于 $x$ 不增,关于 $y$ 不减且

$$f(a\vee b,c) = f(a,c)\wedge f(b,c),$$

$$f(a\wedge b,c) = f(a,c)\vee f(b,c).$$

iii) $f(a,b)\geqslant a'\vee b$.

iv) $f(a,b)\leqslant f(a\vee c,b\vee c)$,　$f(a,b)\leqslant f(a\wedge c,b\wedge c)$.

v) $f(a,b)\leqslant f(a,c)\vee f(c,b)$.

vi) $f(a,b)\vee f(b,a)=1$.

vii) $a\leqslant f(f(a,b),b)$.

**证**　i) 设 $f(a,b)=1$,则 $a=f(1,a)=f(a',0)\leqslant f(f(b',a'),f(b',0))=f(f(a,b),f(1,b))=f(1,b)=b$. 故 $a\leqslant b$. 反之,设 $a\leqslant b$,则 $b=a\vee b$. 所以 $f(a,b)=f(a,a\vee b)=f(a,a)\vee f(a,b)=1$.

ii) 设 $b\leqslant c$,则由定义 3.3.1 的 5°得

$$f(a,b) = f(a,b\wedge c) = f(a,b)\wedge f(a,c).$$

所以 $f(a,b)\leqslant f(a,c)$. 即 $f(x,y)$ 关于 $y$ 不减. 由定义 3.3.3 的 1°,$f(x,y)=f(y',x')$. 所以由“′”为逆序对合对应知 $f(x,y)$ 关于 $x$ 不增. 最后,由定义 3.3.3 的 1°与 5°得

$$f(a\vee b,c) = f(c',(a\vee b)') = f(c',a'\wedge b')$$
$$= f(c',a')\wedge f(c',b') = f(a,c)\wedge f(b,c).$$

类似可证 $f(a\wedge b,c)=f(a,c)\vee f(b,c)$.

iii) 因为 $a'=f(1,a')=f(a,0)\leqslant f(a,b)$,$b=f(1,b)\leqslant f(a,b)$,所以 $f(a,b)\geqslant a'\vee b$.

iv) 注意 $c\leqslant b\vee c$, 从而 $f(c,b\vee c)=1$, 便有

$$f(a\vee c,b\vee c)=f(a,b\vee c)\wedge f(c,b\vee c)$$
$$=f(a,b\vee c)\geqslant f(a,b).$$

类似地,由 $a\wedge c\leqslant c$ 知 $f(a\wedge c,c)=1$,所以

$$f(a\wedge c,b\wedge c)=f(a\wedge c,b)\wedge f(a\wedge c,c)$$
$$=f(a\wedge c,b)\geqslant f(a,b).$$

v) $f(a,b)\leqslant f(a\vee c,b\vee c)=f(a\vee c,b)\vee f(a\vee c,c)$
$=[f(a,b)\wedge f(c,b)]\vee[f(a,c)\wedge f(c,c)]$
$=[f(a,b)\wedge f(c,b)]\vee f(a,c)$
$\leqslant f(a,c)\vee f(c,b).$

vi) 和 vii) 的证明作为练习留给读者.

**注 3.3.9** i) 当 $M$ 为 Boole 代数时,命题 3.3.8 中的 iii) 可加强为 $f(a,b)=a'\vee b$. 但一般来说等式不成立. 例如,令 $M$ 为 $R_0$-区间 $[0,1]$,令 $a=b=\frac{1}{2}$,则 $f(a,b)=1$,但 $a'\vee b=\frac{1}{2}$.

ii) 对于 Heyting 代数而言,$a\leqslant b\to c$ 当且仅当 $a\wedge b\leqslant c$. 但对一般的 $R_0$-代数 $M$ 而言,只有一半是成立的,即当 $a\wedge b\leqslant c$, 时 $a\leqslant b\to c$. 事实上,设 $a\wedge b\leqslant c$,则由 $f(x,y)$ 关于 $y$ 不减得

$$f(b,a\wedge b)\leqslant f(b,c).$$

但 $f(b,a\wedge b)=f(b,a)\wedge f(b,b)=f(b,a)\geqslant f(1,a)=a$,所以 $a\leqslant f(b,c)$. 反过来的事实不成立. 例如,在 $R_0$-单位区间中令 $a=0.5,b=0.4,c=0.3$,则由 $f(b,c)=0.6$ 知 $a\leqslant f(b,c)$ 成立. 但 $a\wedge b=0.4\nleqslant 0.3=c$.

iii) 命题 3.3.8 的第 iv) 条中的两个不等式都不能改为等式. 仍考虑 $R_0$-单位区间,当 $c\geqslant a>b$ 时,第一不等式左方 $f(a,b)=a'\vee b<1$,但右方为 $f(c,c)=1$. 故 $f(a,b)$ 不必等于 $f(a\vee c,b\vee c)$. 当 $a>b\geqslant c$ 时,第二个不等式的左方严格小于右方. 请读者考虑何时以上不等式成为等式,并对第 v) 条性质作同样的讨论.

### 3.3.3 同态、子 $R_0$-代数与生成元集

**定义 3.3.10** 设 $M_1$ 与 $M_2$ 为 $R_0$-代数,$h:M_1\to M_2$ 是映射. 如果对 $x,y\in M_1$,$h(\neg x)=\neg h(x)$,$h(x\vee y)=h(x)\vee h(y)$,$h(x\to y)=h(x)\to h(y)$,则称 $h$ 为 **$R_0$-代数同态**,简称**同态**.

**定义 3.3.11** 设 $M$ 为 $R_0$-代数,$M_1$ 是 $M$ 的非空子集. 如果 $M_1$ 对 $\neg$, $\vee$ 与 $\to$ 运算封闭,则称 $M_1$ 为 $M$ 的**子 $R_0$-代数**.

**例 3.3.12** 设 $M$ 为 $R_0$-代数,则 $M$ 有两个平凡的子 $R_0$-代数,一个是 $M$ 自身,一个是 $M_1=\{0,1\}$,它是 $M$ 的最小子 $R_0$-代数. $M$ 的若干个子 $R_0$-代数的交显然

仍是 $M$ 的子 $R_0$-代数.

**命题 3.3.13**　设 $M_1, M_2$ 为 $R_0$-代数, $h: M_1 \to M_2$ 是同态, 则 $h(M_1)$ 是 $M_2$ 的子 $R_0$-代数.

**证**　设 $x, y \in h(M_1)$, 则有 $a, b \in M_1$ 使 $x = h(a), y = h(b)$. 这时 $\neg x = \neg h(a) = h(\neg a) \in h(M_1)$, $x \vee y = h(a) \vee h(b) = h(a \vee b) \in h(M_1)$, $x \to y = h(a) \to h(b) = h(a \to b) \in h(M_1)$. 所以 $h(M_1)$ 是 $M_2$ 的子 $R_0$-代数.

注意, 同态 $h$ 一定把 1 射为 1, 把 0 射为 0. 事实上, $h(1) = h(a \to a) = h(a) \to h(a) = 1$. $h(0) = h(\neg 1) = \neg h(1) = \neg 1 = 0$. 同态的复合显然仍为同态.

**定义 3.3.14**　设 $M$ 是 $R_0$-代数, $T$ 是 $M$ 的非空子集, 则一切包含 $T$ 的 $M$ 的子 $R_0$-代数之交仍为 $M$ 的子 $R_0$-代数, 叫做**由 $T$ 生成的子 $R_0$-代数**, 记作 $C(T)$. 当 $C(T) = M$ 时称 $M$ 由 $T$ 生成.

**命题 3.3.15**　设 $M$ 是 $R_0$-代数, $T$ 是 $M$ 的非空子集, 则 $C(T)$ 的结构如下: i) $T$ 中的元都属于 $C(T)$, ii) 若 $x, y \in C(T)$, 则 $\neg x, x \vee y$ 与 $x \to y$ 也属于 $C(T)$. iii) $C(T)$ 中再不包含其他的元.

**证**　由上述性质介定的集显然包含 $T$ 且对 $\neg$, $\vee$ 与 $\to$ 运算封闭. 任一包含 $T$ 的子 $R_0$-代数都包含具有上述性质的集. 所以上述集就是 $C(T)$.

**定义 3.3.16**　设 $T$ 是 $R_0$-代数 $M$ 的非空子集, $g_0: T \to \overline{W}$ 是映射. 若 $g_0$ 可扩张为同态 $g: M \to \overline{W}$, 则称序对 $(T, g_0)$ 是**相容的**.

**例 3.3.17**　考虑 $\mathscr{L}^*$-Lindenbaum 代数 $[F] = F(S)/\sim$ 的子集

$$T = \{[p] \mid p \in S\},$$

则对任一映射 $g_0: T \to \overline{W}$, $(T, g_0)$ 都是相容的. 事实上, 设有映射 $g_0: T \to \overline{W}$, 令 $v_0: S \to \overline{W}$ 定义为 $v_0(p) = g_0([p])$, 则由 $F(S)$ 是由 $S$ 生成的 $(\neg, \vee, \to)$ 型自由代数知 $v_0$ 可扩张为同态 $v: F(S) \to \overline{W}$. 令 $g: [F] \to \overline{W}$ 定义为 $g([A]) = v(A)$, 则易证 $g$ 的定义不依赖于 $[A]$ 中代表元的选取从而是合理的, 且由 $v$ 为同态知 $g$ 也为同态. 显然, $g([p]) = v(p) = v_0(p) = g_0([p])$ 对每个 $p \in S$ 都成立, 所以 $g$ 是 $g_0$ 的扩张.

### 3.3.4　$R_0$-代数的乘积

例 3.3.6 中的 $R_0$-方体是 $R_0$-代数乘积的一个特例.

**定义 3.3.18**　设 $\{M_i \mid i \in I\}$ 是一族 $R_0$-代数, $M = \prod_{i \in I} M_i$ 是它们的直积. 在 $M$ 中规定: 设 $x = \{x_i\} \in M, y = \{y_i\} \in M$, 则

$$\neg x = \{\neg x_i\}, \quad x \vee y = \{x_i \vee y_i\}, \quad x \to y = \{x_i \to y_i\},$$

即在 $M$ 中按坐标定义 $\neg$, $\vee$ 与 $\to$ 运算, 则 $M$ 显然构成一 $R_0$-代数, 叫 $R_0$-代数族 $\{M_i \mid i \in I\}$ 的**乘积 $R_0$-代数**.

$R_0$ 方体$[0,1]^X$是 $I=X$ 且对每个 $i\in I, M_i=\overline{W}$ 的一族 $\overline{W}$ 的乘积 $R_0$-代数.

**后记** 若在 $\mathscr{L}^*$ 中再增添两条新公理,即

$(L^*11)$ $A\to(B\to A\wedge B)$,

$(L^*12)$ $(A\to B)\wedge(A\to C)\to(A\to B\wedge C)$,

则在两条推理规则中可删去交推理规则而仅保留 MP 规则. 这一点是博士研究生裴道武指出的.

# 第4章 $\mathscr{L}^*$ 中的语义理论与 Fuzzy 推理的逻辑基础

本章中先讨论与 $\mathscr{L}^*$ 相应的语义理论. 其次,引入并讨论一类特殊的部分赋值重言式. 然后将当前流行的 Fuzzy 推理算法加以改造,引入三 I 算法,并利用特殊的部分赋值把 Fuzzy 推理纳入逻辑框架中,最后将三 I 方法进一步推广. 引入并讨论命题间的支持度理论.

## 4.1 $\mathscr{L}^*$ 的语义与可靠性定理

设 $F(S)$ 是全体$(\neg, \vee, \to)$型公式的集,$\overline{\Omega}$ 是全体 $F(S)$ 的赋值 $v: F(S) \to \overline{W}$ 之集,这里 $\overline{W}$ 是 $R_0$-单位区间.

### 4.1.1 可靠性定理

**定理 4.1.1**(可靠性定理) $\mathscr{L}^*$ 中的每个定理都是 $\overline{\Omega}$-重言式,即若 $A \in F(S)$ 且 $\vdash A$,则 $\models A$. 这里 $\models A$ 表示 $A$ 是 $\overline{\Omega}$-重言式.

**证** 为证明本定理可证 $\mathscr{L}^*$ 中的公理都是 $\overline{\Omega}$-重言式,并且 MP 规则与交推理规则都保持 $\overline{\Omega}$-重言式.

设 $A_1, \cdots, A_t$ 是 $F(S)$ 中的公式,$E = g(A_1, \cdots, A_t)$ 是用$\neg$, $\vee$ 与$\to$把以上公式连接而得的公式,$v \in \overline{\Omega}$. 则由 $v$ 为同态知

$$v(E) = \bar{g}(v(A_1), \cdots, v(A_t)). \tag{4.1.1}$$

这里 $v(A_i)(1 \leqslant i \leqslant t)$ 已成为 $R_0$-单位区间 $\overline{W}$ 中的实数,$\bar{g}$ 作用于这些实数的方式恰如 $g$ 作用于这些公式 $A_i(1 \leqslant i \leqslant t)$ 的方式. 对公式 $A, B, C$,分别以 $a, b, c$ 记 $v(A), v(B), v(C)$. 设 $x, y \in \overline{W}$,以 $f(x, y)$ 记 $x \to y$. 注意,$v$ 为同态从而 $v(\neg A) = a'$, $v(A \vee B) = a \vee b$, $v(A \wedge B) = a \wedge b$ 等,则易见 $\mathscr{L}^*$ 中各公理的 $v$-赋值分别为

1° $f(a, f(b, a))$.

2° $f(f(a', b'), f(b, a))$.

3° $f(f(a, f(b, c)), f(b, f(a, c)))$.

4° $f(f(b, c), f(f(a, b), f(a, c)))$.

5° $f(a, (a')')$.

6° $f(a, a \vee b)$.

7°　$f(a\vee b,b\vee a)$.

8°　$f(f(a,c)\wedge f(b,c),f(a\vee b,c))$.

9°　$f(f(a\wedge b,c),f(a,c)\vee f(b,c))$.

10°　$f(a,b)\vee f(f(a,b),a'\vee b)$.

易证以上各式的值均等于1. 事实上,由 $R_0$-代数的性质知 $f(b,a)\geqslant f(1,a)=a$,故1°式的值为1. $f(a',b')=f(b,a)$,故2°的值为1. 3°式与4°式的值为1可以从 $R_0$-代数定义中的性质4°与3°得出. 5°,6°,7°各式的值为1是显然的. 8°,9°两式的值为1可以从以下两式得出:

$$f(a\vee b,c)=f(a,c)\wedge f(b,c),$$
$$f(a\wedge b,c)=f(a,c)\vee f(b,c).$$

最后由 $R_0$-代数的定义3.3.3的6°知10°的值为1.

至此已证明了 $\mathscr{L}^*$ 中的10条公理都是 $\overline{\Omega}$-重言式. 以下证明两条推理规则都保持 $\overline{\Omega}$-重言式. 事实上,设 $A$ 与 $A\to B$ 都是 $\overline{\Omega}$-重言式,则对任一 $v\in\overline{\Omega}$, $v(A)=v(A\to B)=1$,从而

$$v(B)=f(1,v(B))=f(v(A),v(B))=v(A\to B)=1.$$

所以 $B$ 是 $\overline{\Omega}$-重言式,即MP规则保持 $\overline{\Omega}$-重言式. 再设 $A\to B$ 与 $A\to C$ 都是 $\overline{\Omega}$-重言式,则对任一 $v\in\overline{\Omega}$, $v(A\to B)=v(A\to C)=1$,从而

$$\begin{aligned}v(A\to B\wedge C)&=f(v(A),v(B)\wedge v(C))\\&=f(v(A),v(B))\wedge f(v(A),v(C))\\&=v(A\to B)\wedge v(A\to C)=1.\end{aligned}$$

所以 $A\to B\wedge C$ 是 $\overline{\Omega}$-重言式,即交推理规则也保持 $\overline{\Omega}$-重言式.

由以上所证及 $\mathscr{L}^*$ 中"证明"的定义知 $\mathscr{L}^*$ 中的定理都是 $\overline{\Omega}$-重言式. 定理4.1.1表明了 $\mathscr{L}^*$ 中的语构关于语义 $\overline{\Omega}$ 是可靠的.

**注4.1.2**　i)经典命题演算中的定理不必为 $\overline{\Omega}$-重言式. 例如,那里的公理

$$\text{(L2)}\qquad (A\to(B\to C))\to((A\to B)\to(A\to C))$$

就不是 $\overline{\Omega}$-重言式. 事实上,取 $A,B,C\in F(S)$ 以及赋值 $v\in\overline{\Omega}$ 使 $v(A)=v(B)=\frac{1}{2}$, $v(C)=0$(这是可行的,因为只需令 $A,B,C$ 分别为 $S$ 中的原子公式 $p,q,r$,那么对它们的赋值就可以任意指定). 这时(L2)在赋值 $v$ 下的值为

$$f\left(f\left(\frac{1}{2},f\left(\frac{1}{2},0\right)\right),f\left(f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),f\left(\frac{1}{2},0\right)\right)\right)$$

$$=f\left(f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),f\left(1,\frac{1}{2}\right)\right)=f\left(1,\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\neq 1.$$

所以(L2)不是 $\overline{\Omega}$-重言式.

请读者自行证明(L2)是 $\frac{1}{2}$-重言式.

ii) 在系统 $\mathscr{L}^*$ 中,演绎定理不成立,即从 $\Gamma\cup\{A\}\vdash B$ 一般得不出 $\Gamma\vdash A\to B$ 来,这里 $\Gamma\subset F(S)$, $A,B\in F(S)$. 事实上,设演绎定理成立,令 $\Gamma=\{A\to(B\to C), A\to B\}$,则 $\Gamma\cup\{A\}\vdash C$:

| | | |
|---|---|---|
| 1° | $A$ | $\Gamma\cup\{A\}$ 中的成员 |
| 2° | $A\to B$ | $\Gamma\cup\{A\}$ 中的成员 |
| 3° | $B$ | 1°,2°,MP |
| 4° | $A\to(B\to C)$ | $\Gamma\cup\{A\}$ 中的成员 |
| 5° | $B\to C$ | 1°,4°,MP |
| 6° | $C$ | 3°,5°,MP |

那么由演绎定理得 $\Gamma\vdash(A\to C)$,即 $\{A\to(B\to C),A\to B\}\vdash A\to C$,再使用演绎定理两次得 $\{A\to(B\to C)\}\vdash(A\to B)\to(A\to C)$, $\vdash(A\to(B\to C))\to((A\to B)\to(A\to C))$. 这表示(L2)是 $\mathscr{L}^*$ 中的定理,从而是 $\overline{\Omega}$-重言式,矛盾.

### 4.1.2　语义 MP 规则与语义 HS 规则

在上面证明可靠性定理时我们已经证明了**语义 MP 规则**,即若 $A$ 与 $A\to B$ 都是 $\overline{\Omega}$-重言式,则 $B$ 也是 $\overline{\Omega}$-重言式. 以符号写出来就是:

$$\text{若}\models A\quad\text{且}\quad\models A\to B,\quad\text{则}\quad\models B.\tag{4.1.2}$$

可以证明**语义 HS 规则**也成立,即若 $A\to B$ 与 $B\to C$ 都是 $\overline{\Omega}$-重言式,则 $A\to C$ 也是 $\overline{\Omega}$-重言式,即

$$\text{若}\models A\to B\quad\text{且}\quad\models B\to C,\quad\text{则}\quad\models A\to C.\tag{4.1.3}$$

事实上,设 $v$ 是任一 $\overline{\Omega}$-赋值,则由 $v(A\to B)=v(B\to C)=1$ 知 $v(A)\leqslant v(B)$, $v(B)\leqslant v(C)$,从而 $v(A)\leqslant v(C)$,那么 $v(A\to C)=f(v(A),v(C))=1$. 故 $\models A\to C$.

其实以上证明的事实比(4.1.2)式与(4.1.3)式要强,即已经证明了下述的命题.

**命题 4.1.3**　设 $A,B,C\in F(S)$, $v\in\overline{\Omega}$,则

i) 若 $v(A)=v(A\to B)=1$,则 $v(B)=1$;

ii) 若 $v(A\to B)=v(B\to C)=1$,则 $v(A\to C)=1$.

**推论 4.1.4**　关于 $\overline{\Omega}$ 而言,语义 MP 规则(4.1.2)式与语义 HS 规则(4.1.3)式成立.

**注 4.1.5**　$\alpha$-MP 规则与 $\alpha$-HS 规则并不随着 $\alpha$ 的增大而加强. 例如,推论 4.1.4 说 1-MP 与 1-HS 都成立,但 $\frac{1}{2}$-MP 与 $\frac{1}{2}$-HS 却都不成立. 以 $\frac{1}{2}$-MP 为例. 设 $A=\neg p\vee p$, $B=\neg((p\to\neg p)\wedge(\neg p\to p))$,这里 $p$ 为原子公式. 易见 $A$ 是 $\frac{1}{2}$-重言式. 又当 $v(p)=\frac{1}{2}$ 时 $v(B)=0$,且当 $v(p)\neq\frac{1}{2}$ 时 $v(B)=\neg(v(p)\wedge v(\neg p))=$

$\neg v(p) \vee v(p)$. 由此可知 $A \to B$ 是$\frac{1}{2}$-重言式,但 $B$ 显然不是$\frac{1}{2}$-重言式. 所以$\frac{1}{2}$-MP 规则不成立. 但我们有如下命题.

**命题 4.1.6** 设 $A,B,C \in F(S)$, $v \in \overline{\Omega}$,则

i) 若 $v(A) > \frac{1}{2}$, $v(A \to B) > \frac{1}{2}$,则 $v(B) > \frac{1}{2}$;

ii) 若 $v(A \to B) > \frac{1}{2}$, $v(B \to C) > \frac{1}{2}$,则 $v(A \to C) > \frac{1}{2}$.

**证** i) 因为 $v(A \to B) = f(v(A), v(B))$ 且 $v(A) > \frac{1}{2}$. 若 $v(B) \leqslant \frac{1}{2}$,则 $v(A \to B) = (v(A))' \vee v(B) \leqslant \frac{1}{2}$,矛盾. 故必有 $v(B) > \frac{1}{2}$.

ii) 如果 $v(A \to C) \leqslant \frac{1}{2}$,则

$$v(A \to C) = f(v(A), v(C)) = (v(A))' \vee v(C) \leqslant \frac{1}{2}.$$

那么 $v(C) \leqslant \frac{1}{2}$. 这时若 $v(B) > \frac{1}{2}$,则

$$v(B \to C) = f(v(B), v(C)) = (v(B))' \vee v(C) \leqslant \frac{1}{2},$$

矛盾. 故 $v(B) \leqslant \frac{1}{2}$. 这时由 $v(A \to B) > \frac{1}{2}$ 与 $(v(A))' \leqslant \frac{1}{2}$ 知

$$v(A \to B) = f(v(A), v(B)) \neq (v(A))' \vee v(B).$$

从而必有 $v(A) \leqslant v(B) \leqslant \frac{1}{2}$. 又由 $(v(A))' \leqslant \frac{1}{2}$ 得 $v(A) \geqslant \frac{1}{2}$. 所以 $v(A) = \frac{1}{2}$,那么 $v(B) = \frac{1}{2}$,这时由 $v(B \to C) > \frac{1}{2}$ 与 $v(C) \leqslant \frac{1}{2}$ 知 $v(B) \leqslant v(C)$,从而 $v(C) = \frac{1}{2}$. 最后导致 $v(A \to C) = 1$ 的结论,矛盾. 所以 $v(A \to C) > \frac{1}{2}$ 成立.

**推论 4.1.7** $\left(\frac{1}{2}\right)^+$-MP 规则与 $\left(\frac{1}{2}\right)^+$-HS 规则成立,即

i) 若 $A$ 与 $A \to B$ 都是 $\left(\frac{1}{2}\right)^+$-重言式,则 $B$ 是 $\left(\frac{1}{2}\right)^+$-重言式;

ii) 若 $A \to B$ 与 $B \to C$ 都是 $\left(\frac{1}{2}\right)^+$-重言式,则 $A \to C$ 是 $\left(\frac{1}{2}\right)^+$-重言式.

设 $\Sigma$ 是 $\overline{\Omega}$ 的非空子集,则在以上各结论中把 $\overline{\Omega}$ 换为 $\Sigma$ 时各结论仍成立,可以证明下面的命题.

**命题 4.1.8** 设 $A,B,C \in F(S)$, $v \in \Sigma$, $\alpha > \frac{1}{2}$,则

i) 若 $v(A)\geqslant\alpha, v(A\to B)\geqslant\alpha$，则 $v(B)\geqslant\alpha$；

ii) 若 $v(A\to B)\geqslant\alpha, v(B\to C)\geqslant\alpha$，则 $v(A\to C)\geqslant\alpha$；

**证**　以 i) 为例，若 $v(A\to B)=1$，则 $v(B)\geqslant v(A)\geqslant\alpha$. 若 $v(A\to B)<1$，则 $v(A\to B)=(v(A))'\vee v(B)\geqslant\alpha$，由 $\alpha>\frac{1}{2}$ 知 $(v(A))'\leqslant\alpha'<\frac{1}{2}\leqslant\alpha$，所以 $v(B)\geqslant\alpha$.

在第 2 章中已经看到，关于 $\overline{\Omega}$ 而言的广义重言式只有 $\frac{1}{2}$-重言式与 $\left(\frac{1}{2}\right)^+$-重言式，再就是重言式. 但关于部分赋值 Σ 而言，可能有 0.7-重言式、0.8-重言式（且不是重言式）等. 由上述命题可得如下推论.

**推论 4.1.9**　设 $A,B,C\in F(S)$，$\alpha>\frac{1}{2}$，则

i) 若 $A$ 与 $A\to B$ 都是 $\Sigma$-($\alpha$-重言式)，则 $B$ 是 $\Sigma$-($\alpha$-重言式)；

ii) 若 $A\to B$ 与 $B\to C$ 都是 $\Sigma$-($\alpha$-重言式)，则 $A\to C$ 是 $\Sigma$-($\alpha$-重言式).

### 4.1.3　赋值中介

**定义 4.1.10**　设 $G$ 是 $R_0$-代数. 如果对 $F(S)$ 的每个赋值 $v:F(S)\to\overline{W}$，存在 $(\neg,\vee,\to)$ 型同态 $g:G\to\overline{W}$ 和 $h:F(S)\to G$ 使 $v=g\circ h$，则称 $G$ 为 $F(S)$ 的**赋值中介**. 如果对每个 $v$，$h$ 为同一个同态，则称 $G$ 为**正则赋值中介**.

**例 4.1.11**　i) $\overline{W}$ 是 $F(S)$ 的赋值中介，这时对任一 $v\in\overline{\Omega}$，$g=\mathrm{id}_{\overline{W}}$，$h=v$.

ii) $F(S)$ 关于可证等价关系 ~ 的商代数，即 $\mathscr{L}^*$-Lindenbaum 代数 $[F]$，是 $F(S)$ 的正则赋值中介. 事实上，由定理 3.3.1，$[F]$ 是 $R_0$-代数，设 $v$ 是 $F(S)$ 的任一赋值. 对 $F(S)$ 中的公式 $A$，令 $\varphi(A)=[A]$ 为 $A$ 所在的关于 ~ 的同余类，则 $\varphi:F(S)\to[F]$ 为 $(\neg,\vee,\to)$ 型满同态. 作映射 $g:[F]\to\overline{W}$ 如下：

$$g([A])=v(A),\quad [A]\in[F]. \tag{4.1.4}$$

若 $B\in[A]$，则 $B$ 与 $A$ 可证等价，即 $\vdash B\to A$ 且 $\vdash A\to B$. 由可靠性定理，$v(B\to A)=v(B)\to v(A)=1$，从而 $v(B)\leqslant v(A)$. 同理 $v(A)\leqslant v(B)$，所以 $v(A)=v(B)$. 可见，(4.1.4) 式中给出的 $g$ 的定义与 $[A]$ 中代表元的选取无关，因而是合理的. 又

$$g(\neg[A])=g([\neg A])=v(\neg A)=(v(A))'=(g([A]))';$$

$$\begin{aligned}g([A]\vee[B])&=g([A\vee B])=v(A\vee B)\\&=v(A)\vee v(B)=g([A])\vee g([B]),\\g([A]\to[B])&=g([A\to B])=v(A\to B)\\&=v(A)\to v(B)=g([A])\to g([B]).\end{aligned}$$

所以 $g$ 是 $(\neg,\vee,\to)$ 型同态. 由 (4.1.4) 式，$v(A)=g([A])=g\circ\varphi(A)$，即 $v=g\circ\varphi$. 所以 $[F]$ 是 $F(S)$ 的赋值中介. 因为 $\varphi$ 不随 $v$ 而变，所以 $[F]$ 是 $F(S)$ 的正则赋值中介. 前面已经证明了 $\mathscr{L}^*$ 的语构关于语义 $\overline{\Omega}$ 的可靠性. 而 $\mathscr{L}^*$ 的语构关于语义 $\overline{\Omega}$

完备性尚未得出，即目前尚不知当 $\models A$ 时 $\vdash A$ 是否成立. 但把语义 $\overline{\Omega}$ 适当修改后就可使 $F(S)$ 上的语构 $\mathscr{L}^*$ 关于某新的语义是完备的.

**定义 4.1.12** 设 $M$ 是 $R_0$-代数，$v:F(S)\to M$ 是 $(\neg,\vee,\to)$ 型同态，以 $\Omega_M$ 记这种同态的全体，称 $\Omega_M$ 中的 $v$ 为 $F(S)$ 的 $\Omega_M$-赋值. 设 $A\in F(S)$，若对每个 $v\in\Omega_M$ 恒有 $v(A)=1$，这里 1 是 $M$ 的最大元，则称 $A$ 为 $\Omega_M$-重言式.

以前讨论的 $\overline{\Omega}$-重言式就是 $\Omega_{\overline{W}}$-重言式.

**定理 4.1.13** ($M$-可靠性定理) 设 $M$ 是 $R_0$-代数，则 $\mathscr{L}^*$ 中的定理都是 $\Omega_M$-重言式.

**证** $\mathscr{L}^*$ 的 10 条公理都可像证明定理 4.1.1 那样被证明为 $\Omega_M$-重言式. 两条推理规则显然保持 $\Omega_M$-重言式，所以 $M$-可靠性定理成立.

**推论 4.1.14** $[F]$-可靠性定理成立.

**定理 4.1.15** ($[F]$-完备性定理) 设 $A\in F(S)$，则 $A$ 是 $\mathscr{L}^*$ 中的定理当且仅当 $A$ 是 $\Omega_{[F]}$-重言式.

**证** 回忆 $[F]$ 中序 $\leqslant$ 的定义为

$$[A]\leqslant[B] \quad \text{当且仅当} \quad \vdash A\to B.$$

若 $B$ 为定理，则对每个公式 $A$，$\vdash A\to B$ 成立，即 $[A]\leqslant[B]$ 成立. 所以定理所在的同余类是 $[F]$ 的最大元 1. 同时，定理所在同余类中各公式均与定理可证等价，从而也都是定理，即 $[F]$ 的最大元 1 恰由 $F(S)$ 的全部定理组成. 今设 $F(S)$ 的公式 $A$ 为 $\Omega_{[F]}$-重言式，则对 $F(S)$ 的每个 $\Omega_{[F]}$-赋值 $v$ 均有 $v(A)=1$，特别是对典型映射 $v:F(S)\to[F]$，这里 $v(A)=[A]$，应有 $v(A)=1$，即 $[A]=1$. 所以 $A$ 是定理. 这就证明了凡 $\Omega_{[F]}$-重言式都是定理. 再由推论 4.1.14 便知对 $F(S)$ 的任一公式 $A$，$A$ 是定理当且仅当 $A$ 是 $\Omega_{[F]}$-重言式.

**注 4.1.16** 由上述定理可见 $F(S)$ 的赋值中介 $[F]$ 导出的语义 $\Omega_{[F]}$ 具有较好的性质. 只是 $[F]$ 与 $F(S)$ 过于接近，即设 $M$ 是 $F(S)$ 的任一赋值中介，则从 $F(S)$ 到 $M$ 的同态 $h:F(S)\to M$ 一定可以通过 $[F]$ 的插入而分解为 $h=k\circ\varphi$，这里 $k:[F]\to M$ 为同态，即下面的定理成立(图 4.1).

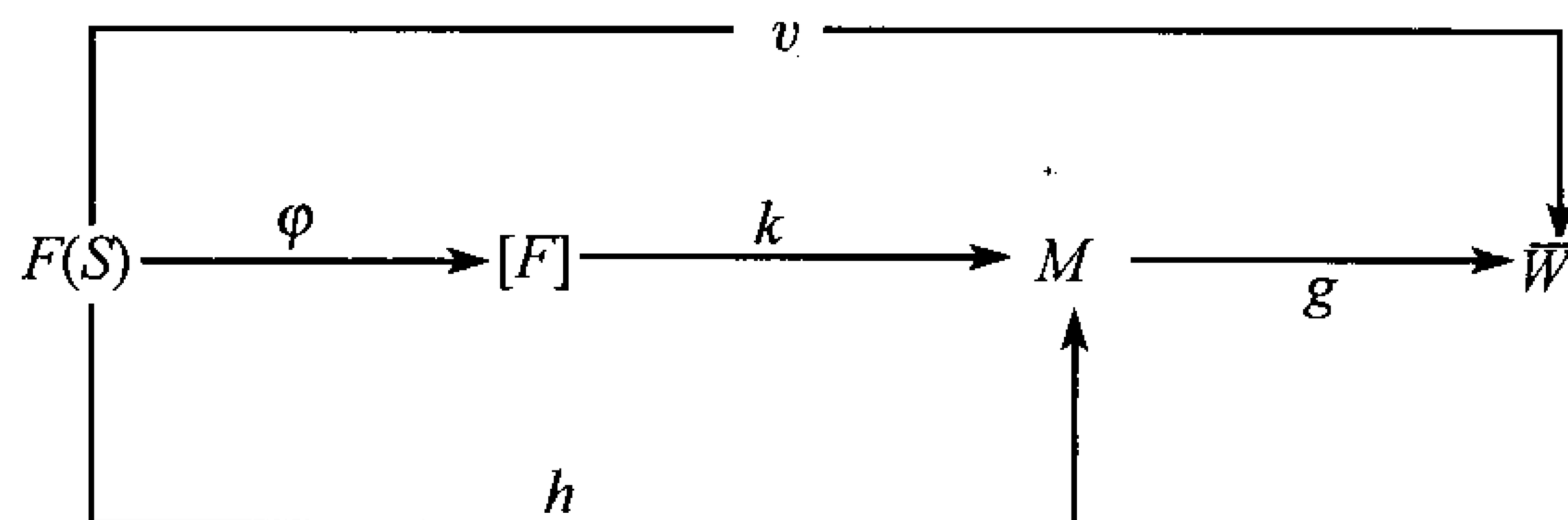



图 4.1

**定理 4.1.17** (分解定理) 设 $M$ 为 $F(S)$ 的任一赋值中介，$v\in\overline{\Omega}$，$v$ 通过 $M$ 的分解为 $v=g\circ h$. 这里 $g:M\to\overline{W}$ 与 $h:F(S)\to M$ 都是 $(\neg,\vee,\to)$ 型同态，则 $h$ 可进

一步通过$[F]$而分解为 $h=k\circ\varphi$. 这里 $k:[F]\to M$ 与 $\varphi:F(S)\to[F]$都是$(\neg,\vee,\to)$型同态.

**证**　由 $M$-可靠性定理4.1.13 知,对 $F(S)$的任一定理 $A$ 均有 $h(A)=1_M$. 特别对 $F(S)$的任意两公式 $A$ 与 $B$,当 $A\sim B$ 时由 $\vdash A\to B$ 且 $\vdash B\to A$ 得

$$h(A\to B)=h(A)\to h(B)=1,$$
$$h(B\to A)=h(B)\to h(A)=1.$$

从而 $h(A)\leqslant h(B)$且 $h(B)\leqslant h(A)$,所以 $h(A)=h(B)$. 由此可知,对$[A]$中每个公式 $B$ 均有 $h(B)=h(A)$. 定义映射 $k:[F]\to M$ 为

$$k([A])=h(A),\tag{4.1.5}$$

则由以上分析知由(4.1.5)式给出的这一定义是合理的. 且由

$$h(A)=k([A])=k\circ\varphi(A)$$

知 $h$ 可通过中介$[F]$而分解为 $h=k\circ\varphi$. 以下只需证 $k$ 为$(\neg,\vee,\to)$型同态. 这由以下各式表明:

$$k(\neg[A])=k([\neg A])=h(\neg A)=\neg h(A)=\neg k([A]),$$
$$\begin{aligned}k([A]\vee[B])&=k([A\vee B])=h(A\vee B)\\&=h(A)\vee h(B)=k([A])\vee k([B]),\\k([A]\to[B])&=k([A\to B])=h(A\to B)\\&=h(A)\to h(B)=k([A])\to k([B]).\end{aligned}$$

**定理4.1.18** (赋值中介的特征定理)　设 $M$ 是 $R_0$-代数,则 $M$ 是 $F(S)$的赋值中介当且仅当

i) 每个映射 $v_0:S\to\overline{W}$ 可通过 $M$ 而分解,即存在 $h_0:S\to M$ 和 $g_0:h_0(S)\to\overline{W}$ 使 $v_0=g_0\circ h_0$.

ii) 序对$(h_0(S),g_0)$是相容的.

**证**　必要性.　设 $M$ 是 $F(S)$的赋值中介,$v_0:S\to\overline{W}$ 是任一映射,则 $v_0$ 可扩张为一个赋值 $v:F(S)\to\overline{W}$. 由 $M$ 为赋值中介知存在同态 $h:F(S)\to M$ 和 $g:M\to\overline{W}$ 使 $v=g\circ h$. 令 $h_0=h|S:S\to M$ 为 $h$ 在 $S$ 上的限制,$g_0=g|h_0(S):h_0(S)\to\overline{W}$ 为 $g$ 在 $h_0(S)$上的限制,则由 $v=g\circ h$ 知 $v_0=g_0\circ h_0$. 由于 $g_0:h_0(S)\to\overline{W}$ 可扩张为同态 $g:M\to\overline{W}$. 所以条件 i)与 ii)都成立.

充分性.　设条件 i)与 ii)都成立. $v:F(S)\to\overline{W}$ 是任一赋值,则 $v_0=v|S:S\to\overline{W}$ 可通过 $M$ 而分解为 $v_0=g_0\circ h_0$. 由 $F(S)$为由 $S$ 生成的自由代数知 $h_0$ 可扩张为同态$h:F(S)\to M$. 由序对$(h_0(S),g_0)$相容知 $g_0:h_0(S)\to\overline{W}$ 可扩张为同态 $g:M\to\overline{W}$. 设$A=f(p_1,\cdots,p_t)\in F(S)$,则

$$\begin{aligned}v(A)&=\bar f(v(p_1),\cdots,v(p_t))=\bar f(v_0(p_1),\cdots,v_0(p_t))\\&=\bar f(g_0\circ h_0(p_1),\cdots,g_0\circ h_0(p_t))\\&=\bar f(g\circ h(p_1),\cdots,g\circ h(p_t))\end{aligned}$$

$$=g\circ h(f(p_1,\cdots,p_t))=g\circ h(A),$$

即 $v=g\circ h$ 成立. 所以 $M$ 是 $F(S)$ 的赋值中介.

**注 4.1.19** 由上述定理可再次看到 $[F]$ 与 $\overline{W}$ 都是 $F(S)$ 的赋值中介. 事实上, 对 $[F]$ 而言, 设 $v_0:S\to\overline{W}$ 为任一映射, 令 $h_0:S\to[F]$ 为典型映射 $\varphi:F(S)\to[F]$ 在 $S$ 上的限制, 即 $h_0(p)=[p]$, 则 $h_0(S)=T=\{[p]\mid p\in S\}$. 再令 $g_0:T\to\overline{W}$ 定义为 $g_0([p])=v_0(p)$, 则 $v_0=g_0\circ h_0$, 且由例 3.3.17 知序对 $(T,g_0)$ 是相容的. 对 $\overline{W}$ 而言, 情况更简单. 设 $v_0:S\to\overline{W}$ 为任一映射, 令 $h_0=v_0$, $g_0$ 为恒等映射即可. 在图 4.1 中看到, $[F]$ 是最贴近 $F(S)$ 的赋值中介, 而 $\overline{W}$ 则是最远离 $F(S)$ 的赋值中介. 这里 $[F]$ 具有较好的性质, 即 $[F]$—完备性定理成立. 由于我们还不知道 $\overline{W}$-完备性是否成立, 自然会有如下问题(见本章末的后记).

**问题 4.1.20** $F(S)$ 是否有异于 $[F]$ 的赋值中介 $M$, 使 $M$-完备性定理成立? 如果有, 那么最贴近 $\overline{W}$ 且使完备性定理成立的赋值中介是什么?

最后我们指出, 我们对赋值中介有特别兴趣的原因是: 设 $R_0$-代数 $M$ 使 $M$-完备性定理成立, 则 $M$ 的幂必有子 $R_0$-代数成为 $F(S)$ 的正则赋值中介, 即我们有如下定理.

**定理 4.1.21** 设 $R_0$-代数 $M$ 使 $M$-完备性成立, 则 $M^{\Omega_M}$ 有子 $R_0$-代数 $M^*$ 使 $M^*$ 成为 $F(S)$ 的正则赋值中介, 这里 $\Omega_M$ 是 $F(S)$ 的全体 $M$-赋值之集.

**证** 作映射 $\psi:F(S)\to M^{\Omega_M}$ 如下:

$$\psi(A)(u)=u(A),\quad u\in\Omega_M,\quad A\in F(S),\tag{4.1.6}$$

则易证 $\psi$ 为同态. 又可证对 $F(S)$ 中任意两公式 $A$ 与 $B$

$$\psi(A)=\psi(B)\quad 当且仅当\quad A\sim B.\tag{4.1.7}$$

事实上, 若 $A\sim B$, 则 $\vdash A\to B$ 与 $\vdash B\to A$ 都成立. 由 $M$-可靠性定理, 对每个 $u\in\Omega_M$, $u(A\to B)=u(B\to A)=1$. 由此可知 $u(A)=u(B)$, 所以由(4.1.6)式得 $\psi(A)=\psi(B)$. 反过来, 设 $\psi(A)=\psi(B)$, 由(4.1.6)式, 这表明对每个 $M$-赋值 $u$ 而言 $u(A)=u(B)$, 那么 $u(A\to B)=u(A)\to u(B)=1$, 即 $A\to B$ 为 $\Omega_M$-重言式. 从而由 $M$-完备性定理知 $\vdash A\to B$. 同理可证 $\vdash B\to A$. 所以 $A\sim B$. 这就证明了(4.1.7)式. 以下设 $M^*=\psi(F(S))$, 则容易验证 $M^*$ 是 $M^{\Omega_M}$ 的子 $R_0$-代数. 今设 $v\in\overline{\Omega}$, 即 $v$ 是 $F(S)$ 的任一 $\overline{W}$-赋值. 定义 $h:F(S)\to M^*$ 使对每个 $A\in F(S)$, $h(A)=\psi(A)$. 定义 $g:M^*\to\overline{W}$ 如下: 设 $x\in M^*$, 则有 $A\in F(S)$ 使 $x=h(A)$. 令 $g(x)=v(A)$. 若 $h(B)=h(A)$, 则由(4.1.7)式得 $B\sim A$, 从而 $v(B)=v(A)$. 这表明定义 $g:M^*\to\overline{W}$ 是合理的. 设 $y=h(B)\in M^*$, 则

$$\begin{aligned}g(\neg x)&=g(\neg h(A))=g(h(\neg A))\\&=v(\neg A)=\neg g(x),\\g(x\vee y)&=g(h(A)\vee h(B))=g(h(A\vee B))\\&=v(A\vee B)=v(A)\vee v(B)=g(x)\vee g(y),\end{aligned}$$

$$g(x\to y)=g(h(A)\to h(B))=g(h(A\to B))$$
$$=v(A)\to v(B)=g(x)\to g(y).$$

所以 $g$ 是同态,且由 $v(A)=g(x)=g\circ h(A)$ 知 $v=g\circ h$ 成立. 这里 $h$ 不随 $v$ 而变,所以 $M^*$ 是 $F(S)$ 的正则赋值中介. 这就证明了本定理.

注意,由上面定理可见 $F(S)$ 的公式 $A$ 是定理当且仅当 $\psi(A)=1$. 这里 $1=1_{M^*}$ 是 $M^*$ 的最大元. 特别是如果 $\overline{W}$-完备性成立,则存在 $R_0$-方体的子 $R_0$-代数 $M^*$,使 $M^*$ 成为 $F(S)$ 的正则赋值中介,且 $A$ 为定理当且仅当 $\psi(A)=1$. 这里 $\psi$ 是固定的从 $F(S)$ 到 $M^*$ 的同态.

### 4.1.4　逻辑等价

**定义 4.1.22**　设 $A,B\in F(S)$. 若对每个 $v\in\overline{\Omega}$ 均有 $v(A)=v(B)$,则称 $A$ 与 $B$ **逻辑等价**,记作 $A\approx B$.

下面的推论是显然的.

**推论 4.1.23**　i) $A\approx B$ 当且仅当 $\models A\to B$ 且 $\models B\to A$,即 $A\to B$ 与 $B\to A$ 都是重言式.

ii) 若 $A\sim B$,则 $A\approx B$.

逻辑等价关系 $\approx$ 显然是 $F(S)$ 上的等价关系. 又设 $A\approx B$, $C\approx D$,则易证 $\neg A\approx\neg B$, $A\vee C\approx B\vee D$, $A\to C\approx B\to D$. 所以逻辑等价关系还是 $F(S)$ 上的同余关系. 我们有如下定理.

**定理 4.1.24**　逻辑等价关系 $\approx$ 是 $F(S)$ 上的同余关系,以 $\overline{F}$ 记商代数 $F(S)/\approx$,则 $\overline{F}$ 是 $R_0$-代数,其中偏序 $\leqslant$ 由下式定义:

$$\overline{A}\leqslant\overline{B}\quad\text{当且仅当}\quad\text{对每个 } v\in\overline{\Omega},\quad v(A)\leqslant v(B).\tag{4.1.8}$$

$\overline{F}$ 称为 $\boldsymbol{R_0}$**-Lindenbaum 代数**.

**证**　易证由(4.1.8)式定义的关系 $\leqslant$ 与 $\overline{A}$ 和 $\overline{B}$ 中代表元的选取无关,从而这个定义是合理的. 显然,$\leqslant$ 是 $\overline{F}$ 上的偏序关系.

由(4.1.8)式知 $\overline{A}\leqslant\overline{A}\vee\overline{B}$, $\overline{B}\leqslant\overline{A}\vee\overline{B}$,因为 $\overline{A}\vee\overline{B}$ 就是 $\overline{A\vee B}$. 又设 $\overline{A}\leqslant\overline{C}$, $\overline{B}\leqslant\overline{C}$,则由(4.1.8)式可证 $\overline{A}\vee\overline{B}\leqslant\overline{C}$,所以 $\overline{A}\vee\overline{B}$ 是 $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 在$(\overline{F},\leqslant)$中的上确界. 类似可证 $\overline{A}\wedge\overline{B}$(即$\overline{A\wedge B}$)是 $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 在$(\overline{F},\leqslant)$中的下确界. 所以$(\overline{F},\leqslant)$是格.

设 $T$ 为任一重言式,$C$ 为任一矛盾式. 由(4.1.8)式易证 $\overline{T}$ 与 $\overline{C}$ 分别为$(\overline{F},\leqslant)$中的最大元 1 与最小元 0. 所以$(\overline{F},\leqslant)$为有界格.

由 $\overline{A}\wedge(\overline{B}\vee\overline{C})=\overline{A\wedge(B\vee C)}=\overline{(A\wedge B)\vee(A\wedge C)}=(\overline{A}\wedge\overline{B})\vee(\overline{A}\wedge\overline{C})$ 知$(\overline{F},\leqslant)$还是分配格.

由(4.1.8)式易证当 $\overline{A}\leqslant\overline{B}$ 时 $\neg\overline{A}\geqslant\neg\overline{B}$. 又,$\neg\neg\overline{A}=\overline{\neg\neg A}=\overline{A}$. 所以 $\neg$ 是$(\overline{F},\leqslant)$上的逆序对合对应.

以下以 $f(\overline{A},\overline{B})$ 记 $\overline{F}$ 中的 $\overline{A}\to\overline{B}$.

1° $f(\neg \bar{A},\neg \bar{B}) = \neg \bar{A}\to\neg \bar{B} = \overline{\neg A\to\neg B}$

$= \overline{B\to A} = \bar{B}\to\bar{A} = f(\bar{B},\bar{A})$.

2° $f(1,\bar{A}) = f(\bar{T},\bar{A}) = \bar{T}\to\bar{A} = \overline{T\to A}$,

这里 $T$ 是重言式. 由于对每个赋值 $v$ 均有 $v(T\to A) = R_0(1,v(A)) = v(A)$,所以 $\overline{T\to A} = \bar{A}$. 所以

$$f(1,\bar{A}) = \overline{T\to A} = \bar{A}.$$

又 $f(\bar{A},\bar{A}) = \bar{A}\to\bar{A} = \overline{A\to A} = \bar{T} = 1$ 成立.

3° 由 $\vdash((B\to C)\to((A\to B)\to(A\to C)))$ 知对每个 $v\in\bar{\Omega}$ 均有

$$v((B\to C)\to((A\to B)\to(A\to C))) = 1$$

或

$$v(B\to C)\leqslant v((A\to B)\to(A\to C)).$$

由此可证得

$$f(\bar{B},\bar{C})\leqslant f(f(\bar{A},\bar{B}),f(\bar{A},\bar{C})).$$

4° 由 $\vdash((A\to(B\to C))\to(B\to(A\to C)))$ 出发,与 3°类似可证

$$f(\bar{A},f(\bar{B},\bar{C})) = f(\bar{B},f(\bar{A},\bar{C})).$$

5° 由可证等价定理 3.2.22vii)与可靠性定理可证

$$f(\bar{A},\bar{B}\vee\bar{C}) = f(\bar{A},\bar{B})\vee f(\bar{A},\bar{C}),$$

$$f(\bar{A},\bar{B}\wedge\bar{C}) = f(\bar{A},\bar{B})\wedge f(\bar{A},\bar{C}).$$

6° 由公理($L^*10$)即得 $R_0$-代数的条件 6°.

这就证明了 $\bar{F}$ 是 $R_0$-代数.

与定理 3.2.23 和推论 3.2.24 类似,我们有如下定理.

**定理 4.1.25** 设 $A$ 由子公式 $B_1,\cdots,B_t$ 通过连接词$\neg$ ,$\vee$ 与$\to$连接而成,$A = f(B_1,\cdots,B_t)$. 如果 $B_i\approx C_i(1\leqslant i\leqslant t)$,则

$$A\approx f(C_1,\cdots,C_t).$$

前面已经证明,$[F]$是 $F(S)$的正则赋值中介,且$[F]$一完备性定理成立. 以下证明 $\bar{F}$ 也是 $F(S)$的正则赋值中介.

**定理 4.1.26** $\bar{F}$ 是 $F(S)$的正则赋值中介.

**证** 定义映射 $\psi:F(S)\to\bar{F}$ 为

$$\psi(A) = \bar{A},\qquad A\in F(S),\tag{4.1.9}$$

则易证 $\psi$ 为同态. 设 $v:F(S)\to\bar{W}$ 为 $F(S)$的任一 $\bar{\Omega}$-赋值,定义映射 $g = g_v:\bar{F}\to\bar{W}$为

$$g_v(\bar{A}) = v(A),\qquad \bar{A}\in\bar{F},\tag{4.1.10}$$

则易证 $g_v$ 也是同态. 显然,$v = g_v\circ\psi$. 因为 $\psi$ 不随 $v$ 而变,所以 $\bar{F}$ 是 $F(S)$的正则赋值中介.

由分解定理 4.1.17 得如下推论.

**推论 4.1.27** $F(S)$的每个 $\bar{\Omega}$-赋值 $v$ 均可分解为

$$v = g_v \circ e \circ \varphi. \tag{4.1.11}$$

这里对每个公式 $A \in F(S)$,

$$\varphi(A) = [A], \quad e([A]) = \bar{A}, \quad g_v(\bar{A}) = v(A), \tag{4.1.12}$$

且 $\varphi, e, g_v$ 都是同态, $\psi = e \circ \varphi$, $\varphi, e, \psi$ 都不随 $v$ 而变(图 4.2).

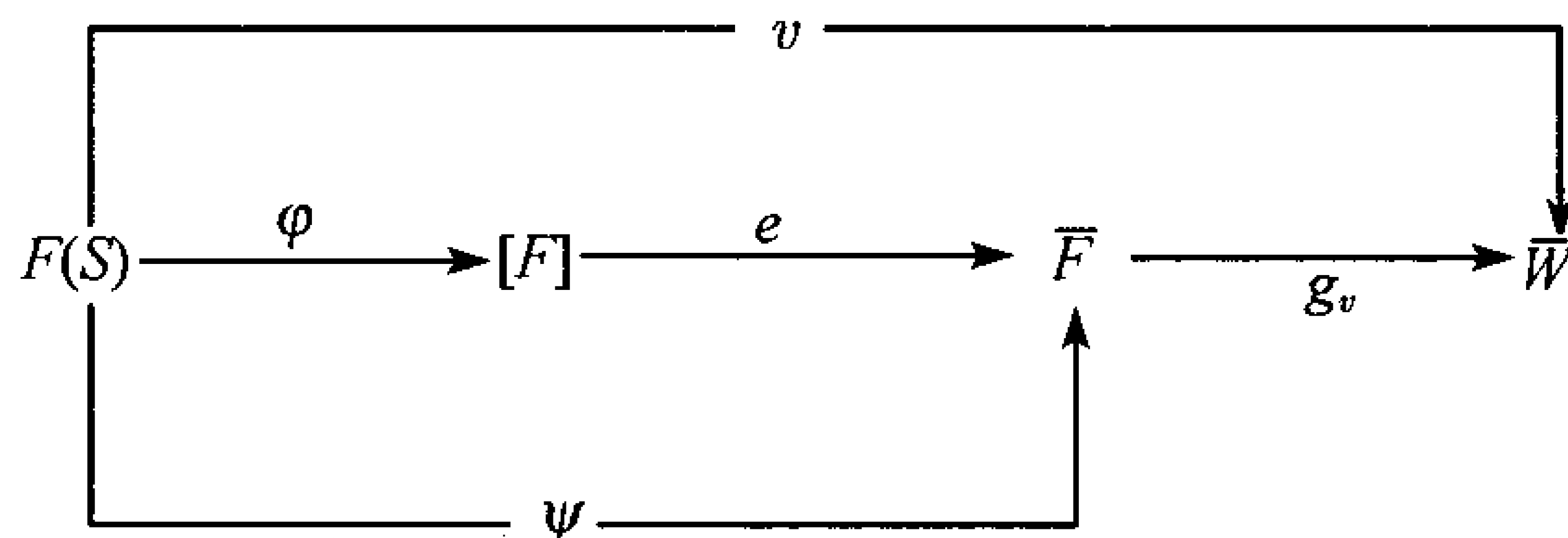



图 4.2

## 4.2　$\mathscr{L}^*$ 中另一类 $\Sigma$-重言式

在第 3 章中我们给出了命题演算的一种形式系统 $\mathscr{L}^*$, 4.1 节中我们给出了配套的语义理论. 在本节中我们讨论另一类部分赋值法, 由此出发可将 Fuzzy Modus Ponens与 Fuzzy Modus Tollens 置于严格的逻辑基础之上.

在 2.5 节中我们引入了 $\Sigma$-($\alpha$-重言式)的概念(见定义2.5.7), 在那里我们用 $\bar{\Omega}$ 表示全体赋值 $v:F(S)\to\bar{W}$ 的集. 而 $\Sigma$ 则是 $\bar{\Omega}$ 的一个子集. 作为例子, $\Sigma$ 可以是由一切映射 $v_0:S\to W$ 或一切映射 $v_0:S\to W_{2n}$或一切映射 $v_0:S\to W_{2n+1}$所生成的赋值的集. 这里 $W=\bar{W}\cap Q$ 是[0,1]中的有理数集构成的 $\bar{W}$ 的子代数, $W_{2n}$与 $W_{2n+1}$则分别同构于 $\bar{W}$ 的由 $2n$ 个元或 $2n+1$ 个元构成的子代数. 本章中在谈及 $\Sigma$-赋值以及 $\Sigma$-($\alpha$-重言式)与 $\Sigma$-($\alpha^+$-重言式)时, 若不附加另外的条件, 则 $\Sigma$ 可以是 $\bar{\Omega}$ 的任何子集, 包括上述各种子集. 不过为了给 Fuzzy 推理奠定逻辑基础, 本章中需要用到 $\bar{\Omega}$ 的另一类特殊的子集 $\Sigma$.

设 $X_1,\cdots,X_n$ 是非空集, $\mathscr{F}(X_i)$ 表示 $X_i$ 上的一切 Fuzzy 集构成的集族($i=1,\cdots,n$). $F(S)$仍为由 $S$ 生成的($\neg$, $\vee$, $\to$)型自由代数, $S=\{p_1,p_2,\cdots\}$.

**定义 4.2.1**　设 $E_i, E_i^* \in \mathscr{F}(X_i)$, $x_i\in X_i$($i=1,\cdots,n$). $\bar{E}=(E_1,\cdots,E_n;E_1^*,\cdots,E_n^*)$, $\bar{x}=(x_1,\cdots,x_n)$. 定义 $\varphi=\varphi(\bar{E},\bar{x}):S\to[0,1]$如下:

$$\varphi(p_k) = \begin{cases} E_k(x_k), & 1\leqslant k\leqslant n, \\ E_{k-n}^*(x_{k-n}), & n<k\leqslant 2n, \\ 0, & k>2n. \end{cases} \tag{4.2.1}$$

以 $v(\bar{E},\bar{x})$记由 $\varphi(\bar{E},\bar{x})$生成的 $F(S)$的 $R_0$-赋值, 即从 $F(S)$到 $\bar{W}$ 的同态. 令

$$\Sigma(\bar{E}) = \left\{ v(\bar{E},\bar{x}) \mid \bar{x} \in \prod_{i=1}^{n} X_i \right\}. \tag{4.2.2}$$

**例 4.2.2** 设 $n=1, X_1=[0,1], \bar{E}=(E_1;E_1^*)$,则 $p_1 \to p_2$ 是 $\Sigma(\bar{E})$-重言式当且仅当对每个 $x_1 \in X_1, E_1(x_1) \leqslant E_1^*(x_1)$. 事实上,设 $v \in \Sigma(\bar{E})$,则对每个 $\bar{x}=x_1 \in X_1$,

$$\varphi(p_1) = E_1(x_1), \quad \varphi(p_2) = E_1^*(x_1),$$

从而

$$v(p_1 \to p_2) = R_0(\varphi(p_1), \varphi(p_2)) = R_0(E_1(x_1), E_1^*(x_1)).$$

由此可知, $v(p_1 \to p_2)=1$ 恒成立当且仅当 $E_1 \leqslant E_1^*$,即 $E_1(x_1) \leqslant E_1^*(x_1)$ 对每个 $x_1 \in X_1$都成立.

类似可证,当 $i \geqslant 3, j \geqslant 3$ 时 $p_i \to p_j$ 是 $\Sigma$-重言式. 又 $(p_1 \to p_2) \to p_3$ 为 $\Sigma$-矛盾式.

**例 4.2.3** 设 $n=2$,分别以 $X$ 与 $Y$ 记 $X_1$ 与 $X_2$. 这里 $X_1=X_2=[0,1]$,分别以 $A, B, A^*, B^*$ 记 $E_1, E_2, E_1^*, E_2^*$, $\bar{E}=(A,B;A^*,B^*)$. 这里

$$A(x) = x^2, \quad A^*(x) = x, \quad x \in X = [0,1],$$
$$B(y) = 0.64, \quad B^*(y) = 0.9, \quad y \in Y = [0,1].$$

$\Sigma=\Sigma(\bar{E})$,则 $(p_1 \to p_2) \to (p_3 \to p_4)$ 为 $\Sigma$-重言式.

事实上,任取 $(x,y) \in X \times Y$. 设 $\varphi=\varphi(\bar{E},(x,y)), v=v(\bar{E},(x,y))$,则由

$$\varphi(p_1) = A(x) = x^2, \quad \varphi(p_2) = B(y) = 0.64,$$
$$\varphi(p_3) = A^*(x) = x, \quad \varphi(p_4) = B^*(y) = 0.9$$

得

$$v((p_1 \to p_2) \to (p_3 \to p_4))$$
$$= R_0(R_0(x^2, 0.64), R_0(x, 0.9)).$$

当 $x \leqslant 0.9$ 时,由 $R_0(x,0.9)=1$ 知上式的值为 1. 当 $x>0.9$ 时, $x^2>0.64$,这时由 $R_0(x^2,0.64)=0.64, R_0(x,0.9)=0.9$ 知上式的值 $R_0(0.64,0.9)$ 仍等于 1. 所以 $(p_1 \to p_2) \to (p_3 \to p_4)$ 是 $\Sigma$-重言式.

**例 4.2.4** 在例 4.2.3 中把 $B^* \equiv 0.9$ 改为 $B^* \equiv 0.8$,则一切推理仍成立,从而 $(p_1 \to p_2) \to (p_3 \to p_4)$ 仍为 $\Sigma$-重言式,这里 $\Sigma=\Sigma(\bar{E})$,而 $\bar{E}$ 中的第 4 项已改为 $B^* \equiv 0.8$. 可以证明,当 $A, B, A^*$ 保持不变时, $B^* \equiv 0.8$ 是 $\mathscr{F}(Y)$ 中使得 $(p_1 \to p_2) \to (p_3 \to p_4)$ 为 $\Sigma(\bar{E})$-重言式的最小 Fuzzy 集. 事实上,设 $B^\circ \in \mathscr{F}(Y)$,且有 $y_0 \in Y$ 使 $B^\circ(y_0)=\beta<0.8$. 令 $v=v(\bar{E},(0.8,y_0))$,这里 $\bar{E}=(A,B;A^*,B^\circ)$,则

$$v(p_1 \to p_2) = R_0(v(p_1), v(p_2)) = R_0(0.64, 0.64) = 1,$$
$$v(p_3 \to p_4) = R_0(v(p_3), v(p_4)) = R_0(0.8, \beta) < 1.$$

所以

$$v((p_1 \to p_2) \to (p_3 \to p_4)) < 1.$$

从而 $(p_1 \to p_2) \to (p_3 \to p_4)$ 不是 $\Sigma$-重言式.

**例 4.2.5** 设 $X=Y=[0,1], A(x)=\dfrac{x+2}{3}, B(y)=1-y, A^*(x)=1-x,$

$$B^*(y)=\begin{cases}1, & y\leqslant\frac{1}{3},\\ 1-y, & \frac{1}{3}<y\leqslant\frac{2}{3},\\ \frac{1}{3}, & y>\frac{2}{3}.\end{cases}\qquad(4.2.3)$$

$\bar{E}=(A,B;A^*,B^*)$，则 $H=(p_1\to p_2)\to(p_3\to p_4)$ 是 $\Sigma$-重言式，这里 $\Sigma=\Sigma(\bar{E})$，且当 $A,B,A^*$ 不变时，$B^*$ 是 $\mathscr{F}(Y)$ 中使 $H$ 成为 $\Sigma$-重言式的最小 Fuzzy 集.

事实上，设 $\bar{x}=(x,y)\in X\times Y$，$v=v(\bar{E},\bar{x})$，则由定义4.2.1知

$$\begin{aligned}v(H)&=(v(p_1)\to v(p_2))\to((v(p_3)\to v(p_4))\\&=\left[\frac{x+2}{3}\to(1-y)\right]\to[(1-x)\to B^*(y)].\end{aligned}\qquad(4.2.4)$$

若 $y\leqslant\frac{1}{3}$，则由(4.2.3)式，$B^*(y)=1$. 由(4.2.4)式知 $v(H)=1$. 这时 $1-y\geqslant\frac{2}{3}$，取 $x=0$ 得 $\frac{x+2}{3}\to(1-y)=\frac{2}{3}\to(1-y)=1$. $(1-x)\to B^*(y)=B^*(y)$. 可见，当 $y\leqslant\frac{1}{3}$ 时，为使(4.2.4)式的值等于1，$B^*(y)$ 不能小于1. 若 $\frac{1}{3}<y\leqslant\frac{2}{3}$，则 $\frac{x+2}{3}>1-y$. 由 $1-y\geqslant\frac{1}{3}$ 知

$$\begin{aligned}\frac{x+2}{3}\to(1-y)&=\left(1-\frac{x+2}{3}\right)\vee(1-y)\\&=\frac{1-x}{3}\vee(1-y)=1-y.\end{aligned}$$

注意，$x$ 可为零便知 $1-y$ 是使(4.2.4)式的值等于1的最小可能表达式. 最后，设 $y>\frac{2}{3}$，则 $1-y<\frac{1}{3}$. 这时

$$\frac{x+2}{3}\to(1-y)=\frac{1-x}{3}\vee(1-y)\leqslant\frac{1}{3}.$$

由(4.2.3)式，$B^*(y)=\frac{1}{3}$. 那么由 $R_0(a,b)\geqslant b$ 知 $(1-x)\to B^*(y)\geqslant\frac{1}{3}$. 所以，(4.2.4)式的值等于1. 考虑 $x=0$ 的情形便知 $B^*(y)=\frac{1}{3}$ 不能再小. 综上所述可见，(4.2.3)式给出的 $B^*$ 是 $\mathscr{F}(Y)$ 中使 $H$ 成为 $\Sigma$-重言式的最小 Fuzzy 集.

由于 $H=(p_1\to p_2)\to(p_3\to p_4)$ 中各原子公式 $p_i(i=1,\cdots,4)$ 是相互独立的，即各自可以任意赋值，所以 $H$ 当然不是 $\bar{\Omega}$-重言式. 但由以上两例看出，只要适当选取 $\bar{\Omega}$ 的子集 $\Sigma$，就可使 $H$ 成为 $\Sigma$-重言式. 其实，令 $\Sigma$ 为由一个赋值 $v$ 组成的单元素集，

$\Sigma=\{v\}$，这里 $v(p_i)=1(i=1,2,\cdots)$，则 $H$ 就是 $\Sigma$-重言式. 这固然是对的，但没有应用价值. 后面将看到，正是由定义 4.2.1 描述的那类 $\Sigma$-赋值可以为 Fuzzy 推理奠定逻辑基础. 出于同样的原因，我们需要考虑另一类 $\Sigma$-赋值.

**定义 4.2.6** 设 $E_i,E_i^*\in\mathscr{F}(X_i)$，$x_i\in X_i(i=1,2,3)$. $\bar{E}=(E_1\times E_2,E_3;E_1^*\times E_2^*,E_3^*)$，$\bar{x}=(x_1,x_2,x_3)$. 定义 $\varphi=\varphi(\bar{E},\bar{x}):S\to[0,1]$ 如下：

$$\begin{aligned}
\varphi(p_1)&=\min\{E_1(x_1),E_2(x_2)\},\\
\varphi(p_2)&=E_3(x_3),\\
\varphi(p_3)&=\min\{E_1^*(x_1),E_2^*(x_2)\},\\
\varphi(p_4)&=E_3^*(x_3),\\
\varphi(p_i)&=0\qquad(i=5,6,\cdots).
\end{aligned}\tag{4.2.5}$$

以 $v(\bar{E},\bar{x})$ 记由 $\varphi(\bar{E},\bar{x})$ 生成的 $F(S)$ 的 $R_0$-赋值，即从 $F(S)$ 到 $\overline{W}$ 的同态. 令

$$\Sigma(\bar{E})=\{v(\bar{E},\bar{x})\mid\bar{x}\in X_1\times X_2\times X_3\}.\tag{4.2.6}$$

以下分别用 $X,Y,Z$ 表示 $X_1,X_2,X_3$，并将 $E_i$ 与 $E_i^*(i=1,2,3)$ 分别用 $A,B,C$ 与 $A^*,B^*,C^*$ 表示.

**例 4.2.7** 设 $X=Y=Z=[0,1]$，$A(x)=\frac{1}{2}x$，$B(y)=y$，$C(z)=z^2$，$A^*(x)=x$，$B^*(y)=y$，求最小的 $C^*\in\mathscr{F}(Z)$，使

$$H=(p_1\to p_2)\to(p_3\to p_4)\tag{4.2.7}$$

为 $\Sigma(\bar{E})$-重言式，这里 $\bar{E}=(A\times B,C;A^*\times B^*,C^*)$.

**解** 设所述之 $C^*\in\mathscr{F}(Z)$ 由 $C^*(z)=f(z)(z\in[0,1])$ 定义. 设 $\bar{x}=(x,y,z)$，$v=v(\bar{E},\bar{x})$，则由(4.2.5)式与(4.2.7)式得

$$\begin{aligned}
v(H)&=(v(p_1)\to v(p_2))\to(v(p_3)\to v(p_4))\\
&=(\min(A(x),B(y))\to C(z))\\
&\quad\to(\min(A^*(x),B^*(y))\to C^*(z))\\
&=\left(\min\left(\frac{1}{2}x,y\right)\to z^2\right)\\
&\quad\to(\min(x,y)\to f(z)).
\end{aligned}\tag{4.2.8}$$

如图 4.3 所示，在区域①中，$\frac{1}{2}x\leqslant x\leqslant y$，$\min\left(\frac{1}{2}x,y\right)=\frac{1}{2}x$，$\min(x,y)=x$. 这时(4.2.8)式成为

$$v(H)=\left(\frac{1}{2}x\to z^2\right)\to(x\to f(z)).\tag{4.2.9}$$

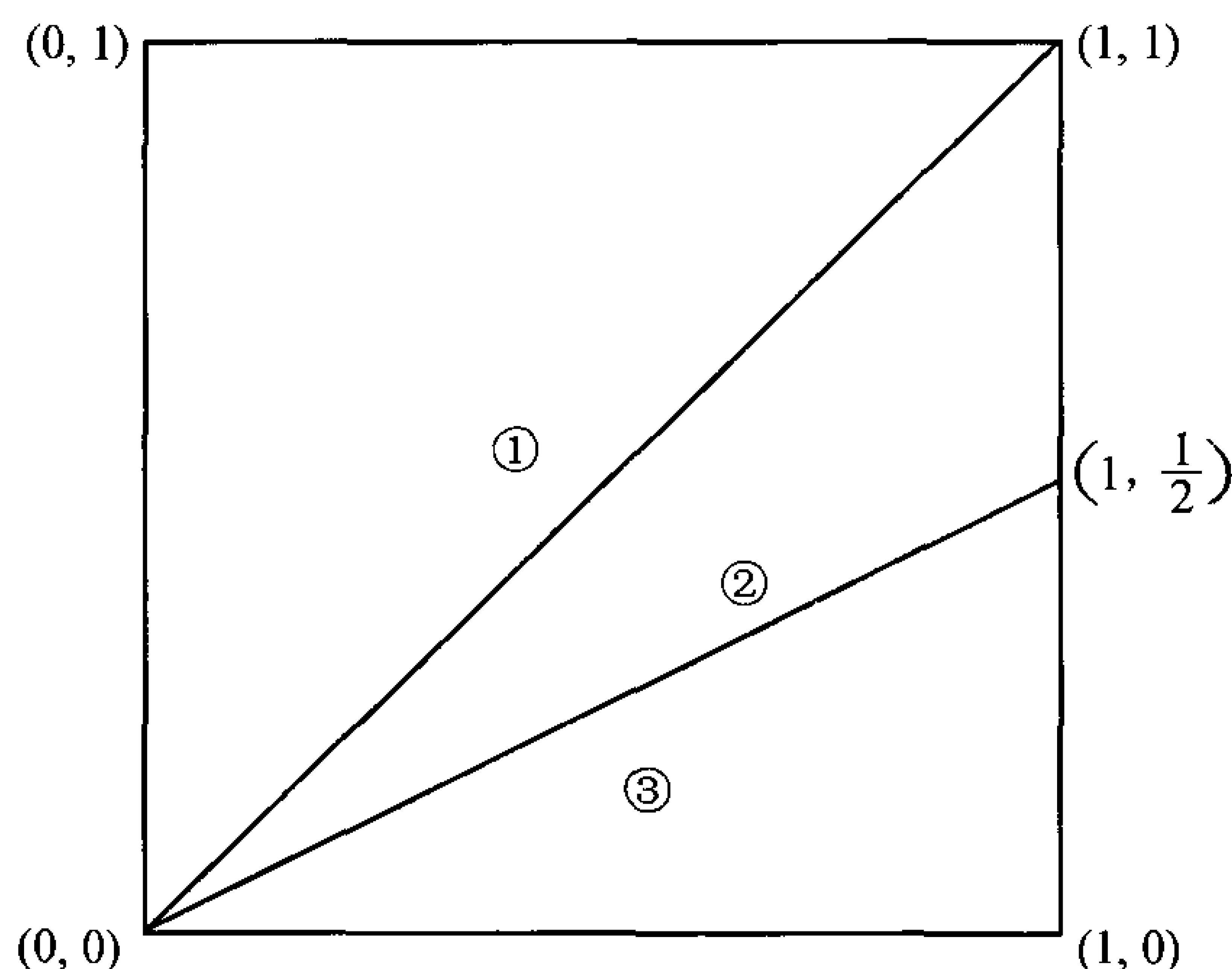



图 4. 3

任取 $z\in[0,1]$,若$\frac{1}{2}x\leqslant z^2$,则(4. 2. 9)式的值等于 1 当且仅当 $x\leqslant f(z)$. 满足此条件的最小 $f(z)$ 为 $2z^2$. 若$\frac{1}{2}x>z^2$,注意,$\frac{1}{2}x\leqslant 1-\frac{x}{2}$得$\frac{1}{2}x\to z^2=\left(1-\frac{x}{2}\right)\vee z^2=1-\frac{x}{2}$. 这时若$x\leqslant f(z)$,(4. 2. 9)式的值自然等于 1,故不妨设 $x>f(z)$,这时$x\to f(z)=(1-x)\vee f(z)$. (4. 2. 9)式的值等于 1 当且仅当

$$1-\frac{x}{2}\leqslant(1-x)\vee f(z).$$

但当 $x\neq 0$ 时,$1-\frac{x}{2}>1-x$,故上式可化为 $1-\frac{x}{2}\leqslant f(z)$,结合$x>f(z)$的条件得

$$1-\frac{x}{2}\leqslant f(z)<x.$$

易证满足此式的最小 $f(z)$ 为$\frac{2}{3}$.

总之,当$\frac{x}{2}\leqslant z^2$ 时,应有$f(z)=2z^2$;当$\frac{x}{2}>z^2$ 时,应有$f(z)=\frac{2}{3}$,故可取

$$f(z)=\min\left\{\max\left(2z^2,\frac{2}{3}\right),1\right\}=\left(2z^2\vee\frac{2}{3}\right)\wedge 1.\tag{4.2.10}$$

其图像如图 4. 4 所示.

在图 4. 3 区域②中,$\frac{1}{2}x\leqslant y,\min\left(\frac{1}{2}x,y\right)=\frac{1}{2}x,y\leqslant x,\min(x,y)=y$. 这时(4. 2. 8)式成为

$$v(H)=\left(\frac{1}{2}x\to z^2\right)\to(y\to f(z)).\tag{4.2.11}$$

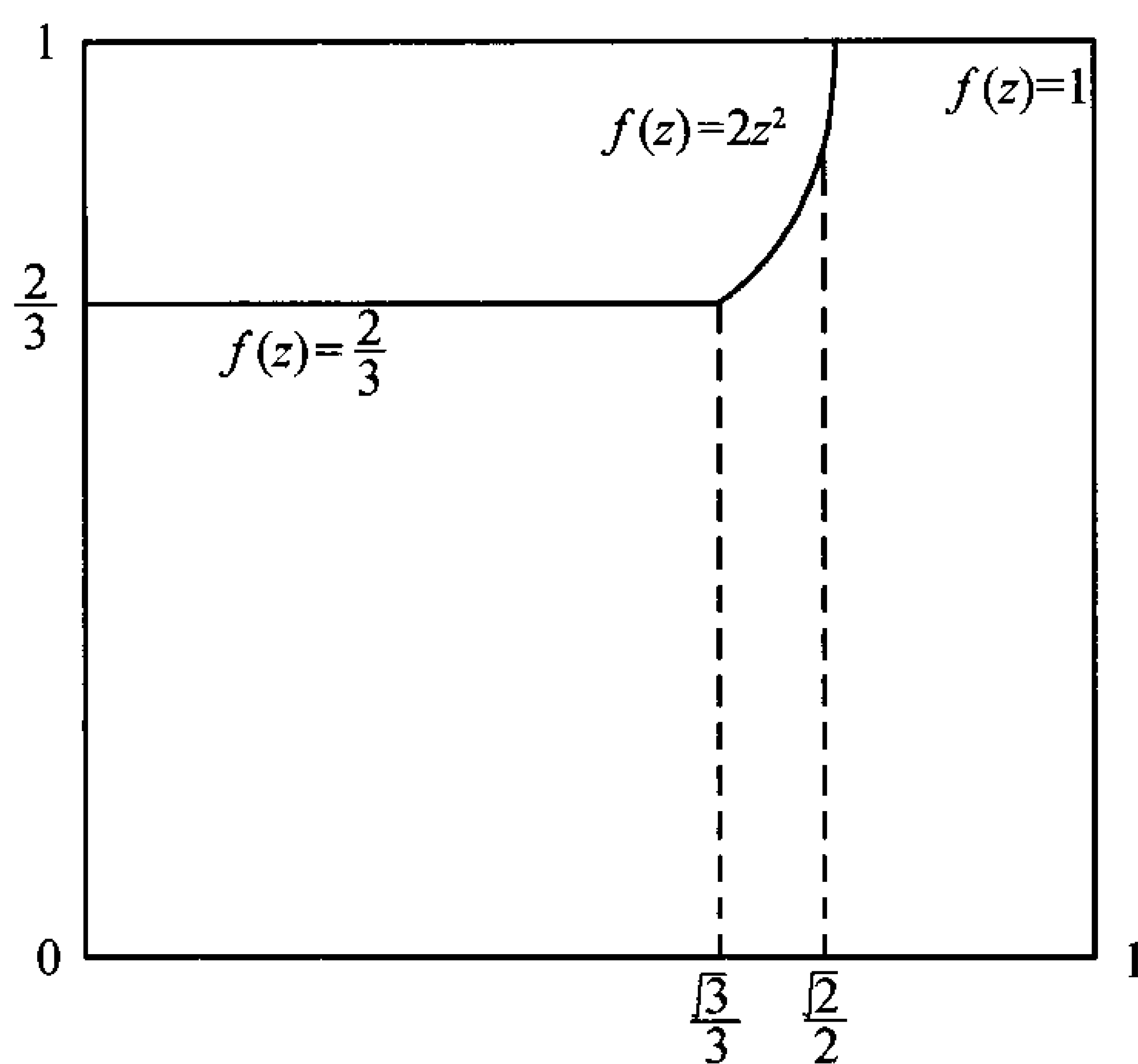



图 4.4

注意，$\frac{1}{2}x \leqslant y \leqslant x$，利用和对图 4.3 区域①进行分别类似的方法可求得最小的 $f(z)$ 仍由(4.2.10)式确定. 最后在图 4.3 区域③中，$\min(\frac{1}{2}x, y) = \min(x, y) = y$. 这时(4.2.8)式成为

$$v(H) = (y \to z^2) \to (y \to f(z)). \tag{4.2.12}$$

(4.2.12)式值等于 1 的充要条件显然是 $f(z) \geqslant z^2$. 取 $f(z) = z^2$ 即可.

综上所述，为使(4.2.8)式的值对图 4.3 中整个单位正方形内的 $(x, y)$ 恒等于 1，可将以上对图 4.3 区域①，②和③求得的 $f(z)$ 取大即可. 由图 4.4 可见，(4.2.10)式给出的 $f(z)$ 也满足 $f(z) \geqslant z^2$. 所以，(4.2.10)式给出的 $f(z)$ 就恒使(4.2.8)式的值等于 1，即使(4.2.7)式成为 $\Sigma(\bar{E})$-重言式. 且由以上分析知(4.2.10)式的 $f(z)$ 是最小可能的.

## 4.3 Fuzzy 推理的 CRI 算法

### 4.3.1 Fuzzy 推理的基本思想

设 $A$ 与 $B$ 是任意两个公式(命题)，则 MP 规则说由 $A$ 与 $A \to B$ 可得 $B$. 从实用上看，MP 规则说，如果已知命题 $A$ 成立并且已知若命题 $A$ 成立则命题 $B$ 成立，那么命题 $B$ 就成立. 这种推理可写成下面的算式：

$$\begin{array}{ll} \text{已知} & A \longrightarrow B \\ \text{且给定} & \underline{A \qquad\qquad} \\ \text{则得} & \qquad B. \end{array} \tag{4.3.1}$$

如果(4.3.1)式第二行中的 $A$ 与第一行“$A \to B$”中的 $A$ 不同,比如把第二行中的 $A$ 换为 $A^*$,则得一待完成的算式:

$$\begin{array}{rl} \text{已知} & A \longrightarrow B \\ \text{且给定} & \underline{A^* \qquad\quad} \\ \text{求} & \qquad B^*. \end{array} \tag{4.3.2}$$

从经典逻辑的观点看,(4.3.2)式是个无法回答的病态的问题,因为 $A^*$ 不是 $A$,而 $A,B,A^*$ 等又都是纯形式的符号,MP 规则不能用,也没有别的什么法则可用来解决这一问题. 但是当给 $A,B,A^*$ 等赋予某种实际意义并因此可以考虑 $A,A^*,B$ 等的运算以及 $A^*$ 与 $A$ 是否相近时,是有可能给出(4.3.2)式中 $B^*$ 的求法的. 事实上,这正是 Fuzzy 推理要解决的问题. 这时 $A,A^*$ 与 $B,B^*$ 分别是某非空集 $X$ 与 $Y$ 上的 Fuzzy 集,也即从 $X$ 或 $Y$ 到[0,1]的映射. Fuzzy 推理有多种不同的形式(见文献[10,24~27]),Zadeh 的合成推理方法,简称 **CRI 方法**(compositional rule of inference)是最有代表性的一种. 其基本思想是:

i)把 $A,B,A^*$ 以及待求的 $B^*$ 都用 Fuzzy 集来表示,如 $A,A^* \in \mathscr{F}(X)$,$B,B^* \in \mathscr{F}(Y)$. 这时表示各 Fuzzy 命题的符号 $A,B,A^*,B^*$ 等就不再是纯形式的符号了,对它们就可以进行运算了(见文献[28]).

ii)把蕴涵式 $A \to B$ 转化成一个 $X \times Y$ 上的 Fuzzy 关系 $R$,即转化成映射 $R: X \times Y \to [0,1]$. Zadeh 用的 $R$ 由第 2 章中介绍过的蕴涵算子 $R_Z$ 生成:

$$\begin{aligned} R(x,y) &= R_Z(A(x),B(y)) \\ &= A'(x) \vee (A(x) \wedge B(y)). \end{aligned} \tag{4.3.3}$$

iii)把给定的 $A^*$(即输入)与 ii)步中的 Fuzzy 关系 $R$ 作合成即得输出 $B^* = A^* \circ R$. Zadeh 的合成算法是:

$$\begin{aligned} B^*(y) &= \sup_{x \in X}[A^*(x) \wedge R(x,y)] \\ &= \sup_{x \in X}[A^*(x) \wedge R_Z(A(x),B(y))], \end{aligned} \tag{4.3.4}$$

即

$$B^*(y) = \sup_{x \in X}\{A^*(x) \wedge [A'(x) \vee (A(x) \wedge B(y))]\}, \quad y \in Y. \tag{4.3.5}$$

简单地说,CRI 算法的基本思想是:用 Fuzzy 集表示 Fuzzy 命题,把蕴涵式转化为 Fuzzy 关系,然后将输入与 Fuzzy 关系合成即得输出. 在上面的算法中 Fuzzy 关系 $R$ 是由 Zadeh 的蕴涵算子 $R_Z$ 生成的,自然也可以考虑由其他蕴涵算子如 Mamdani 算子 $R_M$、Łukasiewicz 算子 $R_{Łu}$、标准序列逻辑算子 $R_{GR}$、Gödel 算子 $R_G$、Kleene-Dienes 算子 $R_{KD}$ 或我们的蕴涵算子 $R_0$ 等来生成 Fuzzy 关系 $R$.

**例 4.3.1** 在(4.3.2)式中设 $A,A^* \in \mathscr{F}(X)$,$B \in \mathscr{F}(Y)$,$X = Y = [0,1]$,

$$A(x) = \frac{x+1}{3}, \quad B(y) = 1 - y,$$

$$A^*(x)=1-x,\quad x\in X;\ y\in Y,$$

用 Zadeh 的 CRI 方法求 $B^*(B^*\in\mathscr{F}(Y))$.

**解** 由(4.3.5)式得

$$B^*(y)=\sup_{x\in[0,1]}\left\{(1-x)\wedge\left[\frac{2-x}{3}\vee\left(\frac{x+1}{3}\wedge(1-y)\right)\right]\right\}.$$

易证当 $x\geqslant\frac{1}{2}$ 时,$1-x\leqslant\frac{2-x}{3}\leqslant\frac{x+1}{3}$,所以

$$\sup_{x\geqslant\frac{1}{2}}\left\{(1-x)\wedge\left[\frac{2-x}{3}\vee\left(\frac{x+1}{3}\wedge(1-y)\right)\right]\right\}$$

$$=\sup_{x\geqslant\frac{1}{2}}\{1-x\}=\frac{1}{2}.$$

当 $x<\frac{1}{2}$ 时,$1-x>\frac{2-x}{3}>\frac{x+1}{3}$,所以

$$\sup_{x<\frac{1}{2}}\left\{(1-x)\wedge\left[\frac{2-x}{3}\vee\left(\frac{x+1}{3}\wedge(1-y)\right)\right]\right\}$$

$$=\sup_{x<\frac{1}{2}}\left\{\frac{2-x}{3}\right\}=\frac{2}{3}.\tag{4.3.6}$$

由此得 $B^*(y)=\frac{2}{3}$.

**例 4.3.2** 设 $X,Y$ 同例 4.3.1,$A(x)=x,B(y)=0,A^*(x)=x$,按 Zadeh 的 CRI 方法求 $B^*$.

**解** $R_Z(A(x),B(y))=(1-x)\vee(x\wedge 0)=1-x$,所以

$$B^*(y)=\sup_{x\in[0,1]}[x\wedge(1-x)]=\frac{1}{2},\quad y\in[0,1].$$

**例 4.3.3** 设 $A,B,A^*$ 同例 4.3.1,但 $R(x,y)$ 由 Łukasiewicz 的蕴涵算子 $R_{Łu}$ 生成,求 $B^*$.

**解** 这时,

$$\begin{aligned}R(x,y)&=R_{Łu}(A(x),B(y))\\&=(A'(x)+B(y))\wedge 1\\&=\left[\frac{2-x}{3}+(1-y)\right]\wedge 1.\end{aligned}$$

所以由(4.3.4)式(把 $R_Z$ 换成 $R_{Łu}$)得

$$B^*(y)=\sup_{x\in[0,1]}\left\{(1-x)\wedge\left[\frac{2-x}{3}+(1-y)\right]\wedge 1\right\}$$

$$= \left[\frac{2}{3} + (1-y)\right] \wedge 1 = \begin{cases} \frac{5}{3} - y, & y \geqslant \frac{2}{3}, \\ 1, & y < \frac{2}{3}. \end{cases} \tag{4.3.7}$$

**例 4.3.4**　设 $A, B, A^*$ 仍同例 4.3.1，但 $R$ 由 Mamdani 算子 $R_M$ 生成，求 $B^*$.

**解**　$B^*(y) = \sup\limits_{x \in [0,1]} \left\{(1-x) \wedge \frac{x+1}{3} \wedge (1-y)\right\}$.

当 $x \geqslant \frac{1}{2}$ 时，$1 - x \leqslant \frac{x+1}{3}$，

$$\begin{aligned} &\sup_{x \geqslant \frac{1}{2}} \left\{(1-x) \wedge \frac{x+1}{3} \wedge (1-y)\right\} \\ &= \sup_{x \geqslant \frac{1}{2}} \{(1-x) \wedge (1-y)\} \\ &= \frac{1}{2} \wedge (1-y). \end{aligned}$$

当 $x < \frac{1}{2}$ 时，$1 - x > \frac{x+1}{3}$，

$$\begin{aligned} &\sup_{x < \frac{1}{2}} \left\{(1-x) \wedge \frac{x+1}{3} \wedge (1-y)\right\} \\ &= \sup_{x < \frac{1}{2}} \left\{\frac{x+1}{3} \wedge (1-y)\right\} \\ &= \frac{1}{2} \wedge (1-y). \end{aligned}$$

所以

$$B^*(y) = \frac{1}{2} \wedge (1-y) = \begin{cases} 1 - y, & y \geqslant \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2}, & y < \frac{1}{2}. \end{cases} \tag{4.3.8}$$

由以上几个例子看出，对于同一组给定的 $A, B$ 与 $A^*$，(4.3.2) 式中的 $B^*$ 会因为采用不同的算子生成的 $R$ 而有很大差别.

### 4.3.2　CRI 方法的一般形式

(1) Fuzzy 推理与 Fuzzy 控制

Fuzzy 推理是 Fuzzy 控制的理论基础. 如图 4.5 所示，设 $S$ 是某系统，$I$ 和 $O$ 分别是系统 $S$ 的输入与输出. 假设 $O^*$ 是标准的预期的输出，实际输出 $O$ 可能与 $O^*$ 有偏差，或称误差，记为 $A$，并以 $B$ 记误差随时间的变化率. 那么就应当根据 $A$ 与 $B$

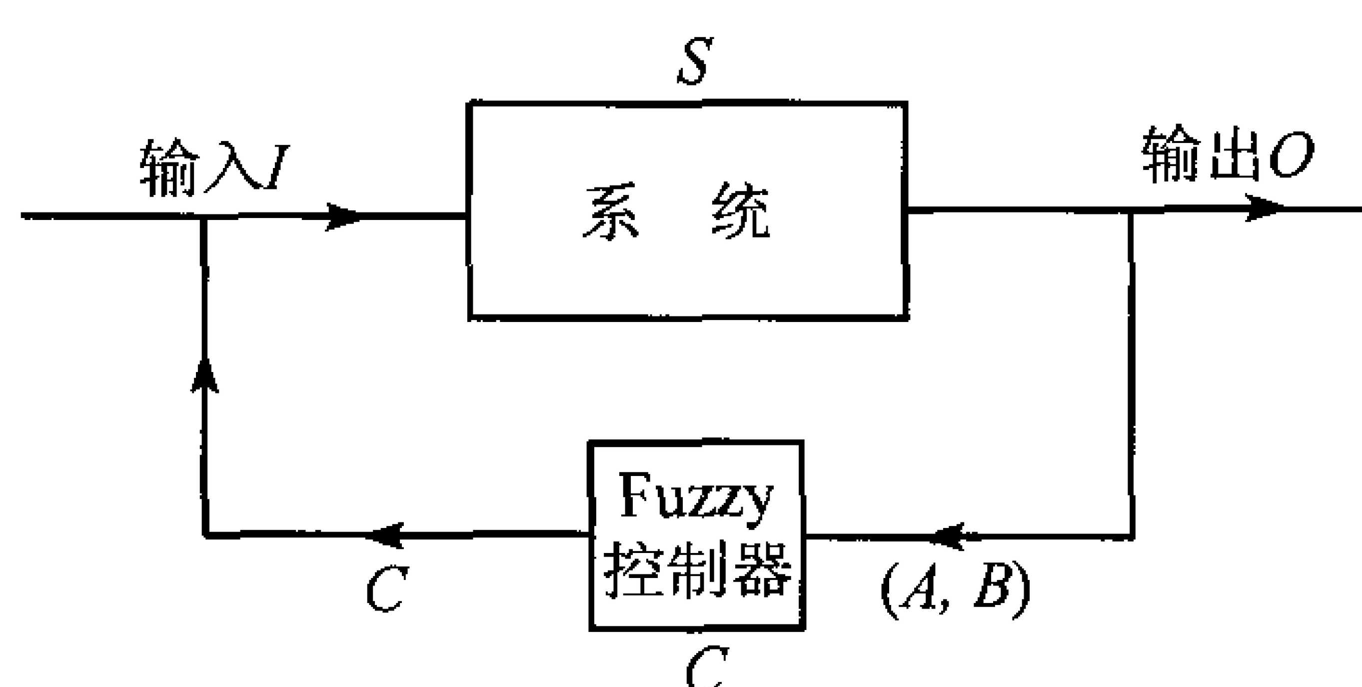



图 4.5

的大小去对输入 $I$ 进行调整以使调整后的输出 $O$ 尽量与标准输出 $O^*$ 一致. 以 $C$ 记根据 $A$ 与 $B$ 的大小而对 $I$ 作出的调整量,则 $C$ 是 $A$ 与 $B$ 的函数,$C=\varphi(A,B)$. 在一般控制理论中这个函数 $\varphi$ 是起关键作用的. 但对某些系统 $S$ 而言这个函数 $\varphi$ 很难求得或者是未知的,这时可以考虑如下的变通方法. 假定有某位或某几位对系统 $S$ 的工作情况很熟悉的专家,他或他们掌握了若干条典型情况下调整量 $C$ 的算法,比如

$$\begin{array}{ll}\text{若 } A_1 \text{ 且} B_1 & \text{则 } C_1, \\ \text{若 } A_2 \text{ 且} B_2 & \text{则 } C_2, \\ \quad\cdots\cdots & \\ \text{若 } A_n \text{ 且} B_n & \text{则 } C_n. \end{array} \tag{4.3.9}$$

这时遇到一种偏差 $A^*$ 及偏差变化率 $B^*$,这里的 $A^*$ 与 $B^*$ 不同于(4.3.9)式中的任一组 $A_i$ 与 $B_i$ $(i=1,\cdots,n)$,应当采取什么样的调整量 $C^*$? 如果用类似于(4.3.2)式的形式写出这一问题,得

$$\begin{array}{ll}\text{已知} & A_1 \text{ 且} B_1 \longrightarrow C_1 \\ & \quad\cdots\cdots \\ & A_n \text{ 且} B_n \longrightarrow C_n \\ \text{且给定} & \underline{A^*,\ B^* \qquad\qquad} \\ \text{求} & \qquad\qquad C^*. \end{array} \tag{4.3.10}$$

这就是 Fuzzy 推理的任务,或者说由(4.3.10)式横线以上的部分去求 $C^*$ 的过程叫 Fuzzy 推理. 这里之所以用"Fuzzy 推理"这个词,其原因如下:一般误差及其变化率都是普通实数,为了可以使用 CRI 方法,通常通过某种 Fuzzify 方法,把它们 Fuzzy 化为 Fuzzy 集. 这样各 $A_i$,$B_i$ 与 $A^*$,$B^*$ 就都是 Fuzzy 集,而各专家心目中相应的控制量 $C_i$ 也都是 Fuzzy 集. 最后算出的 $C^*$ 也是 Fuzzy 集,真正使用这个 $C^*$ 时还必须经过 Defuzzify 的去 Fuzzy 过程,把 $C^*$ 转化为普通实数去调整输入 $I$. 所以,人们把这种推理叫 Fuzzy 推理. 而基于这种推理的控制就是 Fuzzy 控制. 在图 4.5 中为了说明 Fuzzy 控制的机制我们把控制框图 $C$ 画得很大,实际上它与系统 $S$ 相比是非常小的装置.

(2) Fuzzy 推理的一般形式

Fuzzy 推理还可以具有比(4.3.10)式更为一般的形式. 例如,当不只需要考虑误差变化率还需要考虑误差对时间的二阶导数时,已知条件就具有这种形式:

$$\text{已知}\quad A_i \text{ 且} B_i \text{ 且} C_i \longrightarrow D_i$$

给定的数据自然也就是三元组$(A^*, B^*, C^*)$了. 更为一般的形式为

$$\begin{array}{ll}\text{已知} & A_{11}, \cdots, A_{1m} \longrightarrow B_1 \\ & \qquad \cdots\cdots \\ & A_{n1}, \cdots, A_{nm} \longrightarrow B_n \\ \text{且给定} & \underline{A_1{}^*, \cdots, A_m{}^* \qquad\qquad\qquad} \\ \text{求} & \qquad\qquad\quad B^*. \end{array} \tag{4.3.11}$$

易见(4.3.10)式是(4.3.11)式在 $m=2$ 时的特殊情形,而(4.3.2)式则是(4.3.11)式在 $m=n=1$ 时的特殊情形.

(3) 两种基本类型的 Fuzzy 推理及其解法

先介绍第一种基本类型的 Fuzzy 推理.

当 $n=1$ 时,(4.3.11)式成为

$$\begin{array}{ll}\text{已知} & A_1, \cdots, A_m \longrightarrow B \\ \text{且给定} & \underline{A_1{}^*, \cdots, A_m{}^* \qquad\qquad\qquad} \\ \text{求} & \qquad\qquad\quad B^*. \end{array} \tag{4.3.12}$$

这时仍可用 CRI 方法去求解 $B^*$. 方法是:分别用 $X_1, \cdots, X_m$ 与 $Y$ 上的 Fuzzy 集表示命题 $A_1, \cdots, A_m$ 与 $B(A_1{}^*, \cdots, A_m^*$ 与 $B^*)$,只需把 $A_1, \cdots, A_m$ 与 $A_1{}^*, \cdots, A_m{}^*$ 分别相乘,并令 $A = A_1 \times \cdots \times A_m, A^* = A_1{}^* \times \cdots \times A_m{}^*$,则 $A$ 与 $A^*$ 都是 $X = X_1 \times \cdots \times X_m$ 上的 Fuzzy 集,而(4.3.12)式就转化成了(4.3.2)式,从而可用那里的 CRI 方法去求解.

**例 4.3.5**　考虑(4.3.12)式中 $m=2$ 的情形. 设

$$X_1 = [0,1], \quad X_2 = [0,1], \quad Y = [0,1],$$

$$A_1 \in \mathscr{F}(X_1), \quad A_2 \in \mathscr{F}(X_2), \quad B \in \mathscr{F}(Y),$$

$$A_1{}^* \in \mathscr{F}(X_1), \quad A_2{}^* \in \mathscr{F}(X_2),$$

$$A_1(x) = \frac{1}{2}x, \quad A_2(y) = y, \quad B(z) = z^2,$$

$$A_1{}^*(x) = x, \quad A_2{}^*(y) = y.$$

试用 CRI 方法求(4.3.12)式中的 $B^*$,但 $R$ 由蕴涵算子 $R_0$ 生成.

**解**　令 $A = A_1 \times A_2, A^* = A_1{}^* \times A_2{}^*$,则

$$A, A^* \in \mathscr{F}(X_1 \times X_2),$$

$$A(x,y) = \min\left(\frac{x}{2}, y\right), \quad A^*(x,y) = \min(x,y).$$

由(4.3.4)式得

$$B^*(z) = \sup_{(x,y)\in X_1\times X_2}\{A^*(x,y) \wedge R_0(A(x,y),B(z))\},$$

即

$$B^*(z) = \sup_{(x,y)\in X_1\times X_2}\left\{\min(x,y) \wedge R_0\left(\min\left(\frac{x}{2},y\right),z^2\right)\right\}. \tag{4.3.13}$$

对一个固定的 $z\in Y$,把 $X_1\times X_2$ 分成两个区域 $D_1(z)$ 与 $D_2(z)$ 如下:

$$D_1(z) = \left\{(x,y)\,\middle|\,\min\left(\frac{x}{2},y\right)\leqslant z^2\right\}, \tag{4.3.14}$$

$$D_2(z) = \left\{(x,y)\,\middle|\,\min\left(\frac{x}{2},y\right) > z^2\right\}. \tag{4.3.15}$$

在 $D_1(z)$ 上有

$$\begin{aligned} M(z) &= \sup_{(x,y)\in D_1(z)}\left\{\min(x,y) \wedge R_0\left(\min\left(\frac{x}{2},y\right),z^2\right)\right\} \\ &= \sup_{(x,y)\in D_1(z)}\{\min(x,y)\}. \end{aligned} \tag{4.3.16}$$

设 $z^2\geqslant\frac{1}{2}$,即 $z\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$,则 $(1,1)\in D_1(z)$,那么由(4.3.16)式知 $M(z)=1$. 设 $z^2<\frac{1}{2}$,则由(4.3.14)式知 $D_1(z)$ 中的 $(x,y)$ 应满足 $\frac{x}{2}\leqslant z^2$,即 $x\leqslant 2z^2$ 或 $y\leqslant z^2$,这时由(4.3.16)式知 $M(z)=z^2$. 总之,当 $(x,y)\in D_1(z)$ 时

$$M(z) = \begin{cases} 1, & z\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}, \\ 2z^2, & z<\frac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases} \tag{4.3.17}$$

在 $D_2(z)$ 上,由 $z^2<\min\left(\frac{x}{2},y\right)\leqslant\frac{1}{2}$ 及(4.3.13)式得

$$\begin{aligned} N(z) &= \sup_{(x,y)\in D_2(z)}\left\{\min(x,y) \wedge R_0\left(\min\left(\frac{x}{2},y\right),z^2\right)\right\} \\ &= \sup_{(x,y)\in D_2(z)}\left\{\min(x,y) \wedge \left[\left(1-\min\left(\frac{x}{2},y\right)\right)\vee z^2\right]\right\} \\ &= \sup_{(x,y)\in D_2(z)}\left\{\min(x,y) \wedge \left[\left(1-\frac{x}{2}\right)\vee(1-y)\right]\right\}. \end{aligned}$$

即

$$N(z) = \sup_{(x,y)\in D_2(z)}\left\{\left[y\wedge x\wedge\left(1-\frac{x}{2}\right)\right]\vee[x\wedge y\wedge(1-y)]\right\}.$$

由于 $x\wedge y\wedge(1-y)\leqslant\frac{1}{2}$ 恒成立,而 $D_2(z)\neq\varnothing$ 时,$D_2(z)$ 中有 $(x,y)$ 使 $x\wedge y\wedge\left(1-\frac{x}{2}\right)\geqslant\frac{1}{2}$(如 $x=y=1$ 时就行),所以

$$N(z) = \sup_{(x,y)\in D_2(z)} \left[ y \wedge x \wedge \left(1 - \frac{x}{2}\right)\right].$$

当 $D_2(z) \neq \varnothing$ 时,在 $D_2(z)$ 中可令 $y = 1$ 以使上式尽可能地大,所以

$$N(z) = \sup_{\frac{x}{2} > z^2} \left[ x \wedge \left(1 - \frac{x}{2}\right)\right].$$

若 $z^2 < \frac{1}{3}$,令 $x = \frac{2}{3}$,则 $x$ 满足 $\frac{x}{2} > z^2$. 这时 $N(z) = \frac{2}{3}$. 若 $\frac{1}{3} \leqslant z^2 < \frac{1}{2}$,则 $x > \frac{2}{3}$. 这时 $x > 1 - \frac{x}{2}$,所以

$$\sup_{\frac{x}{2} > z^2} \left[ x \wedge \left(1 - \frac{x}{2}\right)\right] = \sup_{\frac{x}{2} > z^2} \left(1 - \frac{x}{2}\right) = 1 - z^2,$$

从而当 $\frac{1}{3} \leqslant z^2 < \frac{1}{2}$ 时, $N(z) = (1 - z^2)$. 最后, 当 $z^2 \geqslant \frac{1}{2}$ 时, $D_2(z) = \varnothing$. $\sup_{\frac{x}{2} > z^2} \left[ x \wedge \left(1 - \frac{x}{2}\right)\right] = 0$. 由此得

$$N(z) = \begin{cases} 0, & z \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ 1 - z^2, & \frac{\sqrt{3}}{3} \leqslant z < \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \frac{2}{3}, & z < \frac{\sqrt{3}}{3}. \end{cases} \tag{4.3.18}$$

再由 $B^*(z) = M(z) \vee N(z)$ 和(4.3.17)、(4.3.18)两式并注意当 $z < \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, $z^2 < 1 - z^2$, $z^2 < \frac{2}{3}$ 便得

$$B^*(z) = \begin{cases} 1, & z \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ 2z^2, & \frac{\sqrt{3}}{3} < z < \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \frac{2}{3}, & z \leqslant \frac{\sqrt{3}}{3}. \end{cases} \tag{4.3.19}$$

现在介绍第二种基本类型的 Fuzzy 推理. 考虑(4.3.11)式中 $m = 1$ 的情形,即

$$\begin{array}{ll} \text{已知} & A_1 \longrightarrow B_1 \\ & \cdots\cdots \\ & A_n \longrightarrow B_n \\ \text{且给定} & \underline{A^* \qquad\qquad} \\ \text{求} & \qquad\qquad B^*. \end{array} \tag{4.3.20}$$

这时如果还要使用 CRI 方法的话,那么有通常两条路可走:其一是把输入 $A^*$ 分别与$A_i \to B_i$相作用,即

$$\begin{array}{rl} \text{已知} & A_i \longrightarrow B_i \\ \text{且给定} & \underline{A^* \qquad\qquad\qquad} \\ \text{求} & \qquad\qquad B_i^* \qquad (i=1,\cdots,n). \end{array} \tag{4.3.21}$$

这可以用前述的 CRI 方法去解决,然后把所得的 $n$ 个中间结果 $B_1^*,\cdots,B_n^*$ 以某种方式聚合(aggregate)为一个最终结果 $B^*$,Buckley 与 Hayashi 把这种方法称为 **FITA**(即 first infer then aggregate),也就是先推理后聚合. 另一途径是先把 $n$ 条已知规则聚合为一条超规则 $A \to B$,然后像对(4.3.2)式那样进行推理,求得最终结果 $B^*$. Buckley 与 Hayashi 把这种方法称为 **FATI**(即 first aggregate then infer),也就是先聚合后推理. 注意, FITA 与 FATI 中的 A 虽然都表示聚合,但在 FITA 中被聚合 A 所聚合的是中间结果 $B_1^*,\cdots,B_n^*$,而在 FATI 中被聚合 A 所聚合的则是 $n$ 条规则 $A_1 \to B_1,\cdots,A_n \to B_n$,它们的含义是不同的(见文献[29]). 另外,关于聚合,常见的有采取交运算或并运算的方法. 当被聚合的是推理规则时,这里所说的交或并是作用于这些规则转化成的那些 Fuzzy 关系 $R_i$ $(i=1,\cdots,n)$ 上的. 以 FATI 为例,设聚合被理解为取交,则由(4.3.4)式即得(4.3.20)式中 $B^*$ 的求法:

$$B^*(y) = \sup_{x \in X}\left[A^*(x) \wedge \bigwedge_{i=1}^{n} R_i(x,y)\right], \tag{4.3.22}$$

这里 $R_i(x,y)$是由某蕴涵算子,如 $R_Z$所生成:

$$R_i(x,y) = R_Z(A_i(x),B_i(y)) \quad (i = 1,\cdots,n).$$

而如果采取 FITA 方法,则由(4.3.4)式得

$$B^*(y) = \bigwedge_{i=1}^{n}\left\{\sup_{x \in X}[A^*(x) \wedge R_i(x,y)]\right\}. \tag{4.3.23}$$

当把聚合理解为取并时,把(4.3.22)式与(4.3.23)式中的$\bigwedge_{i=1}^{n}$换为$\bigvee_{i=1}^{n}$就得出了另外两种方法(见文献[26]).

除以上介绍的 FITA 与 FATI 两种方法而外,还有通过衡量 $A^*$ 与各 $A_i$ 间的距离并让 $A^*$"激活"那 $n$ 条规则中前件与 $A^*$ 最接近的一条或数条规则,然后求 $B^*$ 的方法,有兴趣的读者可见文献[30].

### 4.3.3 Fuzzy 推理的数学本质

(1)推理与映射

我们以(4.3.10)式为例分析一下 Fuzzy 推理的数学本质. 设 $A_1,\cdots,A_n$ 与 $A^*$ 都是 $X$ 上的 Fuzzy 集,$B_1,\cdots,B_n$ 与 $B^*$都是 $Y$ 上的 Fuzzy 集,$C_1,\cdots,C_n$ 与 $C^*$都是 $Z$ 上的 Fuzzy 集. 分别用 $\mathscr{A}$,$\mathscr{B}$和 $\mathscr{C}$表示 $\mathscr{F}(X)$, $\mathscr{F}(Y)$和 $\mathscr{F}(Z)$,则

$$A^*,\ A_i \in \mathscr{A},\ B^*,\ B_i \in \mathscr{B},\ C^*,\ C_i \in \mathscr{C} \quad (i = 1,\cdots,n).$$

再令

$$\mathscr{D} = \{(A_1, B_1), \cdots, (A_n, B_n)\},$$

则

$$\mathscr{D} \subset \mathscr{A} \times \mathscr{B}.$$

在(4.3.10)式中,已知$(A_i,B_i)$时就有确定的 $C_i$ 与之对应,如果

$$(A_i,B_i) = (A_j,B_j) \text{ 时}, \quad C_i = C_j \quad (1 \leqslant i; j \leqslant n). \tag{4.3.24}$$

那么,(4.3.10)式中实际上是已掌握了定义在 $\mathscr{D}$ 上的映射 $\varphi_0: \mathscr{D} \to \mathscr{C}$,这里 $\varphi_0((A_i,B_i)) = C_i\ (i=1,\cdots,n)$. 因为 $\varphi_0$ 的定义域只是有限的序对之集 $\mathscr{D}$,任意给定的序对$(A^*,B^*)$自然一般不在 $\mathscr{D}$ 中,但$(A^*,B^*) \in \mathscr{A} \times \mathscr{B}$. 在(4.3.10)式中就是要在已知 $\varphi_0$ 的情况下,对 $\mathscr{A} \times \mathscr{B}$ 中的序对$(A^*,B^*)$确定与其对应的 $C^*$ 来. 这实际上是要寻求或制作一个映射 $\varphi: \mathscr{A} \times \mathscr{B} \to \mathscr{C}$. 可见,(4.3.10)式所反映的 Fuzzy 推理的数学实质是:

**已知定义在 $\mathscr{A} \times \mathscr{B}$ 的某有限子集 $\mathscr{D}$ 上的映射 $\varphi_0: \mathscr{D} \to \mathscr{C}$,要求一个定义在整个 $\mathscr{A} \times \mathscr{B}$ 上的映射 $\varphi: \mathscr{A} \times \mathscr{B} \to \mathscr{C}$.**

因为一般不对 $\varphi$ 提什么要求,所以求 $\varphi$ 的方法太自由了,甚至随便取一个从 $\mathscr{A} \times \mathscr{B}$ 到 $\mathscr{C}$ 的映射作为 $\varphi$ 都可以. 这也正是当前见到的 Fuzzy 推理方法五花八门的原因所在. 如果要求 $\varphi$ 在 $\mathscr{D}$ 上与 $\varphi_0$ 一致,即要求

$$\varphi(A_i,B_i) = C_i \quad (i = 1,\cdots,n) \tag{4.3.25}$$

成立,则 $\varphi$ 显然是 $\varphi_0$ 从 $\mathscr{D}$ 到整个空间 $\mathscr{A} \times \mathscr{B}$ 上的一个延拓. 而把定义在 $\mathscr{A} \times \mathscr{B}$ 的有限子集 $\mathscr{D}$ 上的映射向全空间延拓仍然是可以多种多样的.

(2)推理的相容性

当条件(4.3.24)式成立时,称原始推理规则组$\{A_i$ 且 $B_i \to C_i \mid i=1,\cdots,n\}$是**相容的或无矛盾的**. 当求得的 $\varphi$ 满足(4.3.25)式时,称相应的 Fuzzy 推理是相容的. 由以上分析看到,只要原始规则组相容,$\varphi_0$ 就存在,那么延拓 $\varphi$ 也就存在,即(4.3.25)式成立. 所以我们有如下命题.

**命题 4.3.6**　如果原始规则组相容,则恒可使 Fuzzy 推理相容.

这里不论是先推理后聚合还是先聚合后推理,即不论采取 FITA 还是 FATI,都是在求 $\varphi$.

(3)FITA 与 FATI 的数学本质

关于 FITA. 把每条规则"若 $A_i$ 且 $B_i$ 则 $C_i$"都转化为一个映射 $\varphi_i: \mathscr{A} \times \mathscr{B} \to \mathscr{C}$. 令 $\Omega = \mathscr{A} \times \mathscr{B} \times \mathscr{C}$, 则一个规则就是 $\Omega$ 中的一个点. 令 $\Delta = \{\eta: \mathscr{A} \times \mathscr{B} \to \mathscr{C} \mid \eta$ 是映射$\}$,则上述转化实际上是在作一个映射

$$\xi: \Omega \to \Delta \tag{4.3.26}$$

使 $\varphi_i = \xi(A_i, B_i, C_i)\ (i = 1, \cdots, n)$. 代入已给定的输入 $A^*, B^*$,求得 $C_i^* =$

$\varphi_i(A^*,B^*)$. 至此"First Infer"完成. 剩下的"Then Aggregate"实际上是作一个映射

$$\psi:\mathscr{C}^n\to\mathscr{C} \tag{4.3.27}$$

最后就得到

$$C^* = \psi(C_1{}^*,\cdots,C_n{}^*). \tag{4.3.28}$$

关于 FATI. 先把前述的映射 $\varphi_0$(即 $n$ 条规则)聚合为一条超规则"若 $A$ 且 $B$ 则 $C$". 这实际上是在作一个映射

$$\xi':\Omega^n\to\Omega, \tag{4.3.29}$$

再把超规则(即 $\Omega$ 中的一个点 $(A,B,C)$)按(4.3.26)式转化为 $\Delta$ 中的一个映射 $\varphi$. $\varphi=\xi\circ\xi'((A_1,B_1,C_1),\cdots,(A_n,B_n,C_n))$. 最后把 $A^*,B^*$ 代入 $\varphi$ 即得 $C^*=\varphi(A^*,B^*)$.

因为从(4.3.26)式到(4.3.29)式的映射都可适当选择,所以不论 FITA 还是 FATI,总可以是相容的,只要原始规则组无矛盾即可.

前面已经说过,当前的 Fuzzy 推理方法是五花八门的,这不等于说 Fuzzy 推理是随心所欲的. 事实上,各种 Fuzzy 推理都有其实际背景,可以说是在一定程度上各种 Fuzzy 推理都是针对某类控制的需要而试出来的. 这里 Fuzzy 推理的实用是第一位的,而其数学严谨性则是第二位的. 或许这正是当前的 Fuzzy 推理尚未与 Fuzzy 逻辑成功地结合的原因吧. 不过在 4.4 节中我们尝试给出一种这样的结合.

## 4.4 Fuzzy 推理的三 I 算法

在 4.3 节中我们已经看到,Fuzzy 推理的数学本质是根据定义在一个集合 $\mathscr{A}$ 的有限子集(甚至是单点集)上的映射去求一个定义在 $\mathscr{A}$ 上的映射. 如果要求 Fuzzy 推理是相容的,则上述推理实际上是在作映射的延拓. 这种延拓可以是多种多样的,究竟采取什么样的解法取决于实际应用的需要,而不是由纯数学的观点去裁定. 但这并不是说 Fuzzy 推理对其自身的数学合理性漠不关心. 如果能将实用性与数学合理性兼顾起来,自然是一件有意义的工作. 在本节中我们就给出一种新的数学方法,叫做三 I 算法. 从一定的角度去看它是严格的,同时其计算结果又与 Zadeh 等的 CRI 方法的计算结果相近,甚至还是他们结果的改进,这就使我们的新方法有了实际应用上的背景. 然后在 4.5 节中,我们再把这种三 I 算法纳入逻辑的框架中. 我们着重讨论 Fuzzy MP 规则,至于 Fuzzy MT 规则我们在4.5节将上述方法推广到更为一般的情形,引入并讨论命题之间的支持度理论之后再作讨论. 所以以下先讨论三 I MP 规则,简称三 I 规则. 以后将 Fuzzy Modus Tollens 全称为三 I MT 规则以作区别.

### 4.4.1　Fuzzy 推理的三 I 算法

我们着重考虑最基本的 Fuzzy 推理，即(4.3.2)式：

$$\begin{array}{rl} \text{已知} & A \longrightarrow B \\ \text{且给定} & \underline{A^* \qquad\qquad} \\ \text{求} & \qquad\quad B^*. \end{array}$$

像通常那样，设 $A, A^* \in \mathscr{F}(X)$, $B, B^* \in \mathscr{F}(Y)$，即把各命题都表示为 Fuzzy 集. 这时所谓“已知 $A \to B$”是什么意思呢？Zadeh 等把它转为成一个 Fuzzy 关系 $R(x,y)$，这里

$$R(x,y) = R_Z(A(x), B(y)), \quad (x,y) \in X \times Y, \tag{4.4.1}$$

$R_Z$是 Zadeh 的蕴涵算子（也可采用其他的蕴涵算子）. 既然 $R_Z$是蕴涵算子，(4.4.1)式就从整体上对各种可能的 $x$ 和 $y$ 反映了 $A$ 蕴涵 $B$ 的程度. 从这个意义上讲，用(4.4.1)式中的 Fuzzy 关系$R(x,y)$去代表已知条件 $A \to B$ 是合理的. 但遗憾的是，CRI 方法没有沿这条思路走下去，它只使用了一次推理的转化，只使用了一次 Inference. 当给定 $A^*$ 去求 $B^*$ 时，它不再考虑 $A^* \to B^*$ 及其与 $A \to B$ 之间应有的关系，而是简单地让 $A^*$ 与 $R$ 去复合(compositional rule)以求得 $B^*$. 我们不妨把这种只转化了一次推理的方法叫“单 I 方法”. 其实，只要继续一开始的想法，考虑 $R_Z(A^*(x), B^*(y))$就可得出看来更为合理的算法. 这里由于 $B^*$ 是待定的，$R_Z(A^*(x), B^*(y))$也就是待定的，它反映了由 $A^*$ 得出 $B^*$ 的整体情况. 这种情况由何而来呢？自然是由 $R_Z(A(x), B(y))$而来，确切地说，$R_Z(A^*(x), B^*(y))$与已知条件 $R_Z((A(x), B(y))$之间应当满足最大可能的蕴涵关系，即

$$R_Z(A(x), B(y)) \longrightarrow R_Z(A^*(x), B^*(y))$$

的值越大越好，上式也可写成

$$R_Z(R_Z(A(x), B(y)), R_Z(A^*(x), B^*(y))). \tag{4.4.2}$$

如果不限于考虑 Zadeh 的蕴涵算子 $R_Z$并干脆用→表示一般蕴涵运算，则(4.4.2)式可写为

$$(A(x) \to B(y)) \to (A^*(x) \to B^*(y)). \tag{4.4.3}$$

这时要求的 $B^*$ 应当对一切可能的 $x$ 和 $y$ 使(4.4.3)式取得最大值. 这种 $B^*$ 是很多的. 例如，只要蕴涵运算→满足当 $a \leqslant b$ 时 $a \to b = 1$，则令 $B^*$ 为 $\mathscr{F}(Y)$ 中恒取值 1 的最大 Fuzzy 集，则(4.4.3)式就对一切 $x$ 与 $y$ 都取最大值 1. 但这种 $B^*$ 显然是不合用的，它未提供有用的信息. 所以，我们要求 $B^*$ 是 $\mathscr{F}(Y)$ 中使(4.4.3)式取最大值的最小 Fuzzy 集. 由于(4.4.3)式中含有三重蕴涵运算，我们把上述方法称为 **III 算法或三 I 算法**. 确切地讲，我们有以下的三 I MP 规则：

**三 I 规则 4.4.1**　设 $A, A^* \in \mathscr{F}(X)$, $B \in \mathscr{F}(Y)$，则(4.3.2)式中的 $B^*$ 是 $\mathscr{F}(Y)$ 中使(4.4.3)式取最大值的最小 Fuzzy 集. 特别地，当蕴涵算子→满足条件

“当 $a\leqslant b$ 时 $a\to b=1$”时，$B^*$ 是 $\mathscr{F}(Y)$ 中使(4.4.3)式的值恒等于 1 的最小 Fuzzy 集.

那么规则 4.4.1 中提到的(4.4.3)式的最大值是多少？$\mathscr{F}(Y)$ 中使(4.4.3)式取最大值的最小 Fuzzy 集是否存在？我们有下面的分析：

以 $f(x,y)$ 记 $x\to y(x,y\in[0,1])$，一般都要求 $f(x,y)$ 关于 $y$ 是增函数，即当 $y_1\leqslant y_2$ 时，$f(x,y_1)\leqslant f(x,y_2)$. 可见，(4.4.3)式的最大可能值是

$$M(x,y)=(A(x)\to B(y))\to(A^*(x)\to 1). \tag{4.4.4}$$

特别是当→满足“当 $a\leqslant b$ 时 $a\to b=1$”时，对任何 $(x,y)$ 都有 $M(x,y)=1$. $\mathscr{F}(Y)$ 中除最大 Fuzzy 集 1 之外，可能还有较小的 Fuzzy 集也使(4.4.3)式的值等于 $M(x,y)$，暂且称 $\mathscr{F}(Y)$ 中的这种 Fuzzy 集为“好集”. 如果 $f(x,y)=x\to y$ 是右连续的，则可证若干好集的交仍为好集，从而规则 4.4.1 中的那个最小集的确存在，即下面的命题成立.

**命题 4.4.2** 设 $f(x,y)=x\to y$.

i) 如果 $f(x,y)$ 关于 $y$ 是增函数，则关于固定的 $A(x)$，$B(y)$ 和 $A^*(x)$，(4.4.4)式中的 $M(x,y)$ 是(4.4.3)式当 $B^*$ 变动时的最大可能值.

ii) 如果 $f(x,y)$ 关于 $y$ 还是右连续的，则 $\mathscr{F}(Y)$ 中有最小的好集 $B^*$.

**证** 只需证 ii). 设

$$\mathscr{B}=\{B_i\mid B_i\in\mathscr{F}(Y),B_i\text{ 是好集}\},$$

则由 $1\in\mathscr{B}$ 知 $\mathscr{B}$ 非空. 固定一对 $(x,y)$，则对每个 $B_i\in\mathscr{B}$，

$$(A(x)\to B(y))\to(A^*(x)\to B_i(y))=M(x,y). \tag{4.4.5}$$

令

$$B^*=\wedge\{B_i\mid B_i\in\mathscr{B}\}, \tag{4.4.6}$$

则必有某 $i_0$ 使 $B^*(y)=B_{i_0}(y)$，从而

$$(A(x)\to B(y))\to(A^*(x)\to B^*(y))=M(x,y). \tag{4.4.7}$$

因为反之，则 $\mathscr{B}$ 中有 $B_{i_1},B_{i_2},\cdots$ 使

$$B^*(y)=\lim_{n\to\infty}B_{i_n}(y).$$

因为 $B_{i_k}(y)>B^*(y)$，所以上式表明 $B^*(y)$ 是 $\{B_{i_n}(y)\}$ 的右极限. 由 $f(x,y)=x\to y$ 关于 $y$ 右连续以及(4.4.5)式当 $i=i_n$ 时成立，即得(4.4.7)式，即 $B^*$ 是好集，从而有 $i_0$ 使 $B^*(y)=B_{i_0}(y)$，矛盾. 由(4.4.6)式知 $B^*$ 是 $\mathscr{F}(Y)$ 中最小的好集.

当 $f(x,y)$ 满足命题 4.4.2 的两个条件时，可以根据规则4.4.1去求 $B^*$.

**算法 4.4.3** (基于 Zadeh 蕴涵算子 $R_Z$ 的三 I 算法)

$$B^*(y)=\sup_{\substack{x\in E_y\\ R_Z(A(x),B(y))>\frac{1}{2}}}\{A^*(x)\wedge R_Z(A(x),B(y))\},\quad y\in Y, \tag{4.4.8}$$

这里

$$E_y = \{x \in X \mid (A^*(x))' < R_Z(A(x), B(y))\}. \qquad (4.4.9)$$

**证**　设 $f(x,y) = R_Z(x,y)$，则 $f(x,y)$ 满足命题 4.4.2 的两个条件，从而可以使用规则 4.4.1 去求 $B^*$. 我们的目的是要求出 $\mathscr{F}(Y)$ 中的最小 $B^*$ 以使(4.4.2)式取得最大值. 由 Zadeh 算子的定义知(4.4.2)式的值为

$$(R_Z(A(x), B(y)))' \vee [R_Z(A(x), B(y)) \wedge R_Z(A^*(x), B^*(y))]. \qquad (4.4.10)$$

这里设 $y, A, B$, 与 $A^*$ 都已固定，要求对一切可能的 $x$, $B^*(y)$ 能使(4.4.10)式的值最大. 因为 $y$ 已固定，为书写简便起见，以 $M(x)$ 记 $R_Z(A(x), B(y))$，则(4.4.10)式可写为

$$M'(x) \vee [M(x) \wedge R_Z(A^*(x), B^*(y))]. \qquad (4.4.11)$$

如果 $x$ 使 $M'(x) \geqslant M(x)$，即 $M(x) \leqslant \frac{1}{2}$，则(4.4.11)式可化简为 $M'(x)$. 因为 $B^*(y)$ 不出现，(4.4.11)式是否取最大值与 $B^*(y)$ 的值无关. 如果 $M'(x) < M(x)$，即 $M(x) > \frac{1}{2}$，则由分配律知(4.4.11)式可化为

$$M(x) \wedge [M'(x) \vee R_Z(A^*(x), B^*(y))], \qquad (4.4.12)$$

其最大可能值为 $M(x)$，可于

$$\begin{aligned} & R_Z(A^*(x), B^*(y)) \\ & = (A^*(x))' \vee [A^*(x) \wedge B^*(y)] \\ & \geqslant M(x) \end{aligned} \qquad (4.4.13)$$

时达到.

i) 设 $x \notin E_y$，即 $(A^*(x))' \geqslant M(x)$，则上式的成立对 $B^*(y)$ 无任何要求.

ii) 设 $x \in E_y$. 则(4.4.13)式等价于

$$A^*(x) \wedge B^*(y) \geqslant M(x). \qquad (4.4.14)$$

令

$$G_y = \{x \in E_y \mid A^*(x) \geqslant M(x)\},$$
$$H_y = \{x \in E_y \mid A^*(x) < M(x)\},$$

则 $E_y = G_y \cup H_y$. 若 $x \in G_y$，则 $A^*(x) \geqslant M(x)$，从而由(4.4.14)式知应有 $B^*(y) \geqslant M(x)$. 这也可写作 $B^*(y) \geqslant A^*(x) \wedge M(x)$. 若 $x \in H_y$，则 $A^*(x) < M(x)$. (4.4.14)式已不可能成立. 这时(4.4.12)式与 $R_Z(A^*(x), B^*(y))$ 同时取得最大值，为此可令 $B^*(y) \geqslant A^*(x)$. 这也可写作 $B^*(y) \geqslant A^*(x) \wedge M(x)$.

综上所述并注意 $B^*$ 应是 $\mathscr{F}(Y)$ 中具有上述性质的最小 Fuzzy 集便得(4.4.8)式.

**例 4.4.4**　设 $X, Y, A, B, A^*$ 同例 4.3.1，按算法 4.4.3 求 $B^*$.

**解** 由 $(A^*(x))'=x, R_Z(A(x),B(y))=\frac{2-x}{3}\vee\left(\frac{x+1}{3}\wedge(1-y)\right)$ 得

$$E_y=\left\{x\in[0,1]\,\middle|\,x<\frac{2-x}{3}\vee\left(\frac{x+1}{3}\wedge(1-y)\right)\right\}.$$

由 $x<\frac{2-x}{3}$ 得 $x<\frac{1}{2}$. 由 $x<\frac{x+1}{3}\wedge(1-y)$ 得 $x<\frac{1}{2}$ 且 $x<1-y$. 所以 $E_y=\left\{x\in[0,1]\,\middle|\,x<\frac{1}{2}\right\}$. 易证当 $x<\frac{1}{2}$ 时 $R_Z(A(x),B(y))>\frac{1}{2}$, 且这时 $1-x>\frac{2-x}{3}>\frac{x+1}{3}$. 所以

$$\begin{aligned}B^*(y)&=\sup_{x<\frac{1}{2}}\left\{(1-x)\wedge\left[\frac{2-x}{3}\vee\left(\frac{x+1}{3}\wedge(1-y)\right)\right]\right\}\\&=\sup_{x<\frac{1}{2}}\frac{2-x}{3}=\frac{2}{3}.\end{aligned}$$

这与例 4.3.1 算出的结果一致.

**例 4.4.5** 设 $X,Y,A,B$ 与 $A^*$ 同例 4.3.2, 按算法 4.4.3 求 $B^*$.

**解** 由 $R_Z(A(x),B(y))=1-x$ 得

$$\begin{aligned}E_y&=\{x\in[0,1]\mid(A^*(x))'<1-x\}\\&=\{x\in[0,1]\mid 1-x<1-x\}=\varnothing.\end{aligned}$$

所以

$$B^*(y)=0,\quad y\in[0,1].$$

**注 4.4.6** 将(4.4.8)式与(4.3.4)式比较看出, 按三 I 算法 4.4.3 求得的 $B^*$ 小于或等于按 Zadeh 的 CRI 算法求得的 $B^*$, 因而从寻求 $\mathscr{F}(Y)$ 中的最小 $B^*$ 的意义看, 三 I MP 算法 4.4.3 较 Zadeh 的 CRI 算法为优. 将例 4.4.4 和例 4.4.5 分别与例 4.3.1 和例 4.3.2 对比也看出了这一点. 今后称算法 4.4.3 为 Zadeh 型三 I MP 算法.

现在讨论基于三 I 规则 4.4.1 且其中 $R$ 为蕴涵算子 $R_0$ 时 $B^*$ 的算法.

**算法 4.4.7** ($R_0$ 型三 I 算法)

$$B^*(y)=\sup_{x\in E_y}\{A^*(x)\wedge R_0(A(x),B(y))\}. \tag{4.4.15}$$

这里 $E_y$ 仍由(4.4.9)式确定, 只是其中应将 $R_Z$ 换为 $R_0$, 即

$$E_y=\{x\in X\mid(A^*(x))'<R_0(A(x),B(y))\}. \tag{4.4.16}$$

$B^*$ 就是使(4.4.3)式等于 1 的 $\mathscr{F}(Y)$ 中的最小 Fuzzy 集.

**证** 首先证明对 $X$ 中任一固定的点 $a$ 和任一 $y\in Y$, 由(4.4.15)式确定的 $B^*$ 满足

$$R_0(A^*(a),B^*(y))\geqslant R_0(A(a),B(y)), \tag{4.4.17}$$

从而这个$B^*$可使(4.4.3)式取最大值1.

事实上,设$a \notin E_y$,则$(A^*(a))' \geqslant R_0(A(a),B(y))$,从而由

$$R_0(A^*(a),B^*(y)) \geqslant (A^*(a))' \vee B^*(y) \tag{4.4.18}$$

知(4.4.17)式成立.设$a \in E_y$,令

$$G_y = \{x \in E_y \mid A^*(x) \geqslant R_0(A(x),B(y))\},$$
$$H_y = \{x \in E_y \mid A^*(x) < R_0(A(x),B(y))\},$$

则$E_y = G_y \cup H_y$.若$a \in G_y$,则$A^*(a) \geqslant R_0(A(a),B(y))$.由(4.4.15)式得

$$B^*(y) \geqslant A^*(a) \wedge R_0(A(a),B(y)) = R_0(A(a),B(y)),$$

从而由(4.4.18)式知(4.4.17)式成立.若$a \in H_y$,则$A^*(a) < R_0(A(a),B(y))$.由(4.4.15)式知

$$B^*(y) \geqslant A^*(a) \wedge R_0(A(a),B(y)) = A^*(a).$$

这时$R_0(A^*(a),B^*(y)) = 1$,从而(4.4.17)式仍成立.总之,(4.4.17)式恒成立.

其次证明由(4.4.15)式确定的$B^*$不能再减小.事实上,如果$B^*(y) = 0$,则$B^*$在$y$点的值不能再小.故可设$B^*(y) > 0$.这时自然$E_y$非空.任取$\varepsilon$使$0 < \varepsilon < B^*(y)$.注意

$$\begin{aligned} B^*(y) &= \sup_{x \in G_y}[A^*(x) \wedge R_0(A(x),B(y))] \\ &\quad \vee \sup_{x \in H_y}[A^*(x) \wedge R_0(A(x),B(y))] \\ &= \sup_{x \in G_y} R_0(A(x),B(y)) \vee \sup_{x \in H_y} A^*(x), \end{aligned}$$

则当

$$g = \sup_{x \in G_y} R_0(A(x),B(y)) \geqslant h = \sup_{x \in H_y} A^*(x)$$

时,$B^*(y) = g > \varepsilon$.取$a \in G_y$使$R_0(A(a),B(y)) > g - \varepsilon$.则$B^*(y) - \varepsilon < R_0(A(a),B(y))$.由$a \in E_y$知$(A^*(a))' < R_0(A(a),B(y))$.且由$a \in G_y$知$A^*(a) \geqslant R_0(A(a),B(y)) > B^*(y) - \varepsilon$.所以

$$\begin{aligned} &R_0(A^*(a),B^*(y) - \varepsilon) \\ &= (A^*(a))' \vee (B^*(y) - \varepsilon) \\ &< R_0(A(a),B(y)). \end{aligned} \tag{4.4.19}$$

当$g < h$时,$B^*(y) = h$.取$a \in H_y$使$A^*(a) > h - \varepsilon$,则$B^*(y) - \varepsilon < A^*(a)$.由$a \in E_y$知$(A^*(a))' < R_0(A(a),B(y))$.从而

$$\begin{aligned} &R_0(A^*(a),B^*(y) - \varepsilon) \\ &= (A^*(a))' \vee (B^*(y) - \varepsilon) \\ &< R_0(A(a),B(y)). \end{aligned} \tag{4.4.20}$$

由(4.4.19)与(4.4.20)两式知,由(4.4.15)式确定的$B^*$是使(4.4.3)式的值等

于 1 的 $\mathscr{F}(Y)$ 中的最小 Fuzzy 集.

**例 4.4.8** 设 $X,Y,A,B$ 与 $A^*$ 同例 4.2.5. 按 $R_0$ 型三 I 算法求 $B^*$.

**解** i) 设 $y>\frac{1}{3}$, 则 $\frac{x+2}{3}>1-y$. $R_0\left(\frac{x+2}{3},1-y\right)=\frac{1-x}{3}\vee(1-y)$.

$$E_y=\left\{x\in[0,1]\,\middle|\,x<\frac{1-x}{3}\vee(1-y)\right\}.$$

注意, $0\in E_y$ 便得

$$\begin{aligned}B^*(y)&=\sup_{x\in E_y}\left\{(1-x)\wedge\left[\frac{1-x}{3}\vee(1-y)\right]\right\}\\&=\frac{1}{3}\vee(1-y).\end{aligned}$$

ii) 设 $y\leqslant\frac{1}{3}$, 则 $1-y\geqslant\frac{2}{3}$. 令 $x=0$ 得 $R_0\left(\frac{0+2}{3},1-y\right)=1$, 从而

$$B^*(y)\geqslant\{(1-0)\wedge 1\}=1.$$

由 i) 与 ii) 得

$$B^*(y)=\begin{cases}1, & y\leqslant\frac{1}{3},\\ \frac{1}{3}\vee(1-y), & y>\frac{1}{3}.\end{cases}\tag{4.4.21}$$

这恰与(4.2.3)式相一致.

**例 4.4.9** 设 $X,Y,A,B$ 与 $A^*$ 同例 4.4.4, 按 $R_0$ 型三 I 算法求 $B^*$.

**解**
$$\begin{aligned}E_y&=\{x\in[0,1]\mid(A^*(x))'<R_0(A(x),B(y))\}\\&=\left\{x\in[0,1]\,\middle|\,x<R_0\left(\frac{x+1}{3},1-y\right)\right\},\end{aligned}$$

$$B^*(y)=\sup_{x\in E_y}\left\{(1-x)\wedge R_0\left(\frac{x+1}{3},1-y\right)\right\}.$$

因为 $1-x$ 与 $R_0\left(\frac{x+1}{3},1-y\right)$ 都随 $x$ 的减小而增大且 $0\in E_y$. 所以

$$B^*(y)=(1-0)\wedge R_0\left(\frac{0+1}{3},1-y\right)=R_0\left(\frac{1}{3},1-y\right).$$

由此不难算出

$$B^*(y)=\begin{cases}1, & y\leqslant\frac{2}{3},\\ \frac{2}{3}, & y>\frac{2}{3}.\end{cases}$$

**注 4.4.10** 例 4.4.9 中求出的 $B^*$ 比例 4.4.4 中的 $B^*\equiv\frac{2}{3}$ 为大. 按最小性原

则,似乎例 4.4.9 中的 $B^*$ 不如例 4.4.4 中的 $B^*$. 其实不然,因为那里的 $B^*$ 按 Zadeh 算法只能使(4.4.3)式的值最大,将 $B^* \equiv \frac{2}{3}$ 代入,不难计算其最大值为 $\frac{2}{3}$. 而例 4.4.9 中的 $B^*$ 则可使(4.4.3)式的值恒为 1.

### 4.4.2　P-还原算法

截至目前我们已经见到求解(4.3.2)式中的 $B^*$ 的下述各种算法:Zadeh 的 CRI 算法,运用其他蕴涵算子的 CRI 算法,Zadeh 型三 I 算法以及 $R_0$ 型三 I 算法等. 如果(4.3.2)式中的 $A^*$ 等于 $A$,我们自然希望算出的 $B^*$ 等于 $B$,即希望我们的算法是相容的.

**定义 4.4.11**　如果当 $A$ 与 $B$ 满足条件 $P$ 时由一种求解(4.3.2)式的算法当 $A^*$ 等于 $A$ 时求得的 $B^*$ 等于 $B$,则称这种算法为 **P-还原算法**.

**定理 4.4.12**　$R_0$ 型三 I 算法是 $P$-还原算法,这里性质 $P$ 指 $A$ 为正规 Fuzzy 集,即有 $a \in X$ 使 $A(a) = 1$.

**证**　设 $A^*(x) = A(x)$,则

$$E_y = \{x \in X \mid A'(x) < R_0(A(x), B(y))\}.$$

若 $B(y) = 0$,则由 $A'(x) < R_0(A(x), 0)$ 不成立知 $E_y$ 为空集,从而按(4.4.15)式算出的 $B^*(y) = 0$. 若 $B(y) \neq 0$,取 $a \in X$ 使 $A(a) = 1$,则由 $A'(a) = 0 < R_0(A(a), B(y))$ 知 $a \in E_y$. 在(4.4.15)式中令 $A^* = A$ 得 $B^*(y) \geqslant A(a) \wedge R_0(A(a), B(y)) = B(y)$. 又任取 $x \in E_y$ 有 $A'(x) < R_0(A(x), B(y))$. 若 $A(x) > B(y)$,则有 $A'(x) < A'(x) \vee B(y)$,即 $A'(x) < B(y)$,那么当 $x \in E_y$ 时 $R_0(A(x), B(y)) = B(y)$,从而

$$A(x) \wedge R_0(A(x), B(y)) \leqslant B(y).$$

若 $A(x) \leqslant B(y)$,则 $R_0(A(x), B(y)) = 1$,从而仍有

$$A(x) \wedge R_0(A(x), B(y)) = A(x) \leqslant B(y).$$

总之,由(4.4.15)式知 $B^*(y) \leqslant B(y)$. 所以 $B^*(y) = B(y)$.

**注 4.4.13**　由例 4.3.2 看出,在那里 $A(x) = x$,从而 $A$ 是正规的. 但在 $A^* = A$ 时 $B^*$ 并不等于 $B$. 可见,Zadeh 的 CRI 算法不是 $P$-还原算法,这里 $P$ 指 $A$ 为正规 Fuzzy 集. 文献[31]中称还原算法为关系再现算法.

### 4.4.3　用三 I 算法求解一般的 Fuzzy 推理问题

上面讨论的关于 Fuzzy 推理的三 I 算法虽然是对(4.3.2)式而进行的,但也可推广用于求解形如(4.3.11)式的一般 Fuzzy 推理问题. 我们先来研究(4.3.12)式的求解方法,然后再求解(4.3.11)式的 $B^*$.

(1)(4.3.12)式的解法

为求解(4.3.12)式,只需将 $A_1,\cdots,A_m$ 相乘,将 $A_1^*,\cdots,A_m^*$ 相乘,令 $A=A_1\times\cdots\times A_m$, $A^*=A_1^*\times\cdots\times A_m^*$,然后求解(4.3.2)式即可.

**例 4.4.14** 重新考虑例 4.3.5,按 $R_0$ 型三 I 算法 4.4.7 计算 $B^*$.

**解** 在例 4.3.5 中已算出

$$A(x,y)=\frac{x}{2}\wedge y,\quad A^*(x,y)=x\wedge y.$$

将 $B$ 与 $B^*$ 的自变量均用 $z$ 表示,这时

$$E_z=\left\{(x,y)\in X_1\times X_2\,\middle|\,(x\wedge y)'<R_0\left(\frac{x}{2}\wedge y,z^2\right)\right\},$$

$$B^*(z)=\sup_{(x,y)\in E_z}\left\{(x\wedge y)\wedge R_0\left(\frac{x}{2}\wedge y,z^2\right)\right\}. \tag{4.4.22}$$

对固定的 $z$,令

$$f(x,y)=(x\wedge y)\wedge R_0\left(\frac{x}{2}\wedge y,z^2\right). \tag{4.4.23}$$

i)用 $\Delta_1$ 表示条件"$(x,y)\in E_z$ 且 $\frac{x}{2}\wedge y\leqslant z^2$",则 $\Delta_1$ 等价于"$(x\wedge y)'<1$ 且 $\frac{x}{2}\wedge y\leqslant z^2$",即"$x\neq0,y\neq0$ 且 $\frac{x}{2}\wedge y\leqslant z^2$". 这时 $f(x,y)=x\wedge y$. 可直接看出

$$\sup_{\Delta_1}f(x,y)=2z^2\wedge 1. \tag{4.4.24}$$

ii)用 $\Delta_2$ 表示条件"$(x,y)\in E_z$ 且 $\frac{x}{2}\wedge y>z^2$ 且 $x\leqslant y$". 这时 $f(x,y)=(x\wedge y)\wedge\left[\left(\frac{x}{2}\wedge y\right)'\vee z^2\right]=x\wedge\left[\left(1-\frac{x}{2}\right)\vee z^2\right]=\left[x\wedge\left(1-\frac{x}{2}\right)\right]\vee(x\wedge z^2)$. 因为当 $x=\frac{2}{3}$ 时 $x\wedge\left(1-\frac{x}{2}\right)$ 取得最大值 $\frac{2}{3}$,且 $z^2<\frac{x}{2}\wedge y\leqslant\frac{1}{2}$. 易证 $\left(\frac{2}{3},1\right)\in E_z$,所以

$$\sup_{\Delta_2}f(x,y)=\frac{2}{3}. \tag{4.4.25}$$

iii)用 $\Delta_3$ 表示条件"$(x,y)\in E_z$ 且 $\frac{x}{2}\wedge y>z^2$ 且 $x>y$". 这时 $f(x,y)=y\wedge\left[\left(\frac{x}{2}\wedge y\right)'\vee z^2\right]$. 当 $y\geqslant\frac{x}{2}$ 时 $f(x,y)=y\wedge\left[\left(1-\frac{x}{2}\right)\vee z^2\right]$. 若 $y\geqslant\frac{2}{3}$,则 $x>\frac{2}{3}$, $1-\frac{x}{2}<\frac{2}{3}$. 注意, $z^2<\frac{1}{2}$ 便知 $f(x,y)<\frac{2}{3}$. 若 $y<\frac{2}{3}$,则自然 $f(x,y)<\frac{2}{3}$,即当 $y\geqslant\frac{x}{2}$ 时, $f(x,y)<\frac{2}{3}$;当 $y<\frac{x}{2}$ 时, $f(x,y)=y\wedge[(1-y)\vee z^2]=[y\wedge(1-y)]\vee(y\wedge z^2)\leqslant\frac{1}{2}$. 所以,当 $\Delta_3$ 成立时,

$$f(x,y) < \frac{2}{3}, \quad \sup_{\Delta_3} f(x,y) \leqslant \frac{2}{3}. \tag{4.4.26}$$

综上所述,因为条件 $E_z$ 可分解为"$\Delta_1$ 或 $\Delta_2$ 或 $\Delta_3$",所以由(4.4.22)~(4.4.26)各式得

$$B^*(z) = \left(2z^2 \vee \frac{2}{3}\right) \wedge 1. \tag{4.4.27}$$

这恰与(4.2.10)式相一致.

(2)(4.3.11)式的解法

在(1)中已看到,当一个蕴涵式中的前件包含多于一个命题时,可以用 Fuzzy 集相乘的方法把前件化成一个 Fuzzy 集. 所以,为研究(4.3.11)式的求解方法,可以研究如下的简化问题的求解方法:

$$\begin{array}{lll} \text{已知} & A_1 \longrightarrow B_1 & \\ & \cdots\cdots & \\ & A_n \longrightarrow B_n & \\ \text{且给定} & \underline{A^* \qquad\qquad} & \\ \text{求} & \qquad\quad B^*. & \end{array} \tag{4.4.28}$$

这时既可用先推理后聚合的 FITA 方法,也可以用先聚合后推理的 FATI 方法. 关于这两种方法我们都采用蕴涵算子 $R_0$.

**FITA 方法**　设 $1 \leqslant i \leqslant n$,求解下式

$$\begin{array}{lll} \text{已知} & A_i \longrightarrow B_i & \\ \text{且给定} & \underline{A^* \qquad\qquad} & \\ \text{求} & \qquad\quad C & (i=1,\cdots,n). \end{array} \tag{4.4.29}$$

设其答案为 $C_i$. 令

$$B^* = \bigvee_{i=1}^{n} C_i \tag{4.4.30}$$

即可. 这时由

$$(A_i \to B_i) \to (A^* \to C_i) \quad (i = 1,\cdots,n) \tag{4.4.31}$$

的值为 1 且 $B^* \geqslant C_i$ 知

$$(A_i \to B_i) \to (A^* \to B^*) \quad (i = 1,\cdots,n) \tag{4.4.32}$$

的值恒为 1,且由每个 $C_i$ 的最小性知 $B^*$ 是使(4.4.32)式的值对每个 $i$ 均为 1 的 $\mathscr{F}(Y)$ 中的最小 Fuzzy 集.

**FATI 方法**　设

$$R(x,y) = \bigvee_{i=1}^{n} R_0(A_i(x), B_i(y)). \tag{4.4.33}$$

令 $B^*$ 为 $\mathscr{F}(Y)$ 中使

$$R(x,y) \longrightarrow (A^*(x) \longrightarrow B^*(y)) \tag{4.4.34}$$

恒取值 1 的最小 Fuzzy 集.

**定理 4.4.15** FITA 方法与 FATI 方法等价.

**证** 设 $B^*$ 使(4.4.32)式的值对每个 $i$ 都恒为 1,即

$$R_0(A_i(x),B_i(y)) \to (A^*(x) \to B^*(y)) \quad (i=1,\cdots,n)$$

的值恒为 1,则

$$\bigwedge_{i=1}^{n}[R_0(A_i(x),B_i(y)) \to (A^*(x) \to B^*(y))] \tag{4.4.35}$$

的值恒为 1,但

$$\begin{aligned}&\bigwedge_{i=1}^{n}[R_0(A_i(x),B_i(y)) \to (A^*(x) \to B^*(y)]\\ =&\left[\bigvee_{i=1}^{n}R_0(A_i(x),B_i(y))\right] \to (A^*(x) \to B^*(y)).\end{aligned} \tag{4.4.36}$$

所以 $B^*$ 使(4.4.34)式的值恒等于 1.

反过来,设 $B^*$ 使(4.4.34)式的值恒等于 1,则由(4.4.36)式知(4.4.35)式的值恒等于 1,即(4.4.32)式的值对每个 $i$ 都恒等于 1.

特别是对 $\mathscr{F}(Y)$ 中满足上述一方的条件的最小 Fuzzy 集也有同样的关系,所以 FITA 与 FATI 方法等价,即二者求出的是同一个 Fuzzy 集 $B^*$.

## 4.5 Fuzzy 推理的逻辑基础、支持度理论

利用 4.2 节中的部分赋值重言式理论可以将 Fuzzy 推理纳入逻辑框架中.

### 4.5.1 Fuzzy 推理与 $\Sigma$-重言式

在 4.4 节中我们已经将 Fuzzy 推理的 CRI 方法改进为 III 方法,即三 I 方法. 现在考虑定义 4.2.1 当 $n=2$ 时的情形,并分别用 $X$ 与 $Y$ 记那里的 $X_1$ 与 $X_2$,分别用 $A,B,A^*$ 与 $B^*$ 记那里的 $E_1,E_2,E_1{}^*$ 与 $E_2{}^*$,则 $\bar{E}=(A,B;A^*,B^*)$. 令

$$H=(p_1 \to p_2) \to (p_3 \to p_4).$$

在 4.4 节中已经看到,按 Fuzzy 推理的 $R_0$ 型三 I 算法,求解(4.3.2)式中的 $B^*$ 就是求 $\mathscr{F}(Y)$ 中使(4.4.3)式为重言式的最小 $B^*$. 由定义 4.2.1 可见这正是要求 $\mathscr{F}(Y)$ 中使 $H$ 成为 $\Sigma(\bar{E})$-重言式的最小 $B^*$. 所以我们有下面的定理.

**定理 4.5.1** 设

$$\begin{array}{rl}\text{已知} & A \longrightarrow B\\ \text{且给定} & \underline{A^* \qquad\qquad}\\ \text{则得} & \qquad\qquad B^*.\end{array}$$

这里 $B^*$ 是 $\mathscr{F}(Y)$ 中使 $H$ 成为 $\Sigma(\bar{E})$-重言式的最小 Fuzzy 集.

这样我们就利用部分重言式理论将 Fuzzy 推理纳入逻辑框架中.

### 4.5.2　支持度理论

我们要求(4.4.3)式的值恒等于 1,这可以理解为要求 $A\to B$ 全力支持 $A^*\to B^*$. 以支持的观点出发,自然还可考虑 $A\to B$ 对 $A^*\to B^*$ 的支持度大于或等于 $\alpha$ 的情形($0<\alpha\leqslant 1$),即考虑(4.4.3)式的值恒大于或等于 $\alpha$ 的情况,或更为一般些,分别以 $A$ 与 $B$ 取代 $A\to B$ 与 $A^*\to B^*$,我们可以考虑任意两个命题 $A$ 与 $B$ 之间的支持度理论. 以下蕴涵算子均取为 $R_0$.

**定义 4.5.2**　设 $A,B\in F(S)$,$\Sigma\subset\overline{\Omega}$,$\alpha\in[0,1]$. 如果

$$\inf\{v(A\to B)\mid v\in\Sigma\}=\alpha,$$

则称 $A$ 对 $B$ 的 **$\Sigma$-支持度**为 $\alpha$,记作 $\mathrm{sust}(\Sigma;A,B)=\alpha$.

显然,$A$ 对 $B$ 的支持度等于 1 等价于 $A\to B$ 为 $\Sigma$-重言式. 一般地,容易证明下面的命题.

**命题 4.5.3**　$\mathrm{sust}(\Sigma;A,B)=\alpha$ 的充要条件是 $A\to B$ 为 $\Sigma$-($\alpha$-重言式)且对任一 $\varepsilon>0$,$A\to B$ 不是 $\Sigma$-($\alpha+\varepsilon$-重言式).

**定理 4.5.4**　设

$$\mathrm{sust}(\Sigma;A,B)=\alpha>\frac{1}{2},$$

$$\mathrm{sust}(\Sigma;B,C)=\beta>\frac{1}{2},$$

则

$$\mathrm{sust}(\Sigma;A,C)\geqslant\alpha\wedge\beta.$$

**证**　设 $v\in\Sigma$,则由 $\mathrm{sust}(\Sigma;A,B)=\alpha>\frac{1}{2}$ 与 $\mathrm{sust}(\Sigma;B,C)=\beta>\frac{1}{2}$ 得 $v(A\to B)=R_0(v(A),v(B))\geqslant\alpha$,$v(B\to C)=R_0(v(B),v(C))\geqslant\beta$. 若 $v(A)\leqslant v(B)$ 或 $v(B)\leqslant v(C)$,则由 $R_0$ 的性质得

$$R_0(v(A),v(C))\geqslant R_0(v(B),v(C))\geqslant\beta\geqslant\alpha\wedge\beta$$

或

$$R_0(v(A),v(C))\geqslant R_0(v(A),v(B))\geqslant\alpha\geqslant\alpha\wedge\beta.$$

所以不妨设 $v(A)>v(B)>v(C)$,这时

$$R_0(v(A),v(B))=(v(A))'\vee v(B),$$
$$R_0(v(B),v(C))=(v(B))'\vee v(C).$$

由此得

$$(v(A))'\vee v(B)\geqslant\alpha>\frac{1}{2},$$
$$(v(B))'\vee v(C)\geqslant\beta>\frac{1}{2}. \tag{4.5.1}$$

因为 $v(B)>\frac{1}{2}$ 与 $(v(B))'>\frac{1}{2}$ 不可能同时成立，所以由(4.5.1)式得 $(v(A))'\geqslant\alpha$ 或 $v(C)\geqslant\beta$，从而

$$v(A\to C)=R_0(v(A),v(C))=(v(A))'\vee v(C)\geqslant\alpha\wedge\beta.$$

所以由 $v$ 的任意性得

$$\mathrm{sust}(\Sigma;A,C)=\inf\{v(A\to C)\mid v\in\Sigma\}\geqslant\alpha\wedge\beta.$$

**注 4.5.5** i) 有可能 $\mathrm{sust}(\Sigma;A,C)>\alpha\wedge\beta$. 如令 $A=p_1,B=p_2,C=p_3,\Sigma=\{v\in\overline{\Omega}\mid v(p_1)=0.4,v(p_2)=0.3,v(p_3)=0.6\}$，则 $\mathrm{sust}(\Sigma;A,B)=0.6>\frac{1}{2}$，$\mathrm{sust}(\Sigma;B,C)=1>\frac{1}{2}$，这时 $\mathrm{sust}(\Sigma;A,C)=1>0.6\wedge 1$.

ii) 如果采用Łukasiewicz 算子 $R_{Łu}$，自然也可像定义 4.5.2 那样引入相应的支持度概念. 我们以 $\mathrm{sust}_{Łu}$ 记这种支持度，但这时定理 4.5.4 不再成立. 例如，设 $A,B,C$ 同 i)，令 $\Sigma=\{v\in\overline{\Omega}_{Łu}\mid v(p_1)=0.7,v(p_2)=0.4,v(p_3)=0.1\}$，则易验证 $\mathrm{sust}_{Łu}(\Sigma;A,B)=0.7$，$\mathrm{sust}_{Łu}(\Sigma;B,C)=0.7$，但 $\mathrm{sust}_{Łu}(\Sigma;A,C)=0.4<0.7\wedge 0.7$.

**定理 4.5.6** 设 $A,B,C\in F(S)$，$\Sigma\subset\overline{\Omega}$，则

i) $\mathrm{sust}(\Sigma;A\vee B,C)=\mathrm{sust}(\Sigma;A,C)\wedge\mathrm{sust}(\Sigma;B,C)$.

ii) $\mathrm{sust}(\Sigma;A,B\wedge C)=\mathrm{sust}(\Sigma;A,B)\wedge\mathrm{sust}(\Sigma;A,C)$.

**证** (i) 设 $v\in\Sigma$，则由 $R_0$-代数的性质得

$$\begin{aligned}v(A\vee B\to C)&=R_0(v(A)\vee v(B),v(C))\\&=R_0(v(A),v(C))\wedge R_0(v(B),v(C))\\&=v(A\to C)\wedge v(B\to C).\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\mathrm{sust}(\Sigma;A\vee B,C)&=\inf\{v(A\vee B\to C)\mid v\in\Sigma\}\\&=\inf\{v(A\to C)\wedge v(B\to C)\mid v\in\Sigma\}\\&=\inf\{v(A\to C)\mid v\in\Sigma\}\wedge\inf\{v(B\to C)\mid v\in\Sigma\}\\&=\mathrm{sust}(\Sigma;A,C)\wedge\mathrm{sust}(\Sigma;B,C).\end{aligned}$$

(ii) 设 $v\in\Sigma$，与以上类似先由 $R_0$ 的性质得

$$v(A\to B\wedge C)=v(A\to B)\wedge v(A\to C),$$

再取下确界得

$$\mathrm{sust}(\Sigma;A,B\wedge C)=\mathrm{sust}(\Sigma;A,B)\wedge\mathrm{sust}(\Sigma;A,C).$$

**注 4.5.7** 虽然由 $R_0$ 的性质可推得对每个 $v\in\Sigma$ 均有

$$v(A\wedge B\to C)=v(A\to C)\vee v(B\to C),$$

$$v(A\to B\vee C)=v(A\to B)\vee v(A\to C).$$

但

$$\text{sust}(\Sigma;A\wedge B,C)=\text{sust}(\Sigma;A,C)\vee\text{sust}(\Sigma;B,C)$$

与

$$\text{sust}(\Sigma;A,B\vee C)=\text{sust}(\Sigma;A,B)\vee\text{sust}(\Sigma;A,C)$$

都不成立. 例如,以前者为例,分别令 $A,B,C$ 为原子命题 $p_1,p_2,p_3$. 令

$$\Sigma=\left\{v\in\overline{\Omega}\mid(v(p_1),v(p_2),v(p_3))=\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right\}$$

$$\cup\left\{v\in\overline{\Omega}\mid(v(p_1),v(p_2),v(p_3))=\left(\frac{1}{2},1,\frac{1}{2}\right)\right\},$$

则对每个 $v\in\Sigma$ 恒有 $v(p_1\wedge p_2)=v(p_3)$,从而

$$\text{sust}(\Sigma;A\wedge B,C)=\inf\{v(p_1\wedge p_2\to p_3)\mid v\in\Sigma\}=1.$$

另一方面,取 $v_1\in\Sigma$ 使 $v_1(p_1)=1,v_1(p_2)=\frac{1}{2},v_1(p_3)=\frac{1}{2}$;取 $v_2\in\Sigma$ 使 $v_2(p_1)=\frac{1}{2},v_2(p_2)=1,v_2(p_3)=\frac{1}{2}$,则

$$\begin{aligned}\text{sust}(\Sigma;A,C)&\leqslant v_1(p_1\to p_3)\wedge v_2(p_1\to p_3)\\&=R_0\left(1,\frac{1}{2}\right)\wedge R_0\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\wedge 1=\frac{1}{2},\\\text{sust}(\Sigma;B,C)&\leqslant v_1(p_2\to p_3)\wedge v_2(p_2\to p_3)\\&=R_0\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\wedge R_0\left(1,\frac{1}{2}\right)=1\wedge\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

所以

$$\text{sust}(\Sigma;A\wedge B,C)>\text{sust}(\Sigma;A,C)\vee\text{sust}(\Sigma;B,C).$$

**定理 4.5.8**　设 $A,B,C\in F(S)$,$\Sigma\subset\overline{\Omega}$,则

i) $\text{sust}(\Sigma;A,B\to C)=\text{sust}(\Sigma;B,A\to C)$.

ii) $\text{sust}(\Sigma;A,B\to C)=\text{sust}(\Sigma;A,\neg C\to\neg B)$.

**证**　i) 设 $v\in\Sigma$,则由 $R_0$-代数的性质得

$$\begin{aligned}v(A\to(B\to C))&=R_0(v(A),R_0(v(B),v(C)))\\&=R_0(v(B),R_0(v(A),v(C)))\\&=v(B\to(A\to C)).\end{aligned}$$

所以 i) 成立.

类似地可以证明 ii) 也成立.

**定理 4.5.9**　设 $A,B,C,D\in F(S)$,$\Sigma\subset\overline{\Omega}$,则

i) $\text{sust}(\Sigma;A,B\vee C\to D)=\text{sust}(\Sigma;A,B\to D)\wedge\text{sust}(\Sigma;A,C\to D)$.

ii) $\text{sust}(\Sigma;A,B\to C\wedge D)=\text{sust}(\Sigma;A,B\to C)\wedge\text{sust}(\Sigma;A,B\to D)$.

**证**　i) 由定理 4.5.8 与定理 4.5.6 得

$$\begin{aligned}\mathrm{sust}(\Sigma;A,B\vee C\to D)&=\mathrm{sust}(\Sigma;B\vee C,A\to D)\\&=\mathrm{sust}(\Sigma;B,A\to D)\wedge\mathrm{sust}(\Sigma;C,A\to D)\\&=\mathrm{sust}(\Sigma;A,B\to D)\wedge\mathrm{sust}(\Sigma;A,C\to D).\end{aligned}$$

ii) 由定理4.5.8与定理4.5.6并运用De Morgan对偶律得

$$\begin{aligned}&\mathrm{sust}(\Sigma;A,B\to C\wedge D)\\=&\ \mathrm{sust}(\Sigma;A,\neg(C\wedge D)\to\neg B)\\=&\ \mathrm{sust}(\Sigma;A,\neg C\vee\neg D\to\neg B)\\=&\ \mathrm{sust}(\Sigma;\neg C\vee\neg D,A\to\neg B)\\=&\ \mathrm{sust}(\Sigma;\neg C,A\to\neg B)\wedge\mathrm{sust}(\Sigma;\neg D,A\to\neg B)\\=&\ \mathrm{sust}(\Sigma;A,\neg C\to\neg B)\wedge\mathrm{sust}(\Sigma;A,\neg D\to\neg B)\\=&\ \mathrm{sust}(\Sigma;A,B\to C)\wedge\mathrm{sust}(\Sigma;A,B\to D).\end{aligned}$$

### 4.5.3 $\alpha$-三I算法

利用支持度概念可以将三I规则一般化为$\alpha$-三I规则，即在已知$A,B$和$A^*$后，求使(4.4.3)式的值恒大于或等于$\alpha$的$B^*$的规则.

**定义4.5.10**($\alpha$-三I规则) 设$A,A^*\in\mathscr{F}(X),B\in\mathscr{F}(Y)$. 设

$$\begin{array}{rl}\text{已知} & A\longrightarrow B\\ \text{且给定} & \underline{A^*\qquad\qquad}\\ \text{则得} & \qquad\quad B^*.\end{array}$$

这里$B^*$是使

$$\mathrm{sust}(\Sigma;p_1\to p_2,p_3\to p_4)\geqslant\alpha \tag{4.5.2}$$

的$\mathscr{F}(Y)$中的最小Fuzzy集，(4.5.2)式中的$\Sigma=\Sigma(\bar{E}),\bar{E}=(A,B;A^*,B^*)$.

显然，当$\alpha=1$时，$\alpha$-三I规则就成为三I规则. 定义4.5.10的规则是定理4.5.1的推广. 如果要摆脱逻辑框架的约束，则可对比三I规则4.4.1而将定义4.5.10通俗地改写为以下形式.

**算法4.5.11**($R_0$型$\alpha$-三I规则) 设$A,A^*\in\mathscr{F}(X),B\in\mathscr{F}(Y)$. 设

$$\begin{array}{rl}\text{已知} & A\longrightarrow B\\ \text{且给定} & \underline{A^*\qquad\qquad}\\ \text{则得} & \qquad\quad B^*.\end{array}$$

这里$B^*$是$\mathscr{F}(Y)$中使

$$(A(x)\to B(y))\to(A^*(x)\to B^*(y))\geqslant\alpha \tag{4.5.3}$$

对一切$x\in X$和$y\in Y$都成立的最小Fuzzy集.

$\alpha$-三I规则也就是求$\mathscr{F}(Y)$中使$A\to B$对$A^*\to B^*$的支持度大于或等于$\alpha$的最小Fuzzy集的规则. 这个最小Fuzzy集的存在性的证明类似于定理4.5.6ii)的证明，不过在那里对于$F(S)$中的公式而言，只能讨论有限交，而如今对$\mathscr{F}(Y)$中的

Fuzzy 集而言可以讨论任意交,所以定理 4.5.6ii)现在可以加强为以下定理.

**定理 4.5.12**　设 $A,A^* \in \mathscr{F}(X)$, $B \in \mathscr{F}(Y)$,则 $\mathscr{F}(Y)$ 中存在使(4.5.3)式对一切$x \in X$和 $y \in Y$ 都成立的最小 $B^*$.

**证**　令 $\mathscr{B} = \{B^* \in \mathscr{F}(Y) \mid B^*$满足(4.5.3)式$\}$,则由 $1_Y \in \mathscr{B}$知 $\mathscr{B}$非空. 令 $\bar{B} = \wedge \mathscr{B}$,则$\bar{B} \in \mathscr{F}(Y)$. 以下只需证明对一切 $x \in X$ 和 $y \in Y$ 都有

$$(A(x) \to B(y)) \to (A^*(x) \to \bar{B}(y)) \geqslant \alpha, \qquad (4.5.4)$$

因为 $\bar{B}$ 的最小性是明显的. 反设(4.5.4)式不成立,则有 $x_0 \in X$ 和 $y_0 \in Y$ 使

$$(A(x_0) \to B(y_0)) \to (A^*(x_0) \to \bar{B}(y_0)) < \alpha. \qquad (4.5.5)$$

因为 $R_0(s,t)$关于 $t$ 右连续,即

$$\lim_{\substack{t \to t_0 \\ t \geqslant t_0}} R_0(s_0,t) = R_0(s_0,t_0). \qquad (4.5.6)$$

设 $R_0(A(x_0),B(y_0)) = c$, $R_0(A^*(x_0),\bar{B}(y_0)) = d$,则(4.5.5)式左边等于 $R_0(c,d)$. 由 $\bar{B} = \wedge \mathscr{B}$知 $\mathscr{B}$中有 $B_1,B_2,\cdots$使$\lim\limits_{n\to\infty} B_n(y_0) = \bar{B}(y_0)$. 注意, $B_n(y_0) \geqslant \bar{B}(y_0)$,则由(4.5.6)式得

$$\lim_{n\to\infty} R_0(A^*(x_0),B_n(y_0)) = R_0(A^*(x_0),\bar{B}(y_0)) = d.$$

$R_0(s,t)$关于 $t$ 是增函数,$R_0(A^*(x_0),B_n(y_0)) \geqslant d$ 恒成立,所以再次使用(4.5.6)式得

$$\lim_{n\to\infty} R_0(c,R_0(A^*(x_0),B_n(y_0))) = R_0(c,d).$$

那么由(4.5.5)式知有 $n$ 使 $R_0(c,R_0(A^*(x_0),B_n(y_0))) < \alpha$,即

$$(A(x_0) \to B(y_0)) \to (A^*(x_0) \to B_n(y_0)) < \alpha.$$

这与 $B_n \in \mathscr{B}$相矛盾.

下面给出满足(4.5.3)式的最小 $B^*(y)$的计算方法.

**算法 4.5.13**($R_0$ 型 $\alpha$-三 I 算法)

$$B^*(y) = \sup_{x \in E_y \cap K_y} [A^*(x) \wedge R_0(A(x),B(y))] \wedge \alpha. \qquad (4.5.7)$$

这里

$$E_y = \{x \in X \mid (A^*(x))' < R_0(A(x),B(y))\}, \qquad (4.5.8)$$

$$K_y = \{x \in X \mid A^*(x) \wedge R_0(A(x),B(y)) > \alpha'\}. \qquad (4.5.9)$$

$B^*$就是满足(4.5.3)式的 $\mathscr{F}(Y)$中的最小 Fuzzy 集.

**证**　先证明由(4.5.7)式确定的 $B^*(y)$满足(4.5.3)式. 事实上,令

$$C(y) = \sup_{x \in E_y \cap K_y} [A^*(x) \wedge R_0(A(x),B(y))]. \qquad (4.5.10)$$

由定理 4.5.9ii)(或由 $R_0$ 的性质 $R_0(a,b \wedge c) = R_0(a,b) \wedge R_0(a,c)$)知只需证

$$M_{xy} = R_0(A(x),B(y)) \to R_0(A^*(x),C(y)) \geqslant \alpha, \qquad (4.5.11)$$

并且

$$N_{xy}=R_0(A(x),B(y))\to R_0(A^*(x),\alpha)\geqslant\alpha. \tag{4.5.12}$$

但由 $R_0$ 的性质 $R_0(s,t)\geqslant t$ 知(4.5.12)式是显然成立的,所以只需证明(4.5.11)式成立.

设 $x\in E_y\cap K_y$,则

$$C(y)\geqslant A^*(x)\wedge R_0(A(x),B(y)).$$

这时

$$\begin{aligned}M_{xy}&\geqslant R_0(A(x),B(y))\to R_0(A^*(x),A^*(x)\wedge R_0(A(x),B(y)))\\&=R_0(A(x),B(y))\to R_0(A^*(x),A^*(x))\wedge R_0(A^*(x),R_0(A(x),B(y)))\\&=R_0(A(x),B(y))\to R_0(A^*(x),R_0(A(x),B(y))).\end{aligned}$$

注意,$R_0(s,t)\geqslant t$,得

$$M_{xy}\geqslant R_0(A(x),B(y))\to R_0(A(x),B(y))=1\geqslant\alpha.$$

设 $x\notin E_y$,则 $(A^*(x))'\geqslant R_0(A(x),B(y))$,这时

$$M_{xy}\geqslant R_0(A(x),B(y))\to(A^*(x))'\vee C(y)=1\geqslant\alpha.$$

设 $x\notin K_y$,则 $R_0'(A(x),B(y))\geqslant\alpha$ 或 $(A^*(x))'\geqslant\alpha$. 所以仍有

$$\begin{aligned}M_{xy}&\geqslant R_0'(A(x),B(y))\vee R_0(A^*(x),C(y))\\&\geqslant R_0'(A(x),B(y))\vee(A^*(x))'\vee C(y)\geqslant\alpha.\end{aligned}$$

这就证明了(4.5.11)式成立,从而由(4.5.7)式确定的 $B^*$ 满足(4.5.3)式.

其次证明 $B^*$ 是 $\mathscr{F}(Y)$ 中满足(4.5.3)式的最小 Fuzzy 集. 设对某 $y\in Y$, $D(y)<B^*(y)$,则

$$D(y)<\sup_{x\in E_y\cap K_y}[A^*(x)\wedge R_0(A(x),B(y))]\text{ 且 }D(y)<\alpha.$$

这时有 $x_0\in E_y\cap K_y$ 使

$$D(y)<A^*(x_0)\wedge R_0(A(x_0),B(y)).$$

由 $D(y)<A^*(x_0)$ 知 $R_0(A^*(x_0),D(y))=(A^*(x_0))'\vee D(y)$. 又 $x_0\in E_y$,所以 $(A^*(x_0))'<R_0(A(x_0),B(y))$. 由此得

$$\begin{aligned}&R_0(A(x_0),B(y))\to R_0(A^*(x_0),D(y))\\&=R_0'(A(x_0),B(y))\vee R_0(A^*(x_0),D(y))\\&=R_0'(A(x_0),B(y))\vee(A^*(x_0))'\vee D(y)).\end{aligned}$$

但 $x_0\in K_y$, $R_0'(A(x_0),B(y))<\alpha$ 且 $(A^*(x_0))'<\alpha$. 加之 $D(y)<\alpha$,所以

$$R_0(A(x_0),B(y))\to R_0(A^*(x_0),D(y))<\alpha.$$

即用 $D$ 取代(4.5.3)式中的 $B^*$ 时(4.5.3)式不再成立. 这就证明了由(4.5.7)式确定的 $B^*$ 的最小性.

**注 4.5.14** 当 $\alpha=1$ 时 $K_y=\text{supp}[A^*(x)\wedge R_0(A(x),B(y))]$. 这时由(4.5.7)式得

$$B^*(y) = \sup_{x\in E_y\cap K_y}[A^*(x)\wedge R_0(A(x),B(y))]$$
$$=\sup_{x\in E_y}[A^*(x)\wedge R_0(A(x),B(y))].$$

这就是(4.4.15)式. 可见,算法 4.4.7 是算法 4.5.13 当 $\alpha=1$ 时的特例.

**例 4.5.15** 设 $X=Y=[0,1]$,$A,A^*\in\mathscr{F}(X)$,$B\in\mathscr{F}(Y)$,$A(x)=\frac{x+1}{3}$,$B(y)=1-y$,$A^*(x)=1-x$,$\alpha=\frac{7}{9}$. 按 $R_0$ 型$\alpha$-三 I 算法求 $B^*$.

**解**

$$E_y=\left\{x\in[0,1]\mid x<R_0\left(\frac{x+1}{3},1-y\right)\right\},$$
$$K_y=\left\{x\in[0,1]\mid(1-x)\wedge R_0\left(\frac{x+1}{3},1-y\right)>\frac{2}{9}\right\},$$
$$B^*(y)=\sup_{x\in E_y\cap K_y}\left[(1-x)\wedge R_0\left(\frac{x+1}{3},1-y\right)\right]\wedge\frac{7}{9}. \tag{4.5.13}$$

因为 $1-x$ 与 $R_0\left(\frac{x+1}{3},1-y\right)$都随 $x$ 的减小而增大,所以为求(4.5.13)式中的上确界,只需找出 $E_y\cap K_y$ 中的最小 $x$. 显然,$0\in E_y$. 又由 $R_0\left(\frac{x+1}{3},1-y\right)\geqslant\frac{2-x}{3}\vee(1-y)$知 $0\in K_y$. 所以 $0\in E_y\cap K_y$,从而

$$B^*(y)=(1-0)\wedge R_0\left(\frac{1}{3},1-y\right)\wedge\frac{7}{9},$$

化简得

$$B^*(y)=\begin{cases}\frac{7}{9}, & y\leqslant\frac{2}{3},\\ \frac{2}{3}, & y>\frac{2}{3}.\end{cases}$$

### 4.5.4 $\alpha$-三 I Modus Tollens 算法

Modus Tollens(简称 MT)的提法如下:

$$\begin{array}{ll}\text{已知} & A\longrightarrow B\\ \text{且给定} & \underline{\qquad\qquad B^*}\\ \text{求} & A^*.\end{array}$$

Zadeh 的 CRI 算法中也有计算 $A^*$ 的算法,但仍基于蕴涵运算与复合运算的混合使用,似乎不甚合理. 我们像处理 Fuzzy Modus Ponens 一样,把 Fuzzy Modus Tollens 也纳入三 I 算法的轨道. 并根据支持度理论给出 $\alpha$-三 I MT 算法的一般形式.

**算法 4.5.16**($R_0$ 型三 I MT 算法) 设 $A\in\mathscr{F}(X)$,$B,B^*\in\mathscr{F}(Y)$. 设

$$\begin{array}{ll} \text{已知} & A \longrightarrow B \\ \text{且给定} & \underline{\qquad\qquad B^*} \\ \text{则得} & A^*. \end{array} \tag{4.5.14}$$

这里 $A^*$ 是 $\mathscr{F}(X)$ 中使(4.4.3)式的值等于 1 的最大 Fuzzy 集,其算法为

$$A^*(x) = \inf_{y \in E_x}[B^*(y) \vee R_0{}'(A(x),B(y))]. \tag{4.5.15}$$

这里

$$E_x = \{y \in Y \mid B^*(y) < R_0(A(x),B(y))\}. \tag{4.5.16}$$

这个算法可以一般化为如下算法.

**算法 4.5.17**($R_0$ 型 $\alpha$-三 I MT 算法) 设 $A \in \mathscr{F}(X), B, B^* \in \mathscr{F}(Y)$, $\alpha \in [0,1]$. 则 $\mathscr{F}(X)$ 中使(4.5.3)式成立的最大 Fuzzy 集 $A^*$ 如下:

$$A^*(x) = \inf_{y \in E_x \cap K_x}[B^*(y) \vee R_0{}'(A(x),B(y))] \vee \alpha'. \tag{4.5.17}$$

这里 $E_x$ 由(4.5.16)式确定,而

$$K_x = \{y \in Y \mid B^*(y) \vee R_0{}'(A(x),B(y)) < \alpha\}. \tag{4.5.18}$$

注意,当 $\alpha = 1$ 时,(4.5.17)式中的 $\alpha' = 0$,而这时(4.5.18)式的 $K_x$ 在(4.5.17)式中求下确界时的作用是指勿将 1 考虑在内,而对于[0,1]中的求下确界运算而言总是可以将 1 不计算在内的(注意,$\inf\varnothing = 1$). 所以(4.5.15)式是(4.5.17)式中 $\alpha = 1$ 时的特例,即算法 4.5.16 是算法 4.5.17 的特例. 所以以下只需证明算法 4.5.17 的正确性.

**证** 先证明由(4.5.17)式确定的 $A^*$ 满足(4.5.3)式. 设

$$C(x) = \inf_{y \in E_x \cap K_x}[B^*(y) \vee R_0{}'(A(x),B(y))].$$

易证

$$(A(x) \to B(y)) \to (\alpha' \to B^*(y)) \geqslant \alpha.$$

所以由 $R_0$ 的性质知只需证

$$M_{xy} = (A(x) \to B(y)) \to (C(x) \to B^*(y)) \geqslant \alpha. \tag{4.5.19}$$

事实上,设 $y \in E_x \cap K_x$,则 $C(x) \leqslant B^*(y) \vee R_0{}'(A(x),B(y))$,所以

$$M_{xy} \geqslant R_0(A(x),B(y)) \to R_0(B^*(y) \vee R'_0(A(x),B(y)),B^*(y)).$$

注意

$$\begin{aligned} R_0(a \vee b, b) &= R_0(a,b) \wedge R_0(b,b) \\ &= R_0(a,b) \geqslant a' \vee b \end{aligned}$$

得

$$\begin{aligned} M_{xy} &\geqslant R_0(A(x),B(y)) \to R_0(R_0{}'(A(x),B(y)),B^*(y)) \\ &\geqslant R_0(A(x),B(y)) \to R_0(A(x),B(y)) \vee B^*(y) = 1 \geqslant \alpha. \end{aligned}$$

设 $y \notin E_x$,则 $B^*(y) \geqslant R_0(A(x),B(y))$. 从而

$$M_{xy} \geqslant R_0(A(x),B(y)) \to C'(x) \vee B^*(y)$$
$$\geqslant R_0(A(x),B(y)) \to R_0(A(x),B(y))$$
$$= 1 \geqslant \alpha.$$

设 $y \notin K_x$，则 $B^*(y) \vee R_0{}'(A(x),B(y)) \geqslant \alpha$，从而

$$M_{xy} \geqslant R_0{}'(A(x),B(y)) \vee R_0(C(x),B^*(y))$$
$$\geqslant R_0{}'(A(x),B(y)) \vee C'(x) \vee B^*(y)$$
$$\geqslant \alpha.$$

总之，(4.5.19)式成立. 所以由(4.5.17)式确定的 $A^*$ 满足(4.5.3)式.

其次证明 $A^*$ 是 $\mathscr{F}(X)$ 中满足(4.5.3)式的最大 Fuzzy 集. 设对某 $x \in X, D(x) > A^*(x)$，则

$$D(x) > \inf_{y \in E_x \cap K_x}[B^*(y) \vee R'_0(A(x),B(y))] \tag{4.5.20}$$

且

$$D(x) > \alpha', \quad 即 \quad D'(x) < \alpha. \tag{4.5.21}$$

由(4.5.20)式知有 $y_0 \in E_x \cap K_x$ 使

$$D(x) > B^*(y_0) \vee R_0{}'(A(x),B(y_0)).$$

那么

$$D'(x) < R_0(A(x),B(y_0)).$$

由 $D(x) > B^*(y_0)$ 知 $R_0(D(x),B^*(y_0)) = D'(x) \vee B^*(y_0)$. 又 $y_0 \in E_x$，所以 $B^*(y_0) < R_0(A(x),B(y_0))$. 由此得

$$\begin{aligned} & R_0(A(x),B(y_0)) \to R_0(D(x),B^*(y_0)) \\ = & R_0{}'(A(x),B(y_0)) \vee R_0(D(x),B^*(y_0)) \\ = & R_0{}'(A(x),B(y_0)) \vee D'(x) \vee B^*(y_0). \end{aligned} \tag{4.5.22}$$

但 $y_0 \in K_x$，

$$B^*(y_0) \vee R_0{}'(A(x),B(y_0)) < \alpha. \tag{4.5.23}$$

所以由(4.5.21)、(4.5.22)与(4.5.23)各式得

$$(A(x) \to B(y_0)) \to (D(x) \to B^*(y_0)) < \alpha,$$

即用 $D(x)$ 取代(4.5.3)式中的 $A^*$，则(4.5.3)式不再成立. 这就证明了 $A^*$ 是 $\mathscr{F}(X)$ 中使(4.5.3)式成立的最大 Fuzzy 集.

**注 4.5.18**　在(4.5.3)式中令 $A^* \equiv 0$，则无论 $A(x) \to B(y)$ 如何，(4.5.3)式左边恒等于 1，从而(4.5.3)式当然成立. 这种 $A^*$ 是无用的，因为它与大前提 $A(x) \to B(y)$ 无关，(4.5.3)式虽成立，但不是由于 $A(x) \to B(y)$ 对 $A^*(x) \to B^*(y)$ 支持的结果，而是 $A^*(x) \to B^*(y)$ 绝对大于或等于 $\alpha$ 所致. 因此，我们要寻求的是尽可

能大的 $A^*$，这时 $A^*(x)\to B^*(y)$ 不必大于或等于 $\alpha$，但由 $A(x)\to B(y)$ 作前提蕴涵之后大于或等于 $\alpha$.

**例 4.5.19** 设 $X=Y=[0,1]$，$A\in\mathscr{F}(X)$，$B,B^*\in\mathscr{F}(Y)$，$A(x)=1-x$，$B(y)=y$，$B^*(y)=y^2$. 按算法 4.5.16 求 $A^*$.

**解** $$E_x=\{y\in[0,1]\mid y^2<R_0(1-x,y)\}.$$

若 $y\geqslant 1-x$，则 $R_0(1-x,y)=1$，所以满足 $1-x\leqslant y<1$ 的 $y$ 都属于 $E_x$. 又若 $y<1-x$，则 $R_0(1-x,y)=x\vee y$. 这时由 $y<1$ 知 $y^2<x\vee y$ 恒成立，所以满足 $y<1-x$ 的 $y$ 也属于 $E_x$. 由此可知，$E_x=\{y\in[0,1]\mid y<1\}$. 所以由(4.5.15)式得

$$\begin{aligned}A^*(x)&=\inf_{y<1}[y^2\vee R_0'(1-x,y)]\\&=\inf_{\substack{y<1\\1-x\leqslant y}}[y^2\vee R_0'(1-x,y)]\wedge\inf_{\substack{y<1\\1-x>y}}[y^2\vee R_0'(1-x,y)]\\&=(1-x)^2\wedge\inf_{y<1-x}[y^2\vee(1-x)]\wedge\inf_{y<1-x}[y^2\vee(1-y)].\qquad(4.5.24)\end{aligned}$$

式(4.5.24)中中间部分等于 $1-x$. 由 $(1-x)^2\leqslant 1-x$ 知中间部分可略去. 以下计算最后的部分

$$\inf_{y<1-x}[y^2\vee(1-y)].$$

由图 4.6 看出

$$y^2\vee(1-y)=\begin{cases}y^2, & y\geqslant\dfrac{\sqrt5-1}{2},\\[2mm] 1-y, & y<\dfrac{\sqrt5-1}{2}.\end{cases}$$

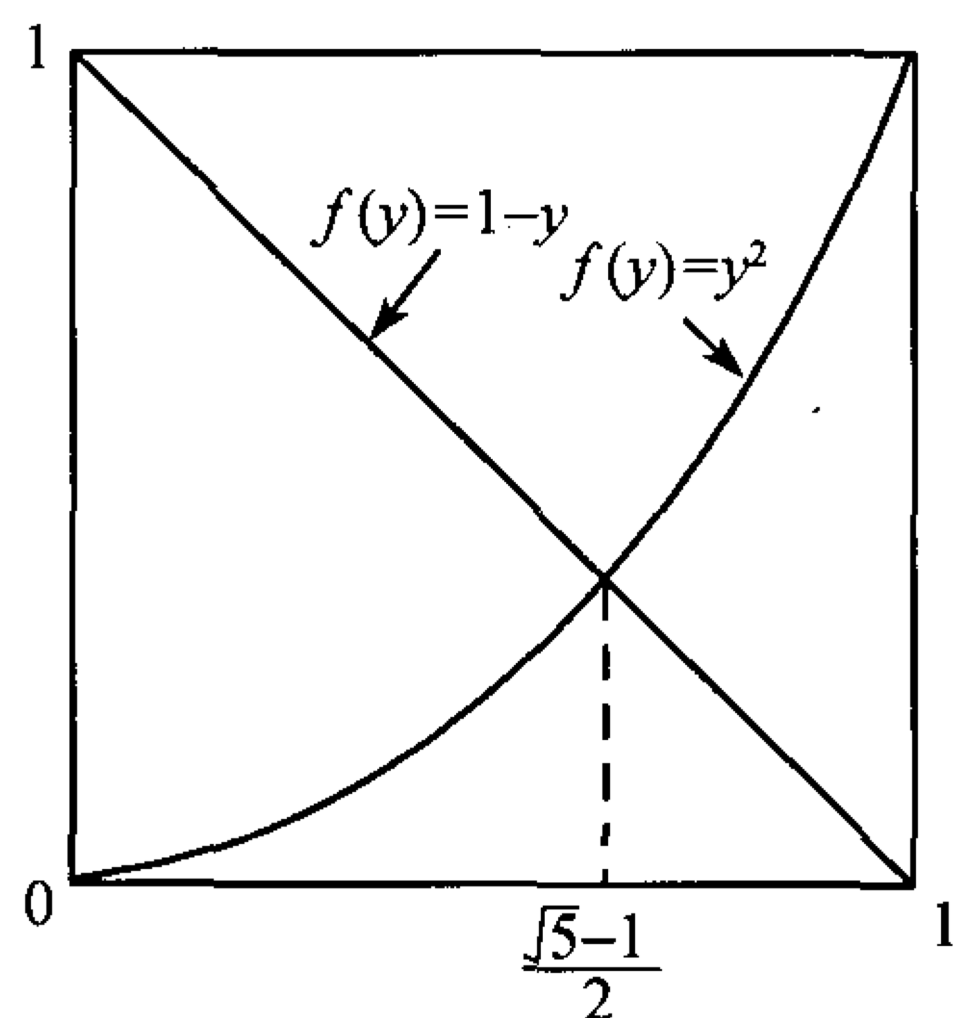


图 4.6

由此得

$$\inf_{y<1-x}[y^2\vee(1-y)]=\begin{cases}\left(\dfrac{\sqrt5-1}{2}\right)^2, & 1-x\geqslant\dfrac{\sqrt5-1}{2},\\[2mm] x, & 1-x<\dfrac{\sqrt5-1}{2}.\end{cases}$$

所以由(4.5.24)式得

$$A^*(x)=\begin{cases}\left(\dfrac{\sqrt5-1}{2}\right)^2=\dfrac{3-\sqrt5}{2}, & 1-x\geqslant\dfrac{\sqrt5-1}{2},\\[2mm] x\wedge(1-x)^2, & 1-x<\dfrac{\sqrt5-1}{2}.\end{cases}$$

**例 4.5.20** 设 $X=Y=[0,1]$，$A\in\mathscr{F}(X)$，$B,B^*\in\mathscr{F}(Y)$，$A(x)=\dfrac{x+1}{3}$，$B(y)=1-y$，

$$B^*(y)=\begin{cases}1, & y\leqslant\dfrac{2}{3},\\[2mm] \dfrac{2}{3}, & y>\dfrac{2}{3}.\end{cases}\tag{4.5.25}$$

按算法 4.5.16 求 $A^*$.

**解**　$$E_x=\left\{y\in[0,1]\mid B^*(y)<R_0\left(\frac{x+1}{3},1-y\right)\right\}.$$

若$\frac{x+1}{3}\leqslant 1-y$,则 $R_0\left(\frac{x+1}{3},1-y\right)=1$. 这时 $y\leqslant\frac{2-x}{3}\leqslant\frac{2}{3}$,从而由 $B^*(y)$ 的定义知 $B^*(y)=1$. 可见,满足条件$\frac{x+1}{3}\leqslant 1-y$ 的 $y$ 不属于 $E_x$. 若$\frac{x+1}{3}>1-y$,则 $R_0\left(\frac{x+1}{3},1-y\right)=\frac{2-x}{3}\vee(1-y)$. 这时 $R_0\left(\frac{x+1}{3},1-y\right)\leqslant\frac{2-x}{3}\vee\frac{x+1}{3}\leqslant\frac{2}{3}$. 由 $B^*(y)$ 的定义知满足条件$\frac{x+1}{3}>1-y$ 的 $y$ 仍不属于 $E_x$,所以 $E_x=\varnothing$,从而$A^*(x)=\inf\varnothing=1$.

**注 4.5.21**　由例 4.4.9 看出,当 $A(x)=\frac{x+1}{3}$,$B(y)=1-y$ 且 $A^*(x)=1-x$ 时,$\mathscr{F}(Y)$ 中使(4.4.15)式的值等于 1 的最小 $B^*$ 就是(4.5.25)式所给出的 $B^*$. 而由例 4.5.20 看出,保持 $A,B$ 与 $B^*$ 不变,把 $A^*$ 改为 1 时(4.4.15)式的值仍等于 1,并且当 $A=\frac{x+1}{3}$,$B=1-y$,$A^*\equiv 1$ 时按算法 4.4.7 求得的 $B^*$ 就是上述 $B^*$. 这表明,按算法 4.4.7 所得的对应$(A,B,A^*)\mapsto B^*$是多一对应.

### 4.5.5　三 I MT 算法的还原性

**定理 4.5.22**　三 I MT 算法具有 $P$-还原性,这里 $P$ 指 $B(y)$ 可取值 0,还原性指当 $B^*=B$ 时由(4.5.15)式算出的 $A^*$ 就是 $A$.

**证**　设 $B^*=B$,则由(4.5.16)式得

$$\begin{aligned}E_x&=\{y\in Y\mid B(y)<R_0(A(x),B(y))\}\\&=\{y\in Y\mid A(x)\leqslant B(y)<1\}\\&\quad\cup\{y\in Y\mid B(y)<A(x)\wedge A'(x)\}.\end{aligned}$$

所以由(4.5.15)式得

$$A^*(x)=\inf_{A(x)\leqslant B(y)<1}B(y)\wedge\inf_{B(y)<A(x)\wedge A'(x)}\{B(y)\vee[A(x)\wedge B'(y)]\}.\tag{4.5.26}$$

式(4.5.26)中第一部分大于或等于 $A(x)$. 若 $A\equiv 1$,则$\{y\in Y\mid A(x)\leqslant B(y)<1\}=\{y\in Y\mid B(y)<A(x)\wedge A'(x)\}=\varnothing$. 由(4.5.26)式算出的 $A^*(x)$ 也是 1. 若 $A\equiv 0$,

则因有 $y$ 使 $B(y)=0$,(4.5.26)式中第一部分等于0,所以 $A^*(x)=0$. 故可设 $A\neq 1, A\neq 0$. 这时

$$\inf_{B(y)<A(x)\wedge A'(x)}\{B(y)\vee[A(x)\wedge B'(y)]\}$$
$$=\inf_{B(y)<A(x)\wedge A'(x)}(B(y)\vee A(x))\wedge\inf_{B(y)<A(x)\wedge A'(x)}[B(y)\vee B'(y)]. \quad (4.5.27)$$

取 $y$ 使 $B(y)=0$,则(4.5.27)式右边第一部分等于 $A(x)$. 第二部分

$$\inf_{B(y)<A(x)\wedge A'(x)}[B(y)\vee B'(y)]$$
$$\geqslant\inf_{B(y)<A(x)\wedge A'(x)}B'(y)$$
$$\geqslant A(x)\vee A'(x)\geqslant A(x).$$

综上可见, $A^*(x)$可表示为三部分之交,其中中间部分等于$A(x)$,而两端均大于或等于 $A(x)$. 故 $A^*(x)=A(x)$.

**注 4.5.23** 当 $B(y)$恒不为零时,还原性可能不成立. 例如,令 $A(x)=x$, $B(y)=B^*(y)\equiv 1$ 时,由于 $E_x=\varnothing$,而 $A^*(x)\equiv 1$,并不还原为 $A(x)$.

**后记** 现在已证明了系统 $\mathscr{L}^*$ 关于语义 $\overline{\Omega}$ 是完备的,即 $\models A$ 当且仅当 $\vdash A$ (见裴道武,王国俊. 形式系统 $\mathscr{L}^*$ 的完备性及其应用. 中国科学(E 辑),2002,32(1):56~64).

# 第 5 章　积分语义学

对于 $F(S)$ 中的一个公式 $A$,我们从形式上可以通过公理以及推理规则去判断 $A$ 是否为定理,也可以从语义上通过赋值判断 $A$ 是否“恒真”,即是否为重言式. 确切地说,如果对每个赋值 $v$,$v(A)=1$ 恒成立,则称 $A$ 为重言式. 在前面我们已经把重言式概念推广为 $\alpha$-重言式,也就是那种对每个赋值 $v$ 恒有 $v(A)\geqslant\alpha$ 的重言式. 首先,在本章中我们考虑所有的 $v$ 共同作用于 $A$ 时的整体效果,我们将把单个的赋值进行积分,从而给出一个公式的真实程度的新指标. 其次,本章还将在全体公式之集 $F(S)$ 上引入伪距离,为近似推理提供一种可能的框架. 关于赋值格为 $\{0,1\}$ 的近似推理,文献[32]已建立了一种很好的框架.

本章将主要运用Łukasiewicz 蕴涵算子. 对于Łukasiewicz 的多值命题逻辑系统而言,全体公式集比 $F(S)$ 要大,因为 $[0,1]$ 中的常值也作为特殊的公式而参与在 $S$ 中而生成一般公式. 这时已有许多关于完备性的讨论[33]. 但本书仍限于考虑 $F(S)$,所以不涉及Łukasiewicz 的公理体系,不涉及完备性. 在 5.5 节中的近似推理是一种混合型的推理,即并非纯形式的推理,是以重言式取代定理的地位为基础所作的近似推理.

## 5.1　公式的真度

### 5.1.1　积分不变性定理

设 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 是从 $[0,1]^n$ 到 $[0,1]$ 的 $n$ 元函数,以 $\Delta_n$ 记 $n$ 维方体 $[0,1]^n$,以 $\mathrm{d}\omega_n$ 记 $\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n$,则 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 在 $[0,1]^n$ 上的定积分 $\int_0^1\cdots\int_0^1 f(x_1,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n$ 可简单地记为

$$\int_{\Delta_n} f(x_1,\cdots,x_n)\mathrm{d}\omega_n$$

或更简单些,$\int_{\Delta_n} f\mathrm{d}\omega_n$. $f(x_1,\cdots,x_n)$ 也可看作是从 $[0,1]^{n+1}$ 到 $[0,1]$ 的函数,只需定义

$$f(x_1,\cdots,x_n,x_{n+1}) = f(x_1,\cdots,x_n),\ \forall(x_1,\cdots,x_{n+1})\in[0,1]^{n+1}$$

即可. 一般地,我们有如下定义:

**定义 5.1.1** 设$f:[0,1]^n\to[0,1]$,则$f$的$k$次扩张定义为

$$\begin{aligned}&f^{(k)}(x_1,\cdots,x_{n+k})\\&=f(x_1,\cdots,x_n),\ \forall(x_1,\cdots,x_{n+k})\in[0,1]^{n+k}.\end{aligned}\tag{5.1.1}$$

这里$k=0,1,2,\cdots$. 当$k=0$时$f^{(0)}=f$.

**定理 5.1.2**(积分不变性定理) 任一$n$元函数$f:[0,1]^n\to[0,1]$和它的$k$次扩张$f^{(k)}$在各自定义域上的积分相等,即

$$\int_{\Delta_n}f\mathrm{d}\omega_n=\int_{\Delta_{n+k}}f^{(k)}\mathrm{d}\omega_{n+k}\quad(k=0,1,2,\cdots).\tag{5.1.2}$$

**证** 不妨设$k>0$. 设$\int_{\Delta_n}f\mathrm{d}\omega_n=I$,则

$$\begin{aligned}\int_{\Delta_{n+k}}f^{(k)}\mathrm{d}\omega_{n+k}&=\int_{\Delta_{n+k}}f(x_1,\cdots,x_{n+k})\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_{n+k}\\&=\int_{\Delta_{n+k}}f(x_1,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_{n+k}\\&=\underbrace{\int_0^1\cdots\int_0^1}_{k\text{个}}\left[\int_{\Delta_n}f(x_1,\cdots,x_n)\mathrm{d}\omega_n\right]\mathrm{d}x_{n+1}\cdots\mathrm{d}x_{n+k}\\&=\underbrace{\int_0^1\cdots\int_0^1}_{k\text{个}}I\mathrm{d}x_{n+1}\cdots\mathrm{d}x_{n+k}=I\times1\times\cdots\times1=I.\end{aligned}$$

所以(5.1.2)式成立.

由积分不变性定理,在不致引起混淆的情况下本章将不区别$\int_{\Delta_n}f\mathrm{d}\omega_n$与$\int_{\Delta_{n+k}}f^{(k)}\mathrm{d}\omega_{n+k}$,并把它们都简记为$\int_\Delta f\mathrm{d}\omega$. 把变量$(x_1,\cdots,x_n)$与$(x_1,\cdots,x_{n+k})$都简记为$\omega$.

### 5.1.2 $F(S)$中公式的$R$真度

设$A=f(p_1,\cdots,p_t)\in F(S)$,$R$是蕴涵算子,$v:F(S)\to[0,1]$是关于$R$而言的赋值,则

$$v(A)=\bar{f}(v(p_1),\cdots,v(p_t)).$$

由于$v(p_i)(1\leqslant i\leqslant t)$可以取$[0,1]$中的任意值,所以当$v$在$\Omega_R$中变化时就有一与$A$对应的$t$元函数$\bar{f}:[0,1]^t\to[0,1]$. 如前所述,它的积分可记作$(R)\int_\Delta\bar{f}\mathrm{d}\omega$. 为简化符号起见,以下也经常以$\bar{A}$记$\bar{f}$.

**定义 5.1.3** 设$A\in F(S)$,则称

$$\tau_R(A)=(R)\int_\Delta\bar{A}\mathrm{d}\omega\tag{5.1.3}$$

为$A$的**$R$-真度**.

**注 5.1.4**　$v(p\vee q)=v(p)\vee v(q)$对于任何蕴涵算子都成立. 所以,对于不出现"→"及"¬"的公式 $A$,其真度是不依赖于 $R$ 的选取的,这时 $A$ 的各种 $R$-真度取同一值,我们称它为 $A$ 的**绝对真度**,记为 $\tau^*(A)$. 本章中不加声明的 $R$ 指 Łukasiewicz 的蕴涵算子 $R_{Łu}$,这时把 $A$ 的 $R$-真度简称为**真度**,并简记为 $\tau(A)$.

**例 5.1.5**　设 $p,q$ 为原子公式,则

$$\begin{aligned}&\tau^*(p)=\tau^*(q)=\frac{1}{2},\\&\tau^*(p\vee q)=\frac{2}{3},\quad \tau^*(p\wedge q)=\frac{1}{3},\\&\tau^*(p\vee\neg p)=\frac{3}{4},\quad \tau^*(p\wedge\neg p)=\frac{1}{4}.\end{aligned}\tag{5.1.4}$$

事实上,

$$\tau^*(p)=\int_0^1 x\mathrm{d}x=\frac{1}{2},\quad \tau^*(q)=\int_0^1 y\mathrm{d}y=\frac{1}{2}.$$

又由图 5.1 知

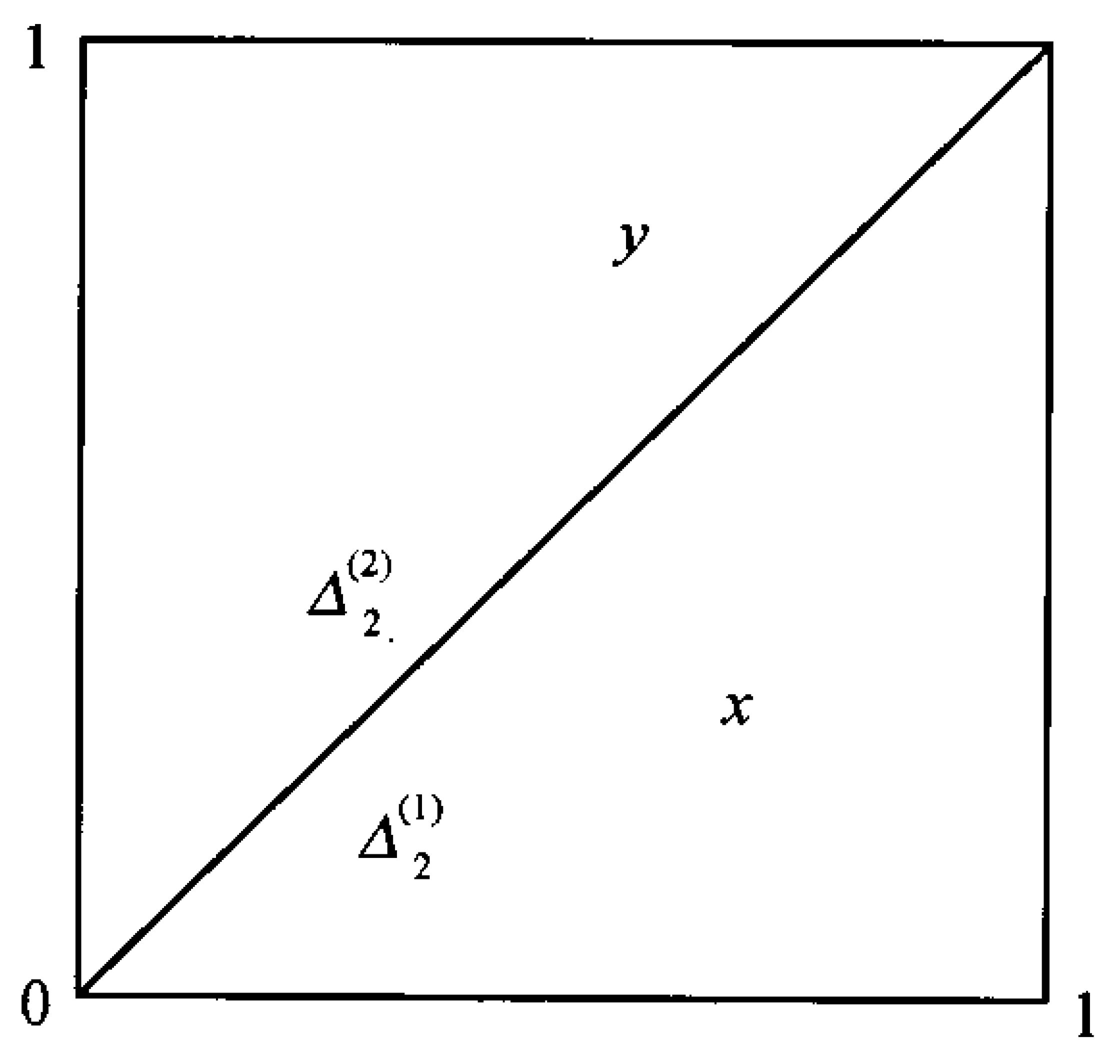



图 5.1

$$\begin{aligned}\tau^*(p\vee q)&=\int_0^1\int_0^1(x\vee y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\int_{\substack{\Delta_2\\x\geqslant y}}x\mathrm{d}\omega_2+\int_{\substack{\Delta_2\\x<y}}y\mathrm{d}\omega_2\\&=\int_{\Delta_2{}^{(1)}}x\mathrm{d}\omega_2+\int_{\Delta_2{}^{(2)}}y\mathrm{d}\omega_2\\&=\int_0^1\int_y^1 x\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_0^1\int_x^1 y\mathrm{d}y\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau^*(p\wedge q)&=\int_{\Delta_2{}^{(1)}}y\mathrm{d}\omega_2+\int_{\Delta_2{}^{(2)}}x\mathrm{d}\omega_2=\int_0^1\int_y^1 y\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_0^1\int_x^1 x\mathrm{d}y\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

最后

$$\begin{aligned}\tau^*(p\vee\neg p)&=\int_0^1(x\vee\neg x)\mathrm{d}x\\&=\int_0^{\frac{1}{2}}(1-x)\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^1 x\mathrm{d}x=\frac{3}{4},\\\tau^*(p\wedge\neg p)&=\int_0^1(x\wedge\neg x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}} x\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-x)\mathrm{d}x = \frac{1}{4}.$$

**例 5.1.6** 计算 $\tau(p\to q)$ 与 $\tau((p\to q)\to\neg p\vee q)$.

**解**

$$\tau(p\to q) = \int_{\Delta_2}[(1-x+y)\wedge 1]\mathrm{d}\omega_2$$

$$= \int_{\Delta_2(2)}\mathrm{d}\omega_2 + \int_{\Delta_2(1)}(1-x+y)\mathrm{d}\omega_2$$

$$= \frac{1}{2}+\frac{1}{3} = \frac{5}{6}.$$

又 $(p\to q)\to\neg p\vee q$ 对应于二元函数

$$\varphi(x,y) = ((1-x)+y)\wedge 1\to(1-x)\vee y.$$

如图 5.2 所示.

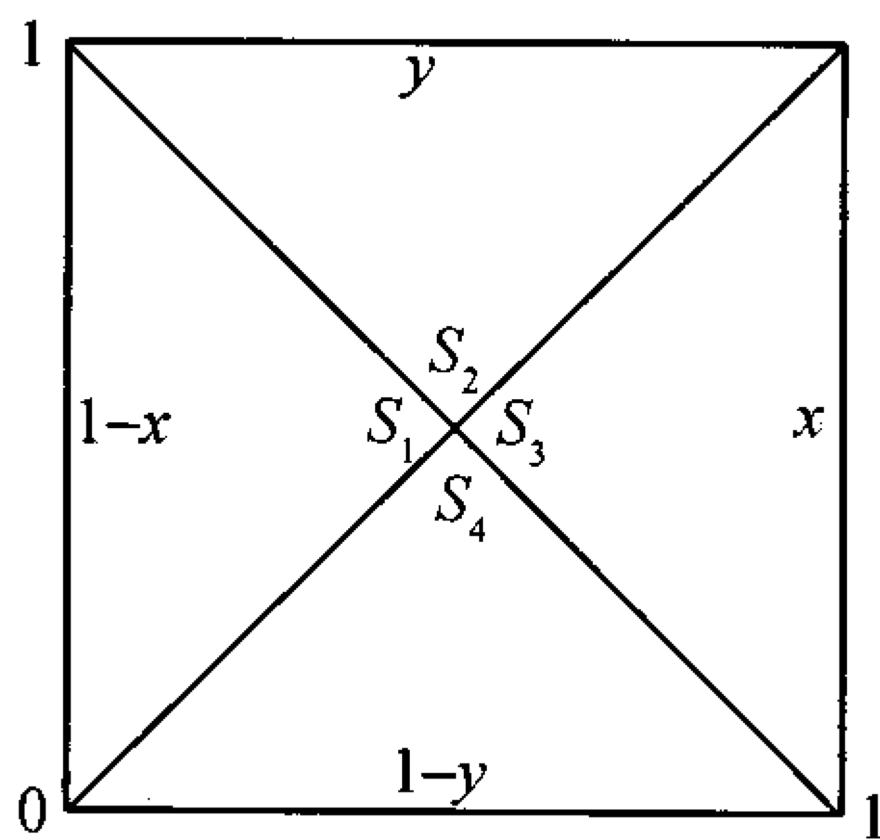


图 5.2

不难验证:

在 $S_1$ 上 $\varphi(x,y)=1-x$,

在 $S_2$ 上 $\varphi(x,y)=y$,

在 $S_3$ 上 $\varphi(x,y)=x$,

在 $S_4$ 上 $\varphi(x,y)=1-y$.

所以

$$\tau((p\to q)\to\neg p\vee q) = \int_{\Delta_2}\varphi\mathrm{d}\omega_2$$

$$= \int_{S_1}(1-x)\mathrm{d}\omega_2 + \int_{S_2}y\mathrm{d}\omega_2 + \int_{S_3}x\mathrm{d}\omega_2 + \int_{S_4}(1-y)\mathrm{d}\omega_2.$$

因为

$$\int_{S_1}(1-x)\mathrm{d}\omega_2 = \int_0^{\frac{1}{2}}\int_x^{1-x}(1-x)\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \frac{5}{24},$$

$$\int_{S_2}y\mathrm{d}\omega_2 = \int_{\frac{1}{2}}^{1}\int_{1-y}^{y}y\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{5}{24},$$

$$\int_{S_3}x\mathrm{d}\omega_2 = \int_{\frac{1}{2}}^{1}\int_{1-x}^{x}x\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \frac{5}{24},$$

$$\int_{S_4}(1-y)\mathrm{d}\omega_2 = \int_0^{\frac{1}{2}}\int_y^{1-y}(1-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{5}{24}.$$

所以 $\tau((p\to q)\to\neg p\vee q)=\frac{5}{6}$.

请读者自行计算 $\tau(p\to q)$, $\tau(\neg p\vee q)$, $\tau(p\to\neg p\vee q)$ 以及 $\tau(p_1\wedge p_2\wedge p_3\wedge$

$p_4$),这里 $p,q$ 与 $p_i(i=1,\cdots,4)$ 均属于 $S$.

显然,逻辑等价的公式有相等的真度,但反之不真. 如 $p$ 与 $q$ 的真度相等,但并不是逻辑等价的.

### 5.1.3　$R$ 真度与 $\alpha$-重言式

设 $A\in F(S)$. 若对于每个 $R$ 赋值 $v$ 恒有 $v(A)\geqslant\alpha$,则称 $A$ 为 $\alpha$-重言式. 这时显然 $\int_\Delta \bar{A}\mathrm{d}\omega\geqslant\alpha$. 故有

**命题 5.1.7**　设 $A\in F(S)$. 若 $A$ 为关于 $R$ 的 $\alpha$-重言式,则 $A$ 的 $R$ 真度 $\tau_R(A)\geqslant\alpha$.

上述命题之逆显然不真,如 $\tau^*(p)=\frac{1}{2}$,但原子公式 $p$ 显然不是 $\alpha$-重言式. 但下面定理成立.

**定理 5.1.8**　设 $A\in F(S)$,则

$$\tau(A)=1\quad\text{当且仅当}\quad A\text{ 是 }R_{\text{Łu}}\text{-重言式}.\tag{5.1.5}$$

**证**　由命题 5.1.7,若 $A$ 是关于 $R_{\text{Łu}}$ 的重言式,则 $\tau(A)=1$. 反过来,设 $A=A(p_1,\cdots,p_n)\in F(S)$ 且 $\tau(A)=1$, 则

$$\int_{\Delta_n}\bar{A}(x_1,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n=1.$$

因为 $\bar{A}$ 是连续函数,若 $\bar{A}$ 在某 $\bar{x}=(\bar{x}_1,\cdots,\bar{x}_n)$ 处的值小于 1,如等于 $1-\varepsilon$,则 $\bar{A}$ 在 $\bar{x}$ 的某个具有正体积的小邻域内的值小于 $1-\frac{\varepsilon}{2}$,从而 $\bar{A}$ 在 $\Delta_n$ 上的积分将小于 1. 矛盾. 可见,$\bar{A}$ 在 $\Delta_n$ 上恒等于 1. 所以 $A$ 是关于 $R_{\text{Łu}}$ 的重言式.

**注 5.1.9**　上述定理也可推广到 $\tau_R(A)$ 的情形,只要 $R$ 作为二元函数是连续的就行. 但若 $R$ 不连续,则当 $\tau_R(A)=1$ 时 $A$ 不必是关于 $R$ 的重言式. 例如,考虑

$$A=A(p,q)=[(p\to q)\to\neg p\vee q]\vee[(q\to p)\to\neg q\vee p].$$

取 $R$ 为 $R_0$,则易验证对每个 $v\in\Omega_{R_0}$,

$$v(A)=\begin{cases}1, & v(p)\neq v(q),\\ \neg v(p)\vee v(q), & v(p)=v(q).\end{cases}\tag{5.1.6}$$

换句话说

$$\bar{A}(x_1,x_2)=\begin{cases}1, & x_1\neq x_2,\\ (1-x_1)\vee x_2, & x_1=x_2.\end{cases}$$

因为 $[0,1]^2$ 的子集 $\{(x_1,x_2)\mid x_1\neq x_2\}$ 的测度等于 1,所以 $\tau_{R_0}(A)=1$. 但由(5.1.6)

式知 $A$ 不是关于 $R_0$ 而言的重言式.

下面的命题是自明的.

**命题 5.1.10** 设 $A\in F(S)$,则 $\tau(\neg A)=1-\tau(A)$.

由此即得定理 5.1.8 的如下推论.

**推论 5.1.11** 设 $A\in F(S)$,则 $\tau(A)=0$ 当且仅当 $A$ 是 $R_{Łu}$矛盾式.

### 5.1.4 积分推理规则

现在考虑以下三个问题:①当 $\tau(A)\geqslant\alpha,\tau(A\to B)\geqslant\beta$ 时$\tau(B)$如何? ②当 $\tau(A\to B)\geqslant\alpha,\tau(B\to C)\geqslant\beta$ 时 $\tau(A\to C)$ 如何? ③当 $\tau(A\to B)\geqslant\alpha,\tau(A\to C)\geqslant\beta$ 时 $\tau(A\to B\wedge C)$ 如何? 以下分别回答这三个问题.

(1)积分 MP 规则

**定理 5.1.12** 设 $A,B\in F(S)$. 若 $\tau(A)=1$ 且 $\tau(A\to B)=1$,则 $\tau(B)=1$.

**证** 设 $\tau(A)=1$ 且 $\tau(A\to B)=1$,则由定理 5.1.8 知 $A$ 与 $A\to B$ 都是关于 $R_{Łu}$ 的重言式,即对每个 $v\in\Omega_{R_{Łu}}$,

$$v(A)=1$$

且

$$R_{Łu}(v(A),v(B))=(1-v(A)+v(B))\wedge 1=1.$$

从而 $v(B)=1$,即 $B$ 为关于 $R_{Łu}$的重言式. 所以,由定理 5.1.8 得$\tau(B)=1$.

**定理 5.1.13** 设 $A,B\in F(S)$. 若 $\tau(A)\geqslant\alpha,\tau(A\to B)\geqslant\beta$,则 $\tau(B)\geqslant\alpha+\beta-1$.

**证** 由积分不变性定理,不妨设 $A$ 与 $B$ 含有同样的原子公式 $p_1,\cdots,p_n$. 这时由定理中的条件知

$$\tau(A)=\int_{\Delta_n}\bar{A}\mathrm{d}\omega_n\geqslant\alpha,$$

$$\tau(A\to B)=\int_{\Delta_n}(1-\bar{A}+\bar{B})\wedge 1\mathrm{d}\omega_n\geqslant\beta.$$

由此得

$$\begin{aligned}\tau(B)&=\int_{\Delta_n}\bar{B}\mathrm{d}\omega_n=\int_{\Delta_n}[\bar{A}+(1-\bar{A}+\bar{B})-1]\mathrm{d}\omega_n\\&\geqslant\int_{\Delta_n}[\bar{A}+(1-\bar{A}+\bar{B})\wedge 1-1]\mathrm{d}\omega_n\\&\geqslant\alpha+\beta-1.\end{aligned}$$

(2)积分 HS 规则

**定理 5.1.14** 设 $A,B\in F(S)$. 若 $\tau(A\to B)=1,\tau(B\to C)=1$,则 $\tau(A\to C)=1$.

**证** 设 $\tau(A\to B)=\tau(B\to C)=1$, 则由定理 5.1.8,$A\to B$ 与 $B\to C$ 都是$R_{Łu}$-重

言式,即 $\forall v\in\Omega_{R_{\text{Łu}}}$

$$1-v(A)+v(B)\geqslant 1,\quad 1-v(B)+v(C)\geqslant 1.$$

从而 $1-v(A)+v(C)\geqslant 1$,即 $A\to C$ 为 $R_{\text{Łu}}$-重言式. 所以 $\tau(A\to C)=1$.

**定理 5.1.15**　设 $A,B\in F(S)$. 若 $\tau(A\to B)\geqslant\alpha,\tau(B\to C)\geqslant\beta$,则 $\tau(A\to C)\geqslant\alpha+\beta-1$.

**证**　设 $\Delta^*=\{\omega\in\Delta\mid(1-\bar{A}+\bar{C})(\omega)>1\}$,则

$$\begin{aligned}\tau(A\to C)&=\int_{\Delta^*}\mathrm{d}\omega+\int_{\Delta-\Delta^*}(1-\bar{A}+\bar{C})\mathrm{d}\omega\\&=\int_{\Delta^*}\mathrm{d}\omega+\int_{\Delta-\Delta^*}[(1-\bar{A}+\bar{B})+(1-\bar{B}+\bar{C})-1]\mathrm{d}\omega\\&=\int_{\Delta^*}\mathrm{d}\omega+\int_{\Delta-\Delta^*}(1-\bar{A}+\bar{B})\mathrm{d}\omega\\&\quad+\int_{\Delta-\Delta^*}(1-\bar{B}+\bar{C})\mathrm{d}\omega-\int_{\Delta-\Delta^*}\mathrm{d}\omega\\&=\left(\int_{\Delta^*}\mathrm{d}\omega+\int_{\Delta-\Delta^*}(1-\bar{A}+\bar{B})\mathrm{d}\omega\right)\\&\quad+\left(\int_{\Delta^*}\mathrm{d}\omega+\int_{\Delta-\Delta^*}(1-\bar{B}+\bar{C})\mathrm{d}\omega-1\right)\\&\geqslant\int_{\Delta}(1-\bar{A}+\bar{B})\wedge 1\mathrm{d}\omega+\int_{\Delta}(1-\bar{B}+\bar{C})\wedge 1\mathrm{d}\omega-1\\&\geqslant\alpha+\beta-1.\end{aligned}$$

(3)积分交推理规则

**定理 5.1.16**　设 $A,B,C\in F(S)$. 若 $\tau(A\to B)=1,\tau(A\to C)=1$,则 $\tau(A\to B\wedge C)=1$.

**证**　由定理 5.1.8 可知 $A\to B$ 与 $A\to C$ 都是 $R_{\text{Łu}}$-重言式,即对每个 $v\in\Omega_{R_{\text{Łu}}}$,

$$v(A\to B)=(1-v(A)+v(B))\wedge 1=1,$$
$$v(A\to C)=(1-v(A)+v(C))\wedge 1=1.$$

不妨设 $v(B)\leqslant v(C)$,这时

$$\begin{aligned}v(A\to B\wedge C)&=(1-v(A)+v(B\wedge C))\wedge 1\\&=(1-v(A)+v(B))\wedge 1=1.\end{aligned}$$

因为 $v$ 是任意的,所以 $A\to B\wedge C$ 是 $R_{\text{Łu}}$-重言式,从而 $\tau(A\to B\wedge C)=1$.

**定理 5.1.17**　设 $A,B,C\in F(S)$,$0<\varepsilon\leqslant 1$. 若 $\tau(A\to B)\geqslant 1-\varepsilon,\tau(A\to C)\geqslant 1-\varepsilon$,则 $\tau(A\to B\wedge C)\geqslant(1-\sqrt{2\varepsilon})^2$.

**证**　令　$$E_1=\{\omega\in\Delta\mid(\bar{A}\to\bar{B})(\omega)<1-\sqrt{2\varepsilon}\},$$

$$E_2 = \{\omega \in \Delta \mid (\bar{A} \to \bar{C})(\omega) < 1 - \sqrt{2\varepsilon}\}.$$

设 $E_1$ 与 $E_2$ 的测度分别为

$$mE_1 = d_1 \quad 与 \quad mE_2 = d_2,$$

则

$$\begin{aligned}\int_\Delta (\bar{A} \to \bar{B})\mathrm{d}\omega &= \int_{E_1} (\bar{A} \to \bar{B})\mathrm{d}\omega + \int_{\Delta - E_1} (\bar{A} \to \bar{B})\mathrm{d}\omega \\ &\leqslant d_1(1 - \sqrt{2\varepsilon}) + 1 - d_1 = 1 - d_1 \sqrt{2\varepsilon}.\end{aligned}$$

所以由假设知

$$1 - d_1\sqrt{2\varepsilon} \geqslant 1 - \varepsilon, \qquad d_1 \leqslant \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}.$$

同理，$d_2 \leqslant \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}$. 而因为在 $\Delta - E_1 \cup E_2$ 上

$$(\bar{A} \to \bar{B})(\omega) \geqslant 1 - \sqrt{2\varepsilon}, \quad (\bar{A} \to \bar{C})(\omega) \geqslant 1 - \sqrt{2\varepsilon},$$

所以在 $\Delta - E_1 \cup E_2$ 上

$$(\bar{A} \to \bar{B} \wedge \bar{C})(\omega) \geqslant 1 - \sqrt{2\varepsilon}. \tag{5.1.7}$$

又 $\Delta - E_1 \cup E_2$ 的测度

$$\begin{aligned}m(\Delta - E_1 \cup E_2) &\geqslant m\Delta - mE_1 - mE_2 = 1 - d_1 - d_2 \\ &\geqslant 1 - 2\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}} = 1 - \sqrt{2\varepsilon}.\end{aligned} \tag{5.1.8}$$

所以由(5.1.7)式与(5.1.8)式得

$$\begin{aligned}\int_\Delta (\bar{A} \to \bar{B} \wedge \bar{C})\mathrm{d}\omega &\geqslant \int_{\Delta - E_1 \cup E_2} (\bar{A} \to \bar{B} \wedge \bar{C})\mathrm{d}\omega \\ &\geqslant (1 - \sqrt{2\varepsilon})^2.\end{aligned}$$

**注 5.1.18** 注意，关于Łukasiewicz 蕴涵算子而言的赋值 $v$ 也满足

$$\begin{aligned}v(A \to B \wedge C) &= R(v(A), v(B) \wedge v(C)) \\ &= R(v(A), v(B)) \wedge R(v(A), v(C)).\end{aligned}$$

所以定理 5.1.17 是下面结论的特殊情形：设 $f:\Delta \to [0,1]$，$g:\Delta \to [0,1]$. 若 $\int_\Delta f\mathrm{d}\omega \geqslant 1 - \varepsilon$，$\int_\Delta g\mathrm{d}\omega \geqslant 1 - \varepsilon$，则 $\int_\Delta (f \wedge g)\mathrm{d}\omega \geqslant (1 - \sqrt{2\varepsilon})^2$. 此结论可像定理5.1.17 的证明一样去证明. 这里 $1 - \sqrt{2\varepsilon}$ 的出处如下：设

$$E_1 = \{\omega \in \Delta \mid f(\omega) < c\}, \quad mE_1 = d_1,$$

则

$$\int_\Delta f\mathrm{d}\omega = \int_{E_1} f\mathrm{d}\omega + \int_{\Delta - E_1} f\mathrm{d}\omega \leqslant cd_1 + (1 - d_1)$$

$$= 1 - (1 - c)d_1.$$

由假设知

$$1 - (1 - c)d_1 \geqslant 1 - \varepsilon, \quad \text{从而 } d_1 \leqslant \frac{\varepsilon}{1 - c}.$$

同理,令

$$E_2 = \{\omega \in \Delta \mid g(\omega) < c\}, \ mE_2 = d_2,$$

则

$$d_2 \leqslant \frac{\varepsilon}{1 - c}.$$

因为至少在测度为 $1 - d_1 - d_2$ 的范围内 $f \wedge g$ 的值大于或等于 $c$,所以

$$\int_\Delta (f \wedge g)\mathrm{d}\omega \geqslant (1 - d_1 - d_2)c \geqslant \frac{(1 - c - 2\varepsilon) \cdot c}{1 - c}.$$

令

$$\varphi(x) = \frac{(1 - x - 2\varepsilon) \cdot x}{1 - x},$$

可求得 $\varphi(x)$ 在 $[0,1]$ 中有一极大值,其稳定点可令 $\varphi'(x) = 0$ 而求得,即 $c = 1 - \sqrt{2\varepsilon}$. 这样就有

$$\int_\Delta (f \wedge g)\mathrm{d}\omega \geqslant \varphi(1 - \sqrt{2\varepsilon}) = (1 - \sqrt{2\varepsilon})^2.$$

## 5.2　真度值在[0,1]中的分布

本节中将证明全体可能的真度之集作为[0,1]的子集是没有孤立点的. 换句话说,对任一公式 $A$ 的真度 $\tau(A)$ 而言,有异于 $A$ 的公式 $B$,其真度 $\tau(B)$ 与 $\tau(A)$ 之差的绝对值可小于任何预先指定的正数. 我们需要如下两个引理.

**引理 5.2.1**　设 $\varepsilon > 0$,则 $F(S)$ 中有公式 $A$ 满足 $0 < \tau(A) < \varepsilon$.

**证**　设 $A_n = p_1 \wedge \cdots \wedge p_n (n = 1, 2, \cdots)$,这里 $p_i \in S$ 且当 $i \neq j$ 时 $p_i \neq p_j (i, j = 1, \cdots, n)$,则 $\tau(A_n) > 0$ 显然成立. 以下只需证明

$$\lim_{n\to\infty} \tau(A_n) = \lim_{n\to\infty} \tau(p_1 \wedge \cdots \wedge p_n) = 0. \tag{5.2.1}$$

事实上,令

$$\delta_n = \left\{(x_1, \cdots, x_n) \in [0,1]^n \mid x_i > \frac{\ln n}{n}, i = 1, \cdots, n\right\}, \tag{5.2.2}$$

则 $\delta_n$ 的测度(Lebesgue 测度)

$$m\delta_n = \left(1 - \frac{\ln n}{n}\right)^n. \tag{5.2.3}$$

令 $\Delta = [0,1]^n$,则在 $\Delta - \delta_n$ 上,

$$x_1 \wedge \cdots \wedge x_n \leqslant \frac{\ln n}{n} \tag{5.2.4}$$

恒成立. 所以由(5.2.3)式与(5.2.4)式得

$$\begin{aligned}\tau(p_1 \wedge \cdots \wedge p_n) &= \int_\Delta (x_1 \wedge \cdots \wedge x_n)\mathrm{d}\omega_n \\ &= \int_{\Delta-\delta_n}(x_1 \wedge \cdots \wedge x_n)\mathrm{d}\omega_n + \int_{\delta_n}(x_1 \wedge \cdots \wedge x_n)\mathrm{d}\omega_n \\ &\leqslant \frac{\ln n}{n} + \left(1 - \frac{\ln n}{n}\right)^n.\end{aligned} \tag{5.2.5}$$

因为$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{n}=0$,且由

$$\left(1 - \frac{\ln n}{n}\right)^n = \left[\left(1 - \frac{\ln n}{n}\right)^{\frac{n}{\ln n}}\right]^{\ln n},$$

以及$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^x = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$知

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{\ln n}{n}\right)^n = 0.$$

所以由(5.2.5)式即得(5.2.1)式.

注意, 以上并未用到 $R_{\text{Łu}}$,所以(5.2.1)式可改写为更一般的

$$\lim_{n\to\infty}\tau^*(p_1 \wedge \cdots \wedge p_n) = 0. \tag{5.2.6}$$

**引理 5.2.2** 设 $\varepsilon_1>0,\varepsilon_2>0$,则 $F(S)$ 中有公式 $A=A(p_1,\cdots,p_n)$ 满足

$$m\{(x_1,\cdots,x_n) \in [0,1]^n \mid \bar{A}(x_1,\cdots,x_n) \geqslant \varepsilon_1\} < \varepsilon_2. \tag{5.2.7}$$

**证** 若 $F(S)$ 中每个公式 $A=A(p_1,\cdots,p_n)$ 都不满足(5.2.7)式,则由

$$\int_{\Delta_n}\bar{A}\mathrm{d}\omega_n = \int_{\bar{A}\geqslant\varepsilon_1}\bar{A}\mathrm{d}\omega_n + \int_{\bar{A}<\varepsilon_1}\bar{A}\mathrm{d}\omega_n \geqslant \int_{\bar{A}\geqslant\varepsilon_1}\bar{A}\mathrm{d}\omega_n \geqslant \varepsilon_1\cdot\varepsilon_2$$

恒成立知对每个公式 $A$ 均有 $\tau(A)\geqslant\varepsilon_1\varepsilon_2$. 这与引理 5.2.1 相矛盾.

**定理 5.2.3** 设 $A\in F(S),\varepsilon>0$,则 $F(S)$ 中有公式 $B$,满足条件 $\tau(B)\neq\tau(A)$且

$$|\tau(A) - \tau(B)| < \varepsilon. \tag{5.2.8}$$

**证** 若 $\tau(A)=1$,由引理 5.2.1,取 $D\in F(S)$使

$$0 < \tau(D) < \varepsilon.$$

令 $B=\neg D$,则 $\tau(B)=1-\tau(D)\neq\tau(A)$且(5.2.8)式成立. 所以,可设 $\tau(A)<1$. 这时若 $\tau(A)>1-\varepsilon$,令 $B$ 为任一重言式,则 $\tau(B)\neq\tau(A)$且(5.2.8)式成立. 所以可进一步设 $\tau(A)\leqslant 1-\varepsilon$. 取自然数 $k$ 使

$$\frac{1}{k} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{5.2.9}$$

再由引理 5.2.2,有形如 $p_1 \wedge \cdots \wedge p_n$ 的 $D \in F(S)$ 使

$$m\left\{\omega \in \Delta \mid \overline{D}(\omega) \geqslant \frac{1}{k}\right\} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{5.2.10}$$

令 $B = \neg A \to D$,则

$$\overline{B} = R_{\text{Łu}}(\neg \overline{A}, \overline{D}) = (\overline{A} + \overline{D}) \wedge 1 \geqslant \overline{A}. \tag{5.2.11}$$

这时由(5.2.9)式与(5.2.10)式得

$$\begin{aligned}\tau(B) &= \int_\Delta \overline{B}\mathrm{d}\omega = \int_{\substack{\Delta \\ \overline{D} \geqslant \frac{1}{k}}} \overline{B}\mathrm{d}\omega + \int_{\substack{\Delta \\ \overline{D} < \frac{1}{k}}} \overline{B}\mathrm{d}\omega \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \int_{\substack{\Delta \\ \overline{D} < \frac{1}{k}}} (\overline{A} + \overline{D})\mathrm{d}\omega \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \int_\Delta \left(\overline{A} + \frac{1}{k}\right)\mathrm{d}\omega \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \int_\Delta \overline{A}\mathrm{d}\omega + \frac{1}{k} \leqslant \int_\Delta \overline{A}\mathrm{d}\omega + \varepsilon.\end{aligned} \tag{5.2.12}$$

由(5.2.11)式与(5.2.12)式即得(5.2.8)式.

以下证明 $\tau(B) \neq \tau(A)$. 事实上,由 $\tau(A) \leqslant 1 - \varepsilon$ 知

$$m\{\omega \in \Delta \mid \overline{A}(\omega) < 1\} \geqslant \varepsilon. \tag{5.2.13}$$

又由 $D = p_1 \wedge \cdots \wedge p_n$ 知 $\overline{D}$ 在 $\Delta$ 上几乎处处大于零,即

$$m\{\omega \in \Delta \mid \overline{D}(\omega) > 0\} = 1. \tag{5.2.14}$$

由(5.2.13)式与(5.2.14)式知有 $\omega_0 \in \Delta$ 使

$$\overline{A}(\omega_0) < (\overline{A}(\omega_0) + \overline{D}(\omega_0)) \wedge 1 = \overline{B}(\omega_0).$$

由 $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 为连续函数知 $\omega_0$ 有一正测度的小邻域 $\sigma$,$\overline{B}(\omega) > \overline{A}(\omega)$ 在 $\sigma$ 上恒成立. 又 $\overline{B} \geqslant \overline{A}$,所以 $\tau(B) > \tau(A)$.

**注 5.2.4**　定理 5.2.3 表明,在每个真度值的任意小的邻域内还存在其他不同的真度,即全体真度值之集是没有孤立点的. 请读者考虑,全体真度值之集是否在[0,1]中稠密? 即任取 $\alpha \in [0,1]$,对任意给定的正数 $\varepsilon$,是否存在公式 $A \in F(S)$ 使 $\alpha - \varepsilon < \tau(A) < \alpha + \varepsilon$?

## 5.3　积分相似度理论

利用积分方法可以在 $F(S)$ 的公式之间引入相似度的概念.

**定义 5.3.1**　设 $A, B \in F(S)$,则称

$$\xi_R(A,B) = \int_\Delta R(\overline{A},\overline{B}) \wedge R(\overline{B},\overline{A})\mathrm{d}\omega \tag{5.3.1}$$

为 $A$ 与 $B$ 之间的 ***R* 积分相似度**. 当 $\xi_R(A,B) = 1$ 时称 $A$ 与 $B$ 是 ***R* 积分相似的**,记作 $A \backsim_R B$.

当 $R$ 取为 Łukasiewicz 蕴涵算子时 $\xi_R$ 与 $\backsim_R$ 的下标 $R$ 将略去. 这时若 $A \backsim B$,则

称 $A$ 与 $B$ **积分相似**. 注意, $1-\bar{A}+\bar{B}$ 与 $1-\bar{B}+\bar{A}$ 之中至少有一个不大于 1,得

$$\xi(A,B)=\int_{\Delta}[(1-\bar{A}+\bar{B})\wedge(1-\bar{B}+\bar{A})]\mathrm{d}\omega. \qquad (5.3.2)$$

下面两个命题是自明的.

**命题 5.3.2** 设 $A,B\in F(S)$,且 $R$ 满足

$$R(a,b)=1 \quad 当且仅当 \quad a\leqslant b,$$

则

i) $\xi_R(A,A)=1$.

ii) 当 $\bar{A}\leqslant\bar{B}$ 时 $\xi_R(A,B)=\tau_R(B\to A)$.

**命题 5.3.3** 设 $A,B\in F(S)$,则

i) $\xi_R(A,B)\leqslant\tau_R(A\to B)\wedge\tau_R(B\to A)$. $\qquad$ (5.3.3)

ii) $\xi_R(A,B)=\xi_R(B,A)$.

**定理 5.3.4** 设 $A,B\in F(S)$,则

$$A\backsim B \quad 当且仅当 \quad A 与 B 是逻辑等价的.$$

**证** 设 $A\backsim B$,则由(5.3.2)式以及 $R_{Łu}$ 的连续性知

$$1-\bar{A}+\bar{B}=1-\bar{B}+\bar{A}=1$$

恒成立,即对每个赋值 $v\in\Omega_{R_{Łu}}$,

$$v(A\to B)=v(B\to A)=1$$

恒成立. 由此得 $v(A)\leqslant v(B)$ 与 $v(B)\leqslant v(A)$,即 $v(A)=v(B)$ 恒成立. 所以 $A$ 与 $B$ 是逻辑等价的. 反过来,当 $A$ 与 $B$ 逻辑等价时,沿相反方向推理便知 $A\backsim B$.

**例 5.3.5** 求 $\xi(p,q)$, $\xi(p,p\vee q)$.

**解** 
$$\xi(p,q)=\int_{\Delta}[(1-x+y)\wedge(1-y+x)]\mathrm{d}\omega.$$

令

$$S_1=\{(x,y)\mid x\leqslant y\},\quad S_2=\{(x,y)\mid x>y\},$$

则

$$\xi(p,q)=\int_{S_1}(1-y+x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_{S_2}(1-x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}.$$

又

$$\xi(p,p\vee q)=\int_{\Delta}[(x\to x\vee y)\wedge(x\vee y\to x)]\mathrm{d}\omega$$
$$=\int_{\Delta}(x\vee y\to x)\mathrm{d}\omega$$
$$=\int_{S_1}(y\to x)\mathrm{d}\omega+\int_{S_2}(x\to x)\mathrm{d}\omega$$

$$= \int_{S_1} (1 - y + x) \mathrm{d}\omega + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}.$$

以下讨论 $\xi: F(S) \times F(S) \to [0,1]$ 的进一步性质.

**引理 5.3.6**　设 $f(x,y) = R_{\text{Łu}}(x,y) \wedge R_{\text{Łu}}(y,x)$，则

$$f(a,c) \geqslant f(a,b) + f(b,c) - 1. \tag{5.3.4}$$

**证**　设 $a \leqslant c$，则

$$f(a,c) = 1 - c + a. \tag{5.3.5}$$

i) 设 $b < a$，则

$$f(a,b) = 1 - a + b, \quad f(b,c) = 1 - c + b.$$

注意，$2b - a < a$ 得

$$f(a,b) + f(b,c) = 2 - c + (2b - a) < 2 - c + a.$$

从而由 (5.3.5) 式知 (5.3.4) 式成立.

ii) 设 $a \leqslant b \leqslant c$，则

$$f(a,b) = 1 - b + a, \quad f(b,c) = 1 - c + b.$$

所以

$$f(a,b) + f(b,c) = 2 - c + a.$$

由 (5.3.5) 式仍得 (5.3.4) 式.

iii) 设 $c < b$，则

$$f(a,b) = 1 - b + a, \quad f(b,c) = 1 - b + c.$$

这时

$$\begin{aligned} f(a,b) + f(b,c) &= 2 - 2b + a + c \\ &= 2 - c + a - 2(b - c) < 2 - c + a. \end{aligned}$$

所以由 (5.3.5) 式知 (5.3.4) 式也成立.

当 $a > c$ 时，类似可证 (5.3.4) 式成立.

**定理 5.3.7**　设 $A, B, C \in F(S)$. 若 $\xi(A,B) \geqslant \alpha, \xi(B,C) \geqslant \beta$，则

$$\xi(A,C) \geqslant \alpha + \beta - 1.$$

**证**　由引理 5.3.6 即得

$$\begin{aligned} \xi(A,C) &= \int_\Delta f(\bar{A},\bar{C}) \mathrm{d}\omega \geqslant \int_\Delta [f(\bar{A},\bar{B}) + f(\bar{B},\bar{C}) - 1] \mathrm{d}\omega \\ &= \int_\Delta f(\bar{A},\bar{B}) \mathrm{d}\omega + \int_\Delta f(\bar{B},\bar{C}) \mathrm{d}\omega - \int_\Delta \mathrm{d}\omega \end{aligned}$$

$$=\xi(A,B)+\xi(B,C)-1\geqslant\alpha+\beta-1.$$

## 5.4 $F(S)$上的伪距离

利用积分相似度可以在 $F(S)$ 上引入伪距离.

**定义 5.4.1** 设 $A,B\in F(S)$,规定

$$\rho(A,B)=1-\xi(A,B).$$

**定理 5.4.2** $\rho:F(S)\times F(S)\to[0,1]$是 $F(S)$ 上的伪距离.

**证** 设 $A,B,C\in F(S)$. 则由命题 5.3.2 得

i) $\rho(A,A)=1-\xi(A,A)=1-1=0.$

ii) $\rho(A,B)=1-\xi(A,B)=1-\xi(B,A)=\rho(B,A).$

又由定理 5.3.7,有

$$\xi(A,C)\geqslant\xi(A,B)+\xi(B,C)-1.$$

从而有

iii) $\rho(A,C)=1-\xi(A,C)\leqslant[1-\xi(A,B)]+[1-\xi(B,C)]=\rho(A,B)+\rho(B,C).$

在 $F(S)$ 上还可像通常在函数空间上那样引入自然的距离 $d$.

**定义 5.4.3** 设 $A,B\in F(S)$,则

$$d(A,B)=\int_\Delta|\bar{A}-\bar{B}|\,\mathrm{d}\omega.$$

那么 $d$ 与 $\rho$ 的关系如何呢? 答案是 $d=\rho$, 即下面的定理成立.

**定理 5.4.4** $d=\rho$,即对任意两个 $A,B\in F(S)$,

$$d(A,B)=\rho(A,B).$$

**证** 容易验证

$$1-(1-a+b)\wedge(1-b+a)=|a-b|.$$

所以

$$\begin{aligned}\rho(A,B)&=1-\xi(A,B)\\&=\int_\Delta[1-(1-\bar{A}+\bar{B})\wedge(1-\bar{B}+\bar{A})]\mathrm{d}\omega\\&=\int_\Delta|\bar{A}-\bar{B}|\,\mathrm{d}\omega=d(A,B).\end{aligned}$$

**命题 5.4.5** 设 $A,B\in F(S)$,则

$$\rho(\neg A,\neg B)=\rho(A,B).\tag{5.4.1}$$

**证**

$$\rho(\neg A,\neg B)=d(\neg A,\neg B)$$

$$=\int_{\Delta}|\neg\bar{A}-\neg\bar{B}|\,d\omega$$

$$=\int_{\Delta}|(1-\bar{A})-(1-\bar{B})|\,d\omega$$

$$=\int_{\Delta}|\bar{B}-\bar{A}|\,d\omega=d(B,A)$$

$$=d(A,B)=\rho(A,B).$$

**推论 5.4.6**　设 $A,A_n\in F(S)(n=1,2,\cdots)$，则

$$\lim_{n\to\infty}\rho(A_n,A)=0\quad\text{当且仅当}\quad\lim_{n\to\infty}\rho(\neg A_n,\neg A)=0.\tag{5.4.2}$$

推论 5.4.6 表明非运算"$\neg$"在$(F(S),\rho)$中是连续的. 以下讨论并运算"$\vee$"与蕴涵运算"$\rightarrow$"的连续性.

**引理 5.4.7**　设 $a,b,c$ 是实数，则

$$|a\vee c-b\vee c|\leqslant|a-b|.\tag{5.4.3}$$

**证**　不妨设 $a\leqslant b$. 这时若 $c\leqslant a$，则

$$|a\vee c-b\vee c|=|a-b|.$$

若 $a<c\leqslant b$，则

$$|a\vee c-b\vee c|=|c-b|<|a-b|.$$

若 $b<c$，则

$$|a\vee c-b\vee c|=|c-c|=0\leqslant|a-b|.$$

所以(5.4.3)式成立.

**命题 5.4.8**　设 $A,B,C,D\in F(S)$，且

$$\rho(A,B)<\varepsilon,\quad\rho(C,D)<\varepsilon,\tag{5.4.4}$$

则

$$\rho(A\vee C,B\vee D)<2\varepsilon.\tag{5.4.5}$$

**证**　由引理 5.4.7 与(5.4.4)式得

$$\begin{aligned}\rho(A\vee C,B\vee D)&=\int_{\Delta}|\bar{A}\vee\bar{C}-\bar{B}\vee\bar{D}|\,d\omega\\&\leqslant\int_{\Delta}|\bar{A}\vee\bar{C}-\bar{B}\vee\bar{C}|\,d\omega\\&\quad+\int_{\Delta}|\bar{B}\vee\bar{C}-\bar{B}\vee\bar{D}|\,d\omega\\&\leqslant\int_{\Delta}|\bar{A}-\bar{B}|\,d\omega+\int_{\Delta}|\bar{C}-\bar{D}|\,d\omega<2\varepsilon.\end{aligned}$$

所以(5.4.5)式成立.

**推论 5.4.9**　设 $A,B,A_n,B_n\in F(S)\ (n=1,2,\cdots)$，则当

$$\lim_{n\to\infty}\rho(A_n,A)=\lim_{n\to\infty}\rho(B_n,B)=0$$

时，

$$\lim_{n\to\infty}\rho(A_n \vee B_n, A \vee B) = 0. \tag{5.4.6}$$

由推论 5.4.6 与推论 5.4.9 易证下面的推论.

**推论 5.4.10** 设 $A, B, A_n, B_n \in F(S)\ (n = 1, 2, \cdots)$,则当

$$\lim_{n\to\infty}\rho(A_n, A) = \lim_{n\to\infty}\rho(B_n, B) = 0$$

时,

$$\lim_{n\to\infty}\rho(A_n \wedge B_n, A \wedge B) = 0. \tag{5.4.7}$$

**引理 5.4.11** 设 $a, b, c, d \in [0,1]$,则

$$|R_{Łu}(a,b) - R_{Łu}(c,d)| \leqslant |a - c| + |b - d|. \tag{5.4.8}$$

**证** 设 $a \leqslant b$,这时若 $c \geqslant d$,则

$$\begin{aligned}|R_{Łu}(a,b) - R_{Łu}(c,d)| &= |1 - (1 - c + d)| \\ &= c - d = a + (c - a) - d \\ &\leqslant b + (c - a) - d \leqslant |a - c| + |b - d|.\end{aligned}$$

若 $c < d$,则

$$|R_{Łu}(a,b) - R_{Łu}(c,d)| = |1 - 1| = 0$$

$$\leqslant |a - c| + |b - d|.$$

当 $a > b$ 时可类似证明(5.4.8)式成立.

**命题 5.4.12** 设 $A, B, C, D \in F(S)$,则

$$\rho(A \to B, C \to D) \leqslant \rho(A, C) + \rho(B, D). \tag{5.4.9}$$

**证** 由引理 5.4.11 得

$$\rho(A \to B, C \to D) = \int_\Delta |(\bar{A} \to \bar{B}) - (\bar{C} \to \bar{D})|\, \mathrm{d}\omega$$

$$\leqslant \int_\Delta |\bar{A} - \bar{C}|\, \mathrm{d}\omega + \int_\Delta |\bar{B} - \bar{D}|\, \mathrm{d}\omega$$

$$= \rho(A, C) + \rho(B, D).$$

**推论 5.4.13** 设 $A, B, A_n, B_n \in F(S)\quad (n = 1, 2, \cdots)$. 若

$$\lim_{n\to\infty}\rho(A_n, A) = \lim_{n\to\infty}\rho(B_n, B) = 0, \tag{5.4.10}$$

则

$$\lim_{n\to\infty}\rho(A_n \to B_n, A \to B) = 0. \tag{5.4.11}$$

总结以上各性质得如下定理.

**定理 5.4.14** 在伪距离空间$(F(S), \rho)$中,一元运算"$\neg$"与二元运算"$\vee$","$\wedge$"与"$\to$"都是连续的.

对 $F(S)$ 中的任一公式 $A$,定理 5.2.3 说 $F(S)$ 中有真度与 $A$ 的真度不同但充分接近的公式. 在伪距离空间$(F(S), \rho)$中也有类似的事实成立.

**定理 5.4.15**　设 $A \in F(S)$, $\varepsilon > 0$. 则在伪距离空间 $(F(S),\rho)$ 中有公式 $B$ 满足

$$0 < \rho(A,B) < \varepsilon. \tag{5.4.12}$$

**证**　由引理 5.2.1,取公式 $D \in F(S)$ 使 $0 < \tau(D) < \varepsilon$,且使 $\overline{D}$ 在 $\Delta$ 上几乎处处大于零(例如,令 $D = p_1 \wedge \cdots \wedge p_n$ 即可). 若 $\tau(A) = 1$,则由(5.1.5)式知 $A$ 为 $R_{Łu}$-重言式. 令 $B = \neg D$,则

$$\begin{aligned}\rho(A,B) &= 1 - \int_\Delta (\overline{A} \to \overline{B}) \wedge (\overline{B} \to \overline{A}) \mathrm{d}\omega \\ &= 1 - \int_\Delta [(\neg \overline{D}) \wedge 1] \mathrm{d}\omega \\ &= 1 - \tau(\neg D) = \tau(D).\end{aligned}$$

所以(5.4.12)式成立. 若 $\tau(A) < 1$,令 $B = \neg A \to D$,则易证对每个 $v \in \Omega_{R_{Łu}}$, $v(A) \leqslant v(B)$. 所以 $v(A \to B) = 1$. 从而

$$\begin{aligned}\rho(A,B) &= 1 - \int_\Delta (\overline{A} \to \overline{B}) \wedge (\overline{B} \to \overline{A}) \mathrm{d}\omega \\ &= 1 - \int_\Delta (\overline{B} \to \overline{A}) \mathrm{d}\omega = 1 - \int_\Delta (1 - \overline{B} + \overline{A}) \mathrm{d}\omega \\ &= 1 - \int_\Delta [1 - (\overline{A} + \overline{D}) \wedge 1 + \overline{A}] \mathrm{d}\omega \\ &\leqslant 1 - \int_\Delta [1 - \overline{A} - \overline{D} + \overline{A}] \mathrm{d}\omega \\ &= 1 - \int_\Delta (1 - \overline{D}) \mathrm{d}\omega = \int_\Delta \overline{D} \mathrm{d}\omega = \tau(D).\end{aligned}$$

所以 $\rho(A,B) < \varepsilon$. 又由 $\tau(A) < 1$ 知 $A$ 不是 $R_{Łu}$-重言式. 取 $\omega \in \Delta$ 使 $\overline{A}(\omega) < 1$,则 $\overline{A}$ 在 $\omega$ 的某具有正测度的小邻域内值小于 1. 因为 $\overline{D}$ 在 $\Delta$ 上几乎处处大于零,所以 $|\overline{A} - \overline{B}| = |\overline{A} - (\overline{A} + \overline{D}) \wedge 1|$ 在 $\omega$ 的具有正测度的某小邻域内几乎处处不为零. 由此得

$$\rho(A,B) = \int_\Delta |\overline{A} - \overline{B}| \mathrm{d}\omega > 0.$$

这就证明了(5.4.12)式.

**注 5.4.16**　当 $\rho(A,B) = 0$ 时. 由定理 5.4.4 以及 $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 的连续性可得 $\overline{A} = \overline{B}$. 但这时不必有 $A = B$(如 $A = p \to p$, $B = q \to q$),所以 $\rho$ 不是 $F(S)$ 上的距离.

最后,易证$\backsim$是 $F(S)$ 上的关于"$\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\to$"的同余关系,这里"$\to$"是 Łukasiewicz 蕴涵算子. 所以商 $F(S)/\backsim$是一$(\neg, \vee, \to)$型代数.

**定义 5.4.17**　称 $F(S)/\backsim$为 Lu-Lindenbaum 代数. 设 $A \in F(S)$,以 $[A]_{Łu}$ 记 $A$ 所在的同余类.

由定理 5.3.4 知对任意两个 $A, B \in F(S)$,

$$A \approx B \quad \text{当且仅当} \quad [A]_{Łu} = [B]_{Łu}. \tag{5.4.13}$$

再由定义 5.4.1、定理 5.4.14 与定理 5.4.15 得如下定理.

**定理 5.4.18** $(F(S)/\backsim,\rho)$是距离空间,这里

$$\rho([A]_{Łu},[B]_{Łu}) = \rho(A,B)$$

且

i) $\neg$ ,$\vee$ ,$\wedge$ ,$\rightarrow$都是$(F(S)/\backsim,\rho)$上的连续算子.

ii) $(F(S)/\backsim,\rho)$中没有孤立点.

## 5.5 F(S)中的近似推理

如在本章一开始所说的,本书中Łukasiewicz 命题演算系统中不含常值命题,不涉及其公理体系,因而也不讨论完备性问题. 但是推理是从一组预定的公式 $\Gamma$ 以及公理出发运用推理规则来进行的. 有了公理以及推理规则也就有了定理. 所以,基于 $\Gamma$ 的推理也就是从 $\Gamma$ 以及全体定理出发运用推理规则所进行的推理. 本章的Łukasiewicz 命题演算系统既然不涉及公理,也就不涉及定理. 我们将用真度等于 1 的公式取代定理的地位,也就是用重言式取代定理的地位来作推理的. 因为推理是形式化的演绎,而重言式则属于语义的范围,所以我们的推理实质上是一种语构与语义相结合的混合推理. 我们使用的推理规则是 MP 规则,不使用交推理规则,因为后者是与 $\mathscr{L}^*$ -系统,也即与蕴涵算子 $R_0$ 配套使用的推理规则.

### 5.5.1 真度与距离之关系

**定理 5.5.1** 设 $A,B\in F(S)$,则

$$\text{当}\,\tau(A) = \alpha,\ \tau(B) = \beta\,\text{时}, \quad \rho(A,B) \leqslant 2 - \alpha - \beta. \tag{5.5.1}$$

**证** 由

$$|a-b| = |a-1+1-b| \leqslant |1-a| + |1-b|$$

知

$$\begin{aligned}\rho(A,B) &= \int_\Delta |\bar{A} - \bar{B}|\,d\omega \\ &\leqslant \int_\Delta |1-\bar{A}|\,d\omega + \int_\Delta |1-\bar{B}|\,d\omega \\ &= \int_\Delta (1-\bar{A})\,d\omega + \int_\Delta (1-\bar{B})\,d\omega \\ &= 1-\tau(A)+1-\tau(B) = 2-\alpha-\beta.\end{aligned}$$

**推论 5.5.2** 真度为 1 的各公式间的伪距离为零.

**定理 5.5.3** 设 $A,B\in F(S)$,则

$$\text{当}\,\tau(A) = \alpha,\ \rho(A,B) = \varepsilon\,\text{时}, \quad \tau(B) \geqslant \alpha - \varepsilon. \tag{5.5.2}$$

**证**　由 $|\bar{A}-\bar{B}|\geqslant\bar{A}-\bar{B}$ 得

$$\bar{B}\geqslant\bar{A}-|\bar{A}-\bar{B}|.$$

所以

$$\begin{aligned}\tau(B)&=\int_{\Delta}\bar{B}\mathrm{d}\omega\\&\geqslant\int_{\Delta}\bar{A}\mathrm{d}\omega-\int_{\Delta}|\bar{A}-\bar{B}|\mathrm{d}\omega\\&=\alpha-\varepsilon.\end{aligned}$$

**推论 5.5.4**　伪距离为零的公式有相等的真度.

### 5.5.2　准证明与准推理

以下用 $T$ 表示全体真度为 1 的公式之集，即

$$T=\{A\in F(S)\mid\tau(A)=1\}.\tag{5.5.3}$$

**定义 5.5.5**　$F(S)$ 中的**准证明**是一个有限序列

$$A_1,\cdots,A_n,\tag{5.5.4}$$

其中对每个 $i\leqslant n$，或者 $A_i\in T$，或者有 $j,k<i$ 使 $A_i$ 是由 $A_j$ 与 $A_k$ 运用 MP 规则或 HS 规则而得的结果. 序列(5.5.4)叫 $A_n$ 的准证明，$A_n$ 叫**准定理**，记作(quasi) $\vdash A_n$，或简记为 $(q)\vdash A_n$.

由积分 MP 规则与积分 HS 规则立即得如下命题.

**命题 5.5.6**　设 $A$ 为准定理，则 $\tau(A)=1$. 反过来，若 $\tau(A)=1$，则 $A$ 是准定理.

**定义 5.5.7**　设 $A\in F(S)$，$\Gamma\subset F(S)$，从 $\Gamma$ 到 $A$ 的**准推理**是一个有限序列(5.5.4)，其中 $A_n=A$，且对每个 $i\leqslant n$，$A_i\in T\cup\Gamma$，或者有 $j,k<i$ 使 $A_i$ 是由 $A_j$ 与 $A_k$ 运用 MP 规则或 HS 规则而得的结果. $A$ 叫做 $\Gamma$ 的 ***n* 级准推论**，记作

$$(q)\Gamma^{(n)}\vdash A.$$

$\Gamma$ 的全体 $n$ 级准推论之集记作 $(q)\mathrm{Ded}(\Gamma^{(n)})$，或简记作 $D(\Gamma^{(n)})$.

显然

$$\begin{aligned}&D(\Gamma^{(1)})=D(\Gamma^{(2)})=T\cup\Gamma,\\&D(\Gamma^{(n)})\subseteq D(\Gamma^{(n+1)})\quad(n=1,2,\cdots).\end{aligned}\tag{5.5.5}$$

由定理 5.1.13 知 $\Gamma$ 的 $n$ 级准推论的真度既与 $\Gamma$ 中各公式的真度有关，又与 $\Gamma$ 到 $A$ 的准推理长度 $n$ 有关. 当 $\Gamma$ 中各公式的真度均大于或等于 $\alpha$ 时，$\Gamma$ 的 $n$ 级准推论的真度估计与古老的斐波那契数列有关.

**定义 5.5.8**　自然数列

$$u_1,\quad u_2,\quad\cdots$$

叫**斐波那契数列**，若 $u_1=u_2=1$，且

$$u_n + u_{n+1} = u_{n+2} \quad (n = 1,2,\cdots). \tag{5.5.6}$$

斐波那契数列有许多有趣的性质. 比如,虽然它的各项都是自然数,但其通项公式却是含有无理数的表达式,即

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n. \tag{5.5.7}$$

这是容易用数学归纳法证明的. 以 $\sigma_n$ 记数列的前 $n$ 项之和,则

$$\sigma_n = u_{n+2} - 1. \tag{5.5.8}$$

这一公式也是容易用数学归纳法证明的. (5.5.7)式与(5.5.8)式的证明留给读者作为练习.

**定理 5.5.9** 设 $A \in F(S)$, $\Gamma \subseteq F(S)$, $A \in D(\Gamma^{(n)})$. 如果对每个 $B \in \Gamma$ 均有 $\tau(B) \geqslant \alpha$,则

$$\tau(A) \geqslant u_n(\alpha - 1) + 1. \tag{5.5.9}$$

这里 $u_n$ 是斐波那契数列的第 $n$ 项.

**证** 当 $n = 1$ 时, $A \in T \cup \Gamma$, $\tau(A) \geqslant \alpha$. 又 $u_n = 1$, $u_n(\alpha - 1) + 1 = \alpha$. 所以(5.5.9)式成立.

设当 $n \leqslant k$ 时,(5.5.9)式成立. $A \in D(\Gamma^{(k+1)})$,则有 $\Gamma$ 到 $A$ 的准推理序列

$$A_1, \quad \cdots, \quad A_k, \quad A. \tag{5.5.10}$$

若 $A \in T \cup \Gamma$,则 $\tau(A) \geqslant \alpha$. 由 $\alpha - 1 \leqslant 0$ 知 $u_n(\alpha - 1) \leqslant \alpha - 1$,即 $u_n(\alpha - 1) + 1 \leqslant \alpha$. 所以(5.5.9)式成立. 若 $A \notin T \cup \Gamma$,则有 $i \leqslant k, j \leqslant k, i \neq j$,使 $A$ 是由 $A_i$ 与 $A_j$ 运用 MP 规则或 HS 规则而得的结论. 由归纳假设得

$$\tau(A_i) \geqslant u_i(\alpha - 1) + 1,$$
$$\tau(A_j) \geqslant u_j(\alpha - 1) + 1.$$

不妨设 $i < j$,则 $j \leqslant k, i \leqslant k - 1$. 注意, $u_n(\alpha - 1) + 1$ 随着 $u_n$ 的增大而减小,则由定理5.1.13与定理 5.1.15 得

$$\begin{aligned} \tau(A) &\geqslant \tau(A_i) + \tau(A_j) - 1 \\ &\geqslant u_i(\alpha - 1) + 1 + u_j(\alpha - 1) + 1 - 1 \\ &\geqslant u_{k-1}(\alpha - 1) + u_k(\alpha - 1) + 1 \\ &= u_{k+1}(\alpha - 1) + 1, \end{aligned}$$

即(5.5.9)式当 $n = k + 1$ 时也成立. 所以(5.5.9)式恒成立.

**注 5.5.10** 由(5.5.9)式看出,如果 $\Gamma$ 中各公式的真度都等于 1,即 $\alpha = 1$,则无论从 $\Gamma$ 出发的准推理有多么长,所得的准推论的真度恒保持为 1. 但是当 $\Gamma$ 中各公式的真度小于 1 时,则随着推理长度的增加,所得准推论的真度将减小. 这时如果把 $\Gamma$ 中的公式理解为近似正确的公式,那么利用近似正确的公式进行推理的次数越多,所得的公式的真确度自然会越低. 所以,定理 5.5.9 在一定意义下反映了带有语义因素的真度概念与带有语构因素的准推理之间的某种和谐性.

**例 5.5.11**　设 $\Sigma \subseteq F(S)$,以 $\tau(\Sigma)$ 记 $\Sigma$ 中各公式真度的下确界. 由定理 5.5.9 知,当 $\tau(\Gamma) \geqslant 0.9$ 时,$\tau(D(\Gamma^{(3)})) \geqslant 2(0.9-1)+1=0.8$. 当 $\tau(\Gamma) \geqslant 0.99$ 时,$\tau(D(\Gamma^{(8)})) \geqslant u_8(0.99-1)+1=21\times(0.99-1)+1=0.79$,即基于真度不低于 0.99 的公式进行长度为 8 的准推理,所得的准推论的真度不低于 0.79.

### 5.5.3　发散度与近似准推理

在上面我们已经看到,从 $\Gamma$ 出发的准推理越长,所得准推论的真度就可能越低,对于由不同公式组成的 $\Gamma$,其准推论的真度情况可能差别很大. 我们认为能推出真度很小的准推论的那类 $\Gamma$ 是不重要的,我们将说这类 $\Gamma$ 的发散度很大.

**定义 5.5.12**　设 $\Gamma \subseteq F(S)$. 令

$$D(\Gamma) = \{A \in F(S) \mid (q)\Gamma \vdash A\}, \tag{5.5.11}$$

即

$$D(\Gamma) = \bigcup_{n=1}^{\infty} D(\Gamma^{(n)}). \tag{5.5.12}$$

令

$$\operatorname{div}(\Gamma^{(n)}) = \sup\{\rho(A,B) \mid A,B \in D(\Gamma^{(n)})\}. \tag{5.5.13}$$

称 $\operatorname{div}(\Gamma^{(n)})$ 为 $\Gamma$ 的 ***n* 次发散度**. 令

$$\operatorname{div}(\Gamma) = \sup\{\operatorname{div}(\Gamma^{(n)}) \mid n=1,2,\cdots\}. \tag{5.5.14}$$

称 $\operatorname{div}(\Gamma)$ 为 $\Gamma$ 的**发散度**. 当 $\operatorname{div}(\Gamma)=1$ 时称 $\Gamma$ 是**全发散的**. 当 $\Gamma$ 只含一个公式 $A$ 时,称 $\operatorname{div}(\{A\})$ 为 $A$ 的发散度,简记为 $\operatorname{div}(A)$.

下面的命题是自明的.

**命题 5.5.13**　设 $\Gamma \subseteq F(S)$,则

$$\operatorname{div}(\Gamma) = \sup\{\rho(A,B) \mid A,B \in D(\Gamma)\}. \tag{5.5.15}$$

**定理 5.5.14**　设 $\Gamma \subseteq F(S)$,则

$$\operatorname{div}(\Gamma) = 0 \quad \text{当且仅当} \quad \Gamma \subseteq T. \tag{5.5.16}$$

**证**　设 $\Gamma \subseteq T$,则对每个 $A \in D(\Gamma)$,$A$ 是准定理. 从而由推论5.5.2知对任意两个 $A,B \in D(\Gamma)$,$\rho(A,B)=0$. 所以由(5.5.15)式知 $\operatorname{div}(\Gamma)=0$.

反过来,设 $\Gamma \not\subseteq T$. 任取 $A \in \Gamma - T$,则 $\tau(A)<1$. 令 $B=p\to p$,则 $B \in T \subseteq D(\Gamma)$. 这时由推论 5.5.4 知 $\rho(A,B)>0$,从而 $\operatorname{div}(\Gamma)>0$. 这就证明了(5.5.16)式.

在经典逻辑的命题演算中,如果 $\Gamma$ 包含有很“坏”的公式,即 $\Gamma$ 包含有形如 $\neg A$ 的公式,这里 $A$ 是定理,则由 $\Gamma$ 可以推出任何一个公式,即 $D(\Gamma)=F(S)$. 对于Łukasiewicz 连续值系统而言,也有类似情况.

**定理 5.5.15**　设 $\Gamma \subseteq F(S)$,如果 $\Gamma$ 中有公式 $A$ 满足 $\bar{A} \leqslant \neg\bar{A}$,则 $\Gamma$ 是全发散的,即 $\operatorname{div}(\Gamma)=1$.

**证**　设 $A \in \Gamma$,$\bar{A} \leqslant \neg\bar{A}$. 任取矛盾式 $C$. 由

$$\overline{A} \to \overline{C} = (\neg \overline{A} + \overline{C}) \wedge 1 = \neg \overline{A} \geqslant \overline{A}$$

知 $A \to (A \to C) \in T$. 那么,由 $A \in \Gamma$ 以及 MP 规则得 $A \to C \in D(\Gamma)$. 再用一次 MP 规则即得 $C \in D(\Gamma)$,即矛盾式是 $\Gamma$ 的准推论. 任取重言式 $B$,则 $B$ 作为准定理也是 $\Gamma$ 的准推论. 显然, $\rho(B,C)=1$,所以 $\mathrm{div}(\Gamma)=1$.

**例 5.5.16** 设 $\Gamma=\{p \wedge \neg p\}$. 令 $A=p \wedge \neg p$,则 $\neg \overline{A}=\overline{p \vee \neg p} \geqslant \overline{A}$. 所以 $\Gamma$ 全发散.

以下考虑近似准推理问题. 为此要用到 Hausdorff 距离的概念.

**定义 5.5.17** 设$(X,\rho)$是伪距离空间,$A,B$ 是 $X$ 的非空子集. 规定

$$\rho(x,A) = \inf\{\rho(x,a) \mid a \in A\}, \quad x \in X, \tag{5.5.17}$$

$$H^*(A,B) = \sup\{\rho(a,B) \mid a \in A\}, \tag{5.5.18}$$

$$H(A,B) = \max\{H^*(A,B), H^*(B,A)\}, \tag{5.5.19}$$

则 $H$ 是 $\mathscr{P}(X)-\{\varnothing\}$ 上的伪距离,称为 $\mathscr{P}(X)-\{\varnothing\}$ 上的 Hausdorff 伪距离. 为简便计,也称 $H$ 为 $X$ 上的 **Hausdorff 距离.**

**注 5.5.18** i) $H$ 是伪距离的证明可见文献[34].

ii)易证当 $A=B$ 时 $H(A,B)=0$,但反之不真. 如当 $A$ 与 $B$ 分别是 $F(S)$ 中的单点集 $p \to p$ 与 $q \to q$ 时就是这样. 其实,即使当$(X,\rho)$为距离空间时 $H$ 也只能是 $\mathscr{P}(X)-\{\varnothing\}$ 上的伪距离. 例如,当 $X=R$ 时,令 $A=[0,1]$,$B=(0,1)$,则 $H(A,B)=0$,但 $A \neq B$.

下面的定理是有趣的.

**定理 5.5.19** 设$(X,\rho)$是伪距离空间,$A,B,C$ 是 $X$ 的非空子集,则

$$H(A \cup C, B \cup C) \leqslant H(A,B). \tag{5.5.20}$$

**证** 显然,当 $E \subseteq F \subseteq X$ 时, $\rho(x,F) \leqslant \rho(x,E)$,且当 $x \in F$ 时, $\rho(x,F)=0$. 所以

$$\begin{aligned} H^*(A \cup C, B \cup C) &= \sup\{\rho(x, B \cup C) \mid x \in A \cup C\} \\ &= \sup\{\rho(x, B \cup C) \mid x \in A\} \vee \sup\{\rho(x, B \cup C \mid x \in C\} \\ &= \sup\{\rho(x, B \cup C) \mid x \in A\} \\ &\leqslant \sup\{\rho(x,B) \mid x \in A\} = H^*(A,B). \end{aligned} \tag{5.5.21}$$

同理有

$$H^*(B \cup C, A \cup C) \leqslant H^*(B,A). \tag{5.5.22}$$

由(5.5.21)式与(5.5.22)式即得(5.5.20)式.

**定义 5.5.20** 设 $\Gamma \subseteq F(S)$,$A \in F(S)$. 设

$$e = e(\Gamma,A) = \inf\{H(D(\Gamma), D(\Sigma)) \mid \Sigma \subseteq F(S), (q)\Sigma \vdash_* A\}, \tag{5.5.23}$$

则称 $A$ 为 **$\Gamma$ 的误差为 $e$ 的准推论.**

显然,当 $A$ 是 $\Gamma$ 的准推论时,$A$ 是 $\Gamma$ 的误差为 0 的准推论,因为这时在(5.5.23)式中可取 $\Sigma=\Gamma$. 反过来,当 $A$ 是 $\Gamma$ 的误差为 0 的准推论时情况如何呢?我们有下面的定理.

**定理 5.5.21**　设 $\Gamma\subseteq F(S)$,$A\in F(S)$,则当 $A$ 是 $\Gamma$ 的误差小于 $\varepsilon$ 的准推论时,$A$ 到 $D(\Gamma)$ 的距离小于 $\varepsilon$.

**证**　设

$$e=\inf\{H(D(\Gamma),D(\Sigma))\mid\Sigma\subseteq F(S),(q)\Sigma\vdash A\}<\varepsilon,$$

则有 $\Sigma\subseteq F(S)$ 使

$$H(D(\Gamma),D(\Sigma))<\varepsilon\quad 且\quad (q)\Sigma\vdash A.$$

由 $A$ 是 $\Sigma$ 的准推论知 $A\in D(\Sigma)$,所以

$$\rho(A,D(\Gamma))\leqslant H^*(D(\Sigma),D(\Gamma))\leqslant H(D(\Gamma),D(\Sigma))<\varepsilon.$$

**推论 5.5.22**　设 $\Gamma\subseteq F(S)$,$A\in F(S)$. 如果 $A$ 是 $\Gamma$ 的误差为 0 的准推论,则 $A$ 属于 $D(\Gamma)$ 在空间 $(F(S),\rho)$ 中的闭包,即

$$当\ e(\Gamma,A)=0\ 时,\quad A\in cl(D(\Gamma)).\tag{5.5.24}$$

**证**　设 $e(\Gamma,A)=0$,则由定理 5.5.21 知 $\rho(A,D(\Gamma))=0$. 这等价于 $A\in cl(D(\Gamma))$.

定理 5.5.21 的反面问题是复杂的,由例 5.5.16 看出,由单个不好的公式组成的集都可能是全发散的,所以仅从 $A$ 与 $D(\Gamma)$ 的距离很小是无法断定 $D(\Gamma)$ 与 $D(\{A\})$ 之间的距离的. 不过当 $\Gamma$ 与 $A$ 的发散度都不大时,我们有下面的定理.

**定理 5.5.23**　设 $\Gamma\subseteq F(S)$,$A\in F(S)$,$\mathrm{div}(\Gamma)\leqslant\delta$,$\mathrm{div}(A)\leqslant\delta$. 如果 $\rho(A,D(\Gamma))<\varepsilon$,则 $e(\Gamma,A)\leqslant\delta+\varepsilon$,即 $A$ 是 $\Gamma$ 的误差不大于 $\delta+\varepsilon$ 的准推论.

**证**　设 $\rho(A,D(\Gamma))<\varepsilon$,则有 $B\in D(\Gamma)$ 使 $\rho(A,B)<\varepsilon$. 这时任取 $A_1\in D(\{A\})$,则由 $\mathrm{div}(A)\leqslant\delta$ 知 $\rho(A_1,A)\leqslant\delta$,从而 $\rho(A_1,B)\leqslant\delta+\varepsilon$. 所以

$$\begin{aligned}H^*(D(\{A\}),D(\Gamma))&=\sup\{\rho(A_1,D(\Gamma))\mid A_1\in D(\{A\})\}\\&\leqslant\sup\{\rho(A_1,B)\mid A_1\in D(\{A\})\}\\&\leqslant\delta+\varepsilon.\end{aligned}\tag{5.5.25}$$

又,任取 $B_1\in D(\Gamma)$,则由 $\mathrm{div}(\Gamma)\leqslant\delta$ 知 $\rho(B_1,B)\leqslant\delta$. 所以

$$\begin{aligned}\rho(B_1,D(\{A\}))&\leqslant\rho(B_1,A)\\&\leqslant\rho(B_1,B)+\rho(B,A)\\&\leqslant\delta+\varepsilon.\end{aligned}$$

从而

$$H^*(D(\Gamma),D(\{A\})) = \sup\{\rho(B_1,D(\{A\})) \mid B_1 \in D(\Gamma)\}$$

$$\leqslant \delta + \varepsilon. \tag{5.5.26}$$

由(5.5.25)式与(5.5.26)式即得

$$e(\Gamma,A) = \inf\{H(D(\Gamma),D(\Sigma)) \mid \Sigma \subseteq F(S),(q)\Sigma \vdash A\}$$

$$\leqslant H(D(\Gamma),D(\{A\})) \leqslant \delta + \varepsilon.$$

所以 $A$ 是 $\Gamma$ 的误差不大于 $\delta+\varepsilon$ 的准推论.

# 第6章 格上的逻辑学

逻辑学中的很多概念也可以推广到格上去讨论,如赋值概念、重言式概念、紧致性概念等都可以推广到格上去. 从一定意义上讲,这种推广以及在一般框架下得到的结论可能反映出的是各概念之间更为本质的联系. 本章首先讨论完备格上的逻辑学,然后讨论一个特殊情况下的逻辑学,即抽象模糊逻辑学或 $L$-Fuzzy 逻辑学. 它是学习第7章"Pavelka 的逻辑学"的基础.

## 6.1 闭包算子与闭包系统

**定义 6.1.1** 设 $L$ 是完备格, $J:L\to L$ 是映射. 如果对一切 $x,y\in L$ 以下条件成立:

(i) $J$ 是保序的,即当 $x\leqslant y$ 时, $J(x)\leqslant J(y)$;

(ii) $J$ 是增值的,即 $x\leqslant J(x)$;

(iii) $J$ 是幂等的,即 $J(J(x))=J(x)$.

那么称 $J$ 为 $L$ 上的**闭包算子**.

**例 6.1.2** i) 设 $(X,\mathscr{U})$ 为拓扑空间, $L=\mathscr{P}(X)$. 对每个 $A\in L$,令 $J(A)=A^-$,即 $J(A)$ 为 $A$ 的闭包,则 $J:L\to L$ 是闭包算子.

ii) 设 $(L^X,\delta)$ 为 $L$-Fuzzy 拓扑空间,对每个 $A\in L^X$,令 $J(A)=A^-$,则 $J:L^X\to L^X$ 为闭包算子.

iii) 设 $(L,\eta)$ 为拓扑分子格, $\forall x\in L$,令 $J(x)=x^-$,则 $J:L\to L$ 为闭包算子.

iv) 设 $G$ 为群, $L=\mathscr{P}(G)$. 对每个 $A\in L$,令 $J(A)$ 为由 $A$ 生成的 $G$ 的子群(假定 $J(\varnothing)$ 为 $G$ 的单位 $e$),则 $J:\mathscr{P}(G)\to\mathscr{P}(G)$ 为闭包算子.

v) 设 $V_n$ 为 $n$ 维向量空间, $L=\mathscr{P}(V_n)$. 对每个 $E\in L$,令 $J(E)$ 为 $E$ 生成的子空间(约定 $J(\varnothing)$ 为零向量),则 $J:\mathscr{P}(V_n)\to\mathscr{P}(V_n)$ 是闭包算子.

vi) 设 $F$ 是经典命题演算中全体公式之集. $L=\mathscr{P}(F)$. 设 $X\in L$,即 $X\subset F$, $\mathscr{A}$ 是公理之集. 令

$$d^0(X)=X\cup\mathscr{A},$$

$$d^{k+1}(X)=d^k(X)\cup\{x\mid \exists y\in d^k(X)\text{ 使 } y\to x\in d^k(X)\}$$

$$(k=0,1,\cdots),$$

则

$$d^0(X) \subset d^1(X) \subset \cdots.$$

令

$$\mathscr{D}(X) = \bigcup_{k=0}^{\infty} d^k(X),$$

则 $\mathscr{D}: L \to L$ 是 $L$ 上的闭包算子. 事实上,易证 $\mathscr{D}$ 是保序的和增值的. 以下只需证 $\mathscr{D}(\mathscr{D}(X)) \leqslant \mathscr{D}(X)$,或 $d^n(\mathscr{D}(X)) \subset \mathscr{D}(X)\,(n=0,1,2,\cdots)$.

事实上,设 $x \in d^n(\mathscr{D}(X))$,以下只需用归纳法证明 $x \in \mathscr{D}(X)$. 若 $n=0$,则自然 $x \in \mathscr{D}(X)$. 今设 $\forall t \in d^k(\mathscr{D}(X))$, $t \in \mathscr{D}(X)$,并设 $x \in d^{k+1}(\mathscr{D}(X))$. 由 $d^{k+1}(\mathscr{D}(X))$ 的表达式知 $x \in d^k(\mathscr{D}(X))$,从而由归纳假设知 $x \in \mathscr{D}(X)$;或有 $y \in d^k(\mathscr{D}(X))$ 使 $y \to x \in d^k(\mathscr{D}(X))$,从而由归纳假设知 $y, y \to x \in \mathscr{D}(X)$. 这时有 $m$ 使 $y, y \to x \in d^m(X)$. 从而 $x \in d^{m+1}(X) \subset \mathscr{D}(X)$. 所以 $d^n(\mathscr{D}(X)) \subset \mathscr{D}(X)\,(n=0,1,2,\cdots)$.

**定义 6.1.3** 设 $L$ 是完备格,$\mathscr{C} \subset L$. 如果 $\mathscr{C}$ 对交运算封闭,则称 $\mathscr{C}$ 为 $L$ 中的**闭包系统**.

设 $\mathscr{C}$ 为 $L$ 中的闭包系统,则由空交等于 $L$ 的最大元 1 知 $1 \in \mathscr{C}$. 1 显然是 $\mathscr{C}$ 的最大元. 由格论知识知 $\mathscr{C}$ 自身构成一完备格,其中交运算与 $L$ 中的交运算相同,但并运算一般不同于 $L$ 中的并运算,即下述命题成立.

**命题 6.1.4** 设 $\mathscr{C}$ 是 $L$ 中的闭包系统,则

(i) $\mathscr{C}$ 是完备格,$1_L \in \mathscr{C}$,$1_L$ 是 $\mathscr{C}$ 的最大元.

(ii) 设 $A$ 是 $\mathscr{C}$ 的子集,则

$$\wedge_{\mathscr{C}} A = \wedge_L A.$$

(iii) 设 $A$ 是 $\mathscr{C}$ 的子集,则

$$\vee_{\mathscr{C}} A = \wedge_L \{x \in \mathscr{C} \mid \forall a \in A, x \geqslant a\}.$$

**例 6.1.5** 设 $\mathbf{R}$ 为实数空间,$L = \mathscr{P}(\mathbf{R})$,$\mathscr{C}$ 是 $\mathbf{R}$ 中的全体闭集之族,则 $\mathscr{C}$ 是 $L$ 中的闭包系统,其最大元为 $\mathbf{R}$,最小元为 $\varnothing$. 设 $A = \left\{\left[0, \frac{n}{n+1}\right] \,\middle|\, n = 1,2,\cdots\right\}$,则

$$\wedge_{\mathscr{C}} A = \wedge_L \left\{\left[0, \frac{n}{n+1}\right] \,\middle|\, n = 1,2,\cdots\right\} = \left[0, \frac{1}{2}\right] \in \mathscr{C},$$

$$\vee_{\mathscr{C}} A = \wedge_L \left\{B \in \mathscr{C} \mid B \supset \left[0, \frac{n}{n+1}\right], n = 1,2,\cdots\right\} = [0,1] \in \mathscr{C}$$

这里 $\vee_{\mathscr{C}} A \neq \vee_L A = [0,1)$.

设 $L$ 是完备格. 任取 $L$ 的一个子集 $C$,由 $C$ 就可制作出一个闭包算子. 任取 $L$ 的一个自映射 $j: L \to L$. 由 $j$ 就可制作出一个闭包系统. 事实上,我们有如下定理.

**定理 6.1.6** i) 设 $L$ 是完备的,$C \subset L$. 令

$$J_C(x) = \wedge \{y \in C \mid x \leqslant y\}, \quad x \in L, \tag{6.1.1}$$

则 $J_C: L \to L$ 是 $L$ 上的闭包算子,称为由 $C$ 生成的闭包算子,且

$$\text{当 } C_1 \subset C_2 \text{ 时}, \quad J_{C_2} \leqslant J_{C_1}. \tag{6.1.2}$$

ii) 设 $j:L \to L$ 是映射,令

$$\mathscr{C}_j = \{x \in L \mid \forall y \leqslant x, j(y) \leqslant x\}, \tag{6.1.3}$$

则 $\mathscr{C}_j$ 是 $L$ 中的闭包系统,称为由 $j$ 生成的闭包系统,且

$$\text{当 } j_1 \leqslant j_2 \text{ 时}, \quad \mathscr{C}_{j_2} \subset \mathscr{C}_{j_1}. \tag{6.1.4}$$

**证**　i) $J_C$ 显然是保序的和增值的,所以只需证

$$J_C(J_C(x)) \leqslant J_C(x). \tag{6.1.5}$$

事实上,任取 $y \in C$ 使 $y \geqslant x$,则由(6.1.1)式知 $y \geqslant J_C(x)$. 又

$$J_C(J_C(x)) = \wedge \{y \in C \mid y \geqslant J_C(x)\},$$

所以由 $y \geqslant J_C(x)$ 又得出 $y \geqslant J_C(J_C(x))$. 所以(6.1.5)式成立. 这就证明了 $J_C$ 是 $L$ 上的闭包算子. 又(6.1.2)式是(6.1.1)式的直接推论.

ii) 设 $X \subset \mathscr{C}_j$ 且 $a = \wedge X$. 不妨设 $X \neq \varnothing$. 任取 $x \in X$,由(6.1.3)式知当 $y \leqslant x$ 时 $j(y) \leqslant x$. 今设 $y \leqslant a$,则对每个 $x \in X$ 均有 $y \leqslant x$,从而 $j(y) \leqslant x$,那么 $j(y) \leqslant \wedge X = a$. 由(6.1.3)式,这表明 $a \in \mathscr{C}_j$. 所以 $\mathscr{C}_j$ 是 $L$ 中的闭包系统. 又(6.1.4)式是(6.1.3)式的直接推论.

**推论 6.1.7**　设 $j:L \to L$ 是保序增值映射,则

$$\mathscr{C}_j = \{x \in L \mid j(x) = x\}, \tag{6.1.6}$$

即由 $j$ 生成的闭包系统恰由 $j$ 的不动点组成. 特别是当 $j$ 是闭包算子时,由 $j$ 生成的闭包系统恰由 $j$ 的不动点组成.

**证**　设 $j(x) = x$,则当 $y \leqslant x$ 时 $j(y) \leqslant j(x) = x$,所以由(6.1.3)式知 $x \in \mathscr{C}_j$. 反过来,设 $x \in \mathscr{C}_j$,则当 $y \leqslant x$ 时 $j(y) \leqslant x$. 从而由 $j$ 增值以及 $x \leqslant x$ 知 $x \leqslant j(x) \leqslant x$,所以 $j(x) = x$,即(6.1.6)式成立.

**推论 6.1.8**　设 $C$ 是 $L$ 中的闭包系统,则

$$C = \{x \in L \mid J_C(x) = x\}, \tag{6.1.7}$$

即 $C$ 恰为由它所生成的闭包算子的不动点之集.

**证**　设 $x \in C$,则由(6.1.1)式得 $J_C(x) = x$. 反过来,设 $J_C(x) = x$,则由(6.1.1)式以及 $C$ 为闭包系统知 $J_C(x) \in C$,即 $x \in C$. 所以(6.1.7)式成立.

定理 6.1.6 和它的两个推论反映了闭包算子与闭包系统之间的密切关系. 以此为基础,可以自然地引入由 $L$ 的任一子集生成的闭包系统以及由 $L$ 的任一自映射生成的闭包算子的概念.

**定义 6.1.9**　设 $L$ 是完备格.

i) 设 $C \subset L$,则**由 $C$ 生成的闭包系统** $C^*$ 是 $L$ 中包含 $C$ 的最小的闭包系统.

ii) 设 $j:L \to L$ 是映射,则**由 $j$ 生成的闭包算子** $j^*$ 是 $L$ 上大于或等于 $j$ 的最小闭包算子.

下面的定理表明了定义 6.1.9 的合理性.

**定理 6.1.10** 设 $L$ 是完备格,则

i) 对任一 $C\subset L$,$L$ 中有一包含 $C$ 的最小闭包系统 $C^*$,且

$$C^* = \mathscr{C}_{J_C}. \tag{6.1.8}$$

ii) 对任一映射 $j:L\to L$,$L$ 上有一大于或等于 $j$ 的最小闭包算子 $j^*$,且

$$j^* = J_{\mathscr{C}_j}. \tag{6.1.9}$$

**证** i)设 $C\subset L$,则由定理6.1.6知 $J_C$ 是 $L$ 上的闭包算子. 由推论6.1.7中的(6.1.6)式得

$$\mathscr{C}_{J_C} = \{x\in L \mid J_C(x) = x\}. \tag{6.1.10}$$

设 $x\in C$,则由(6.1.1)式,$J_C(x)=x$. 所以由(6.1.10)式知 $C\subset \mathscr{C}_{J_C}$. 由定理6.1.6,$\mathscr{C}_{J_C}$是 $L$ 上的闭包系统. 设 $C_1$ 是 $L$ 中任一闭包系统且 $C\subset C_1$,则由定理6.1.6知 $J_{C_1}\leqslant J_C$. 设 $x\in \mathscr{C}_{J_C}$,则$J_C(x)=x$. 从而 $J_{C_1}(x)\leqslant x$. 又 $x\leqslant J_{C_1}(x)$,所以 $J_{C_1}(x)=x$. 由推论6.1.8中的(6.1.7)式知 $C_1=\{x\in L \mid J_{C_1}(x)=x\}$. 所以,当 $x\in \mathscr{C}_{J_C}$时有$x\in C_1$. 这就证明了 $\mathscr{C}_{J_C}$是 $L$ 中包含 $C$ 的最小闭包系统,即(6.1.8)式成立.

ii)设 $j:L\to L$ 为映射. 由(6.1.1)式得

$$J_{\mathscr{C}_j}(x) = \wedge\{y\in \mathscr{C}_j \mid x\leqslant y\}. \tag{6.1.11}$$

任取 $y\in \mathscr{C}_j$,设 $x\leqslant y$,则由(6.1.3)式知 $j(x)\leqslant y$. 从而由(6.1.11)式得 $j\leqslant J_{\mathscr{C}_j}$. 设 $j_1:L\to L$ 为闭包算子且 $j\leqslant j_1$. 则由(6.1.4)式得

$$\mathscr{C}_{j_1} \subset \mathscr{C}_j. \tag{6.1.12}$$

由(6.1.6)式知当 $y\in \mathscr{C}_{j_1}$ 时 $x\leqslant y$ 当且仅当 $j_1(x)\leqslant y$. 所以由(6.1.2)式以及(6.1.12)式并注意$j_1(j_1(x))=j_1(x)$,得

$$\begin{aligned} J_{\mathscr{C}_j}(x) &\leqslant J_{\mathscr{C}_{j_1}}(x) = \wedge\{y\in \mathscr{C}_{j_1} \mid x\leqslant y\} \\ &= \wedge\{y\in \mathscr{C}_{j_1} \mid j_1(x)\leqslant y\} = j_1(x). \end{aligned}$$

可见,$J_{\mathscr{C}_j}$是大于或等于 $j$ 的 $L$ 上的最小闭包算子.

**推论 6.1.11** (i) 设 $\mathscr{C}$是 $L$ 中的闭包系统,则

$$\mathscr{C}_{J_{\mathscr{C}}} = \mathscr{C}. \tag{6.1.13}$$

(ii) 设 $J:L\to L$ 是 $L$ 上的闭包算子,则

$$J_{\mathscr{C}_J} = J. \tag{6.1.14}$$

## 6.2 完备格上的逻辑学

### 6.2.1 抽象推理系统

**定义 6.2.1** 设 $L$ 是完备格,$\mathscr{D}$是 $L$ 上的闭包算子,则称$(L,\mathscr{D})$为**抽象推理系统**. 称 $\mathscr{D}$为**推理算子**. 这时 $L$ 中的元素叫**信息**. $\mathscr{D}$的不动点叫**理论**. 信息 $x$ 叫相

容的,若$\mathscr{D}(x)\neq 1$. 1 叫不相容理论. 又设 $\mathscr{D}(x)=\tau$,则 $x$ 叫理论 $\tau$ 的**一组公理**.

**例 6.2.2**　考虑例6.1.2 中的 vi). 这时 $L=\mathscr{P}(F)$ 由全体公式集的幂集组成. $L$ 的一个元素 $X$ 实际上是 $F$ 中的一组命题,称其为信息是恰当的. 设 $X\in L$,从 $X$ 与公理组出发利用 MP 规则进行推理,所得的结果 $\mathscr{D}(X)$ 是包含 $X$ 在内的一类公式. 这时以 $\tau$ 记$\mathscr{D}(X)$,$\tau$ 自然是 $\mathscr{D}$ 的不动点,称其为理论. 这时只要 $\mathscr{D}(X)\neq 1$,即 $\mathscr{D}(X)\neq F$,则称 $X$ 为相容的. 这与经典命题演算理论中的称谓相一致. 特别是当 $X$ 为空集时,理论 $\tau=\mathscr{D}(X)$ 由全部定理组成.

### 6.2.2　抽象语义

**定义 6.2.3**　设 $L$ 是完备格,$\mu$ 是 $L$ 的非空子集. 如果 $1\notin\mu$,则称 $\mu$ 为 $L$ 上的**抽象语义**. $\mu$ 中的元素叫**模型**. 设 $x$ 是信息,$m$ 是模型且 $x\leqslant m$,则称 $m$ 为 **$x$ 的模型**,记作$m\models x$. 这时称 $x$ 是**可满足的**. 可满足的信息的全体记作 $\mathrm{Sat}(\mu)$. 显然,

$$\mathrm{Sat}(\mu)=\downarrow\mu. \tag{6.2.1}$$

**定义 6.2.4**　设 $L$ 是完备格,$\mu$ 是 $L$ 上的抽象语义,$x$ 与 $y$ 是 $L$ 中的两个信息. 如果 $x$ 与 $y$ 有相同的模型集,即对每个 $m\in\mu$,$m\models x$ 当且仅当 $m\models y$,则称 $x$ 与 $y$ 是**逻辑等价**的.

**定义 6.2.5**　设 $L$ 是完备格,$\mu$ 是 $L$ 上的抽象语义. 令

$$\mathrm{Tau}(\mu)=\bigwedge\{m\mid m\in\mu\}, \tag{6.2.2}$$

称 $\mathrm{Tau}(\mu)$ 为关于 $\mu$ 的**重言式系统**.

**定义 6.2.6**　设 $L$ 是完备格,$\mu$ 是 $L$ 上的抽象语义,则由定理 6.1.6,$\mu$ 诱导出 $L$ 上的一个闭包算子 $J_\mu$. 我们把它记为 $C_\mu$ 或简记为 $C$. 由(6.1.1)式得

$$C_\mu(x)=\bigwedge\{m\in\mu\mid m\models x\},\quad x\in L. \tag{6.2.3}$$

称 $C_\mu$ 为 $\mu$ 导出的**逻辑结论算子**. $C_\mu(x)$ 叫 $x$ 的**语义逻辑闭包**.

由(6.2.2)式与(6.2.3)式知

$$\mathrm{Tau}(\mu)=C_\mu(0). \tag{6.2.4}$$

**例 6.2.7**　继续考虑例6.2.2. 设 $v:F\to\{0,1\}$ 是 $F$ 的一个赋值. 把 $v$ 看成 $F$ 的子集,记为 $m_v$,

$$m_v=\{A\in F\mid v(A)=1\}. \tag{6.2.5}$$

令

$$\mu=\{m_v\mid v:F\to\{0,1\}\text{ 是 }F\text{ 的赋值}\}, \tag{6.2.6}$$

$L=\mathscr{P}(F)$,则 $\mu$ 是 $L$ 上的抽象语义. 设 $X\in L$,即 $X$ 是 $F$ 中的一组公式,$m=m_v\in\mu$. 这时 $m\models X$ 表示 $X\subset m_v$,即对每个公式 $A\in X$ 均有 $v(A)=1$. 按经典命题演算的术语,这组公式 $X$ 自然叫做可满足的,同时 $v$ 或 $m_v$ 叫 $X$ 的一个模型. 又设 $X$ 与 $Y$ 是 $F$ 中的两组公式,如果 $X$ 与 $Y$ 的模型之集相同,即对任一赋值 $v$,

$$\forall A\in X,v(A)=1\quad\text{当且仅当}\quad\forall B\in Y,v(B)=1, \tag{6.2.7}$$

则称 $X$ 与 $Y$ 逻辑等价. 在经典命题演算理论中,经常考虑的是 $X$ 与 $Y$ 均为单公式集,比如,$X=\{A\}$,$Y=\{B\}$ 的情形,这时 $A$ 与 $B$ 叫逻辑等价的当且仅当对每个赋值 $v$,$v(A)=1$ 当且仅当 $v(B)=1$,也即当且仅当对每个赋值 $v$ 恒有 $v(A)=v(B)$.

再设 $X$ 是经典命题演算中的全部重言式之集,则显然

$$X=\cap\{m_v\mid v:F\to\{0,1\}\text{ 是 }F\text{ 的赋值}\}$$

成立. 这是(6.2.2)式的背景.

最后看一下(6.2.3)式在经典命题演算中的意义. 设 $X$ 是 $F$ 中的一组公式,$B\in F$. 如果对每个赋值 $v$,当 $\forall A\in X,v(A)=1$ 成立时有 $v(B)=1$,则称 $X$ 语义蕴涵 $B$.(有时记作 $X\models B$). 或令 $m=m_v$,则按定义 6.2.3 的记号,上述事实可写为:若 $m\models X$,则 $m\models\{B\}$. 因为这一事实对每个 $m=m_v$ 均成立,所以

$$B\in\cap\{m\in\mu\mid m\models X\}.$$

反之,当上式成立时若 $m\models X$,自然有 $m\models\{B\}$,即 $X$ 语义蕴涵 $B$. 可见,(6.2.3)式的直观解释是:$X$ 的逻辑闭包由一切可由 $X$ 语义蕴涵的公式组成.

### 6.2.3 抽象逻辑

**定义 6.2.8** **抽象逻辑**是一个三元组$(L,\mathscr{D},\mu)$,这里 $L$ 是一个完备格,$\mathscr{D}$是 $L$ 上的闭包算子,$\mu$ 是 $L$ 上的抽象语义且

$$\mathscr{D}=C_\mu. \tag{6.2.8}$$

**注 6.2.9** 抽象逻辑可看作是一种带有抽象语义的抽象推理系统,这里语义与推理系统具有由(6.2.8)式所反映的和谐性. 仍然用例 6.1.2vi)与例 6.2.2 的情形. 设 $X$ 是 $F$ 中的一组公式. 这时 $\mathscr{D}(X)$表示由 $X$ 与公理组出发运用 MP 规则进行推理所得的全部公式之集,而 $C_\mu(X)$则表示全部由 $X$ 语义蕴涵的公式之集. (6.2.8)式要求二者相等实际上是保证了抽象逻辑的完备性.

## 6.3 紧致性的新形式——连续性

考虑经典命题演算的情形,设 $X$ 是 $F$ 中的一组公式,用$\mathscr{D}(X)$表示全部可由 $X$ 与公理组推演出来的公式之集. 设 $A\in\mathscr{D}(X)$,则存在一个证明的有限序列

$$A_1,\quad\cdots,\quad A_n.$$

这里 $A_n=A$,$A_i(i\leqslant n)$或为公理,或为 $X$ 中的元素,或者有 $j,k<i$ 使 $A_i$ 是由 $A_j$ 和 $A_k$ 运用 MP 规则推出的结论. 令 $Y=\{A_1,\cdots,A_n\}\cap X$,则 $Y$ 有限. 显然,$A\in\mathscr{D}(Y)$. 这反映了形式推理过程天然地具有一种紧致性,即若 $A\in\mathscr{D}(X)$,则 $X$ 有有限子集 $Y$ 使 $A\in\mathscr{D}(Y)$. 再考虑语义闭包算子 $C=C_\mu$. 这时 $C(X)$由那种 $X$ 所语义蕴涵的公式组成. 设 $A\in C(X)$,即 $X\models A$,则由完备性定理知 $X\vdash A$,即$A\in\mathscr{D}(X)$. 由以上所述,$X$ 有有限子集 $Y$ 使 $A\in\mathscr{D}(Y)$,即 $Y\vdash A$,从而 $Y\models A$,即 $A\in C(Y)$. 这又从语

义方面反映了算子 $C$ 的一种紧性. 由此可见, $\mathscr{P}(F)$ 上的闭包算子的紧致性是把无限归结为有限的一种性质. 但是对一般的完备格 $L$ 而言,没有元素的有限性概念. 为将算子的紧致性概念一般化到格的情形,我们先看一个等价定理.

**定义 6.3.1**　设 $L$ 是幂集格 $\mathscr{P}(E)$,这里 $E$ 是任一非空集. 算子 $J:\mathscr{P}(E)\to\mathscr{P}(E)$ 叫紧致的,若对 $E$ 的任一子集 $X$

$$J(X)=\cup\{J(Y)\mid Y\text{是}X\text{的有限子集}\}.\tag{6.3.1}$$

$J$ 叫保定向并的,若对 $E$ 的任一定向子集族 $\mathscr{A}=\{A_i\mid i\in I\}$, 则

$$J(\bigcup_{i\in I}A_i)=\bigcup_{i\in I}J(A_i).\tag{6.3.2}$$

这里 $\mathscr{A}$ 是定向集族指对 $\mathscr{A}$ 中任二集 $A_i$ 与 $A_j$, $\mathscr{A}$ 中有集 $A_k$ 使 $A_i\subset A_k$, $A_j\subset A_k$.

**定理 6.3.2**　设算子 $J:\mathscr{P}(E)\to\mathscr{P}(E)$ 保序,即当 $P\subset Q\subset E$ 时 $J(P)\subset J(Q)$, 则 $J$ 是紧致的当且仅当 $J$ 是保定向并的.

**证**　设 $J$ 是紧致的. $\mathscr{A}=\{A_i\mid i\in I\}$ 是定向集族. 令 $X=\bigcup_{i\in I}A_i$. 因为 $J$ 保序, 所以

$$J(X)\supset\bigcup_{i\in I}J(A_i).\tag{6.3.3}$$

设 $B\in J(X)$. 由 $J$ 的紧致性知(6.3.1)式成立,从而 $X$ 有有限子集 $Y$ 使 $B\in J(Y)$. 设 $Y=\{y_1,\cdots,y_n\}$. 由 $y_k\in X=\bigcup_{i\in I}A_i$ 知有 $i_k\in I$ 使 $y_k\in A_{i_k}$. 因为 $\mathscr{A}$ 定向,有 $A_{i_0}$ 包含各 $A_{i_k}(k=1,\cdots,n)$,这时 $Y\subset A_{i_0}$. 所以 $B\in J(Y)\subset J(A_{i_0})\subset\bigcup_{i\in I}J(A_i)$. 这表明

$$J(X)\subset\bigcup_{i\in I}J(A_i).\tag{6.3.4}$$

由(6.3.3)式与(6.3.4)式知(6.3.2)式成立. 所以 $J$ 是保定向并的.

反过来,设 $J$ 是保定向并的. 因为 $X$ 的全部有限子集之族显然是定向集族,那么由(6.3.2)式即得(6.3.1)式,所以 $J$ 是紧致的.

由上述定理可见,可以回避有限性而在一般完备格的情形定义算子的紧致性. 不过我们给它起了另一个名字——连续性.

**定义 6.3.3**　设 $L$ 是完备格, $J:L\to L$ 是算子. 如果 $J$ 保定向并,则称 $J$ 为**连续算子**. 连续的闭包算子叫**代数闭包算子**. 这里 $L$ 的子集 $A=\{a_i\mid i\in I\}$ 叫定向的,指对 $A$ 的任二元素 $a_i$ 与 $a_j$, $A$ 中有元素 $a_k$ 使 $a_i\leqslant a_k$, $a_j\leqslant a_k$.

**注 6.3.4**　$L$ 中的定向集 $A$ 在保序算子 $J$ 作用下的像显然也是定向集. 如果对定向集 $A$ 而言,用符号 $\lim A$ 表示 $\vee A$,则连续性条件可写成 $J(\lim A)=\lim J(A)$. 这也表明了“连续”两字的由来.

闭包算子与闭包系统是密切相关的概念,与代数闭包算子概念相对应的则是代数闭包系统的概念.

**定义 6.3.5**　设 $L$ 是完备格, $\mathscr{C}\subset L$. $\mathscr{C}$ 叫做**归纳的**,如果 $\mathscr{C}$ 对定向并运算封闭. 归纳的闭包系统叫**代数闭包系统**.

**定理 6.3.6**　设 $L$ 是完备格.

i)设 $\mathscr{C}$是 $L$ 的闭包系统,则 $\mathscr{C}$是代数闭包系统当且仅当 $J_{\mathscr{C}}$是代数闭包算子.

ii)设 $J:L\to L$ 是闭包算子,则 $J$ 是代数闭包算子当且仅当 $\mathscr{C}_J$ 是代数闭包系统.

**证** i)设 $\mathscr{C}$是 $L$ 中的代数闭包系统,则由定理 6.1.6 知 $J_{\mathscr{C}}$是闭包算子,且由推论 6.1.8 知 $\mathscr{C}$由 $J_{\mathscr{C}}$的全体不动点组成,特别是 $\forall x\in L, J_{\mathscr{C}}(x)$作为 $J_{\mathscr{C}}$的不动点属于 $\mathscr{C}$. 设 $A=\{a_i \mid i\in I\}$是 $L$ 中的定向子集,则$\{J_{\mathscr{C}}(a_i)\mid i\in I\}$也是 $L$ 中的定向子集,且包含于 $\mathscr{C}$. 所以由 $\mathscr{C}$对定向并运算封闭知

$$m=\bigvee_{i\in I} J_{\mathscr{C}}(a_i)\in\mathscr{C},$$

从而 $m$ 又是 $J_{\mathscr{C}}$的不动点. 由此得

$$J_{\mathscr{C}}(\bigvee_{i\in I} a_i)\leqslant J_{\mathscr{C}}(m)=m=\bigvee_{i\in I} J_{\mathscr{C}}(a_i).$$

相反的不等式显然成立. 所以

$$J_{\mathscr{C}}(\bigvee_{i\in I} a_i)=\bigvee_{i\in I} J_{\mathscr{C}}(a_i),$$

即 $J_{\mathscr{C}}$保定向并. 所以 $J_{\mathscr{C}}$是代数闭包算子. 这就证明了定理中 i)的必要性部分.

ii)设 $J$ 是代数闭包算子,则由定理 6.1.6 知 $\mathscr{C}_J$ 是闭包系统,且由推论 6.1.7 知 $\mathscr{C}_J$ 是 $J$ 的全体不动点之集. 设 $A=\{a_i\mid i\in I\}$是 $\mathscr{C}_J$ 中的定向子集,则由 $J$ 保定向并以及每个 $a_i$ 都是 $J$ 的不动点($i\in I$)知

$$J(\bigvee_{i\in I} a_i)=\bigvee_{i\in I} J(a_i)=\bigvee_{i\in I} a_i.$$

这表明$\bigvee_{i\in I} a_i$ 是 $J$ 的不动点,从而$\bigvee_{i\in I} a_i\in\mathscr{C}_J$,即 $\mathscr{C}_J$ 对定向并封闭. 所以 $\mathscr{C}_J$ 是代数闭包系统. 这就证明了定理中 ii)的必要性部分. i)与 ii)的充分性由 $\mathscr{C}=\mathscr{C}_{J_{\mathscr{C}}}$与 $J=J_{\mathscr{C}_J}$即得.

由定理 6.3.6、推论 6.1.7 和定义 6.2.1 立即得出如下推论.

**推论 6.3.7** 设$(L,\mathscr{D})$是抽象推理系统,则 $\mathscr{D}$是代数(连续)闭包算子当且仅当全部理论之集是代数闭包系统.

如前所述,在经典命题演算中,推理算子是紧算子,也就是连续算子或代数闭包算子. 所以在抽象逻辑的情形,提出连续要求是自然的.

**定义 6.3.8** 设$(L,\mathscr{D},\mu)$是抽象逻辑. 当 $\mathscr{D}$是连续算子(等价地,代数闭包算子)时,称$(L,\mathscr{D},\mu)$为**连续的抽象逻辑**. 设$(L,\mathscr{D})$是抽象推理系统. 当 $\mathscr{D}$连续时称$(L,\mathscr{D})$为**连续的抽象推理系统**.

设$(L,\mathscr{D})$是连续的抽象推理系统,则 $\mathscr{D}$ 的不动点之集(也即全体理论之集)$\mathscr{C}_{\mathscr{D}}$ 是归纳的. $L$ 的最大元 1 自然是 $\mathscr{D}$的不动点,从 $\mathscr{C}_{\mathscr{D}}$ 中除去 1 之后所余之集是全体和谐理论组成之集 $\mathscr{C}_{\mathscr{D}}-\{1\}$. 它未必对定向并运算封闭,如果不限于考虑 $\mathscr{D}$的不动点(理论),而考虑全体和谐的信息之集,它自然也不必对定向并运算封闭. 这样我们就有三种不同的条件如下:

i)$\mathscr{C}_{\mathscr{D}}$ 是归纳的;

ii)$\mathscr{C}_{\mathscr{D}}-\{1\}$是归纳的;

iii) $\{x\in L\mid \mathscr{D}(x)\neq 1\}$ 是归纳的.

条件 i) 等价于说 $\mathscr{D}$ 是连续算子，条件 ii) 显然比条件 i) 要强. 事实上，设 $A=\{a_i\mid i\in I\}$ 是 $\mathscr{C}_{\mathscr{D}}$ 中的定向子集. 如果 $1\in A$，则 $\lim A=1$. 如果 $1\notin A$，则 $A\subset \mathscr{C}_{\mathscr{D}}-\{1\}$. 由条件 ii) 知 $\lim A\in \mathscr{C}_{\mathscr{D}}-\{1\}\subset \mathscr{C}_{\mathscr{D}}$. 所以条件 i) 成立.

条件 ii) 也比条件 iii) 要强. 事实上，设 $A=\{x_i\mid i\in I\}$ 是和谐信息组成的定向集，则 $\mathscr{D}(A)=\{\mathscr{D}(x_i)\mid i\in I\}$ 是 $\mathscr{C}_{\mathscr{D}}-\{1\}$ 中的定向集. 设条件 ii) 成立，则 $\lim\mathscr{D}(A)$ 是和谐理论. 显然，$\lim A\leqslant \lim\mathscr{D}(A)$. 所以 $\lim A$ 是和谐信息. 故条件 iii) 成立.

**定义 6.3.9**　设 $(L,\mathscr{D})$ 是抽象推理系统. 如果相容信息之集是归纳的，则称 $\mathscr{D}$ 为**逻辑紧致算子**. 设 $\mu$ 是 $L$ 上的抽象语义. 如果 $\mu$ 导出的逻辑结论算子 $C_\mu$ 是逻辑紧致的，即可满足的信息之集 $\mathrm{Sat}(\mu)$ 是归纳的，则称 $\mu$ 是**逻辑紧致的**.

**定理 6.3.10**　设 $(L,\mathscr{D})$ 是抽象推理系统，则以下条件等价：

i) $\mathscr{D}$ 是连续的并且是**逻辑紧致的**.

ii) $\mathscr{C}_{\mathscr{D}}-\{1\}$ 是归纳的，即相容理论之集是归纳的.

**证**　由定义 6.3.9 之前的那段讨论知 ii)⇒i). 以下只需证 i)⇒ii). 事实上，设 $\mathscr{D}$ 是连续的并且是逻辑紧致的. 设 $A=\{a_i\mid i\in I\}$ 是 $\mathscr{C}_{\mathscr{D}}-\{1\}$ 中的定向集. 因为 $A$ 中的元素都是 $\mathscr{D}$ 的不动点，所以 $\mathscr{D}(A)=A$. $A$ 自然是和谐信息之集. 由 $\mathscr{D}$ 的逻辑紧致性知 $\lim A\neq 1$. 又，$\mathscr{D}$ 是连续的，所以

$$\mathscr{D}(\lim A)=\lim\mathscr{D}(A)=\lim A.$$

这表明 $\lim A$ 是理论. 所以 $\mathscr{C}_{\mathscr{D}}-\{1\}$ 是归纳的.

在经典逻辑中，设 $\Gamma$ 是一组公式，如果有公式 $A$ 使得 $A$ 不能由 $\Gamma$ 推出，则称 $\Gamma$ 是和谐的. 那里有一个 Lindenbaum 定理说，如果 $\Gamma$ 是和谐公式集，则存在包含 $\Gamma$ 的极大和谐公式集. 这一定理可推广到格上逻辑学中来.

**定理 6.3.11**　设 $(L,\mathscr{D})$ 是抽象推理系统. 如果 $\mathscr{D}$ 是逻辑紧致的，则每个和谐信息都包含于(即 $\leqslant$)某极大和谐信息(必为理论)之中.

**证**　设 $a$ 是和谐信息，$A$ 是包含 $a$ 的和谐信息组成的链. 因为 $\mathscr{D}$ 是逻辑紧致的，$\vee A$ 是和谐信息，它自然是 $A$ 的上界. 所以由 Zorn 引理，存在大于或等于 $a$ 的极大和谐信息，记为 $\bar{a}$. 这时 $\mathscr{D}(\bar{a})\neq 1$，从而 $\mathscr{D}(\bar{a})$ 也是和谐信息，那么由 $\bar{a}$ 的极大性知 $\bar{a}=\mathscr{D}(\bar{a})$. 所以这个大于或等于 $a$ 的极大和谐信息是理论.

在本节最后我们再给出一个闭包算子 $\mathscr{D}$ 为逻辑紧致算子的充要条件.

**定义 6.3.12**　设 $L$ 是完备格，$x,y\in L$. 如果对 $L$ 中任一定向集 $A$，当 $\sup A\geqslant y$ 时有 $a\in A$ 使 $a\geqslant x$，则称 $x$ **Way-below** $y$，或 $x$ **双小于** $y$，记作 $x\ll y$. 如果 $\forall y\in L, y=\sup\{x\in L\mid x\ll y\}$，则称 $L$ 为连续格.

关于连续格理论可见文献[35]或[36].

**定义 6.3.13**　设 $L$ 是连续格，$\varphi\subset L$. 如果 $\forall y\in L, y=\sup\varphi(y)$，这里 $\varphi(y)=$

$\{x\in\varphi \mid x\ll y\}$,则称 $\varphi$ 在 $L$ 中是**连续稠密的**.

容易证明下面的命题.

**命题 6.3.14**　设 $\varphi$ 在连续格 $L$ 中连续稠密,则当 $\varphi$ 对有限并运算封闭时,$\forall y\in L,\varphi(y)$ 对有限并运算封闭,从而是定向集.

**命题 6.3.15**　设$(L,\mathscr{D})$是抽象推理系统,且 $L$ 是连续格,则下列条件等价:

i) $\mathscr{D}$是逻辑紧致算子;

ii) $L$ 中存在连续稠密子集 $\varphi$,$\varphi$ 对有限并封闭,对每个信息 $a$,$a$ 是相容的当且仅当 $\forall b\in\varphi(a)$,$b$ 是相容的.

**证**　设 i) 成立. $\forall y\in L$,令 $\varphi(y)=\{x\in L\mid x\ll y\}$,则由 $L$ 为连续格知 $y=\sup\varphi(y)$. 令 $\varphi=\cup\{\varphi(y)\mid y\in L\}$,则 $\varphi$ 在 $L$ 中连续稠密. 设 $a$ 是相容信息,则 $\forall b\in\varphi(a)$,由 $b\leqslant a$ 知 $b$ 是相容信息. 反过来,设 $\forall b\in\varphi(a)$,$b$ 是相容信息. 由 $\mathscr{D}$ 是逻辑紧致算子知相容信息之集是归纳的,且 $\varphi$ 显然对有限并运算封闭,所以 $a$ 作为定向集 $\varphi(a)$ 的并是相容信息. 这就证明了 i)$\Rightarrow$ii).

现在设 ii) 成立,$A=\{a_i\mid i\in I\}$ 是一族定向的相容信息,$a=\sup A$. 以下只需证 $\forall b\in\varphi(a)$,$b$ 是相容信息. 为此又只需证存在 $i\in I$ 使 $b\in\varphi(a_i)$,因为已知 $a_i$ 是相容信息. 事实上,设 $\varphi^*=\cup\{\varphi(a_i)\mid i\in I\}$,则 $\varphi^*\subset\varphi$. 任取 $x,y\in\varphi^*$,则有 $i,j\in I$ 使 $x\in\varphi(a_i)$,$y\in\varphi(a_j)$. 由 $A$ 为定向集知有 $k\in I$ 使 $a_i\leqslant a_k$,$a_j\leqslant a_k$,又 $x\ll a_i$,$y\ll a_j$,所以 $x\ll a_k$,$y\ll a_k$,从而由 $x\in\varphi$ 和 $y\in\varphi$ 知 $x\in\varphi(a_k)$,$y\in\varphi(a_k)$,那么由 $\varphi$ 对有限并封闭知有 $z\in\varphi(a_k)\subset\varphi^*$ 使 $x\leqslant z$,$y\leqslant z$. 这表明 $\varphi^*$ 是定向集. 又有

$$\sup\varphi^*=\sup\{\sup\varphi(a_i)\mid i\in I\}=\sup\{a_i\mid i\in I\}=a.$$

所以由 $b\ll a$ 知有 $i\in I$ 以及 $x\in\varphi(a_i)$ 使 $b\leqslant x$. 这时自然 $b\ll a_i$,故由 $b\in\varphi$ 知$b\in\varphi(a_i)$.

## 6.4　逐步推理

考虑经典命题演算的情形. 设 $\Gamma$ 是一组公式,用 $J(\Gamma)$表示由 $\Gamma$ 中的公式运用一次 MP 规则所得的全部公式之集. $J$ 自然是保序的. 又设$\{\Gamma_i\mid i\in I\}$是定向集族,$\Gamma_0=\bigcup_{i\in I}\Gamma_i$,则易证 $J(\Gamma_0)=\bigcup_{i\in I}J(\Gamma_i)$. 所以 $J$ 是连续算子. 注意,$J$ 不必是增值算子,即 $\Gamma\subset J(\Gamma)$不必成立,$\mathscr{A}\subset J(\Gamma)$自然也不必成立,这里 $\mathscr{A}$ 表示公理之集. 令 $H(\Gamma)=\mathscr{A}\cup\Gamma\cup J(\Gamma)$,

$$H^{n+1}(\Gamma)=H(H^n(\Gamma))\quad(n=0,1,2,\cdots).$$

这里 $H^{\circ}(\Gamma)=\Gamma$,则可证明

$$D(\Gamma)=\bigcup_{n=1}^{\infty}H^n(\Gamma).$$

这里

$$D(\Gamma) = \{A \mid \Gamma \vdash A\}.$$

$D$ 自然是闭包算子,是由 $H$ 生成的闭包算子. 现在把上述事实推广到完备格 $L$ 上来.

**定义 6.4.1**　设 $L$ 是完备格,$a \in L$,$J: L \to L$ 是连续算子,则称$(L,J,a)$为**逐步推理系统**. 令 $H: L \to L$ 为

$$H(x) = J(x) \vee x \vee a. \tag{6.4.1}$$

令 $\mathscr{D} = H^*$ 为由 $H$ 生成的闭包算子. 称$(L, \mathscr{D})$为**由$(L,J,a)$导出的抽象推理系统**.

**定理 6.4.2**　设$(L,J,a)$为逐步推理系统,$(L, \mathscr{D})$是由$(L,J,a)$导出的抽象推理系统,则

i) $H$ 是连续的保序增值算子,这里 $H$ 由(6.4.1)式定义.

ii) $\mathscr{D}(x) = \vee\{H^n(x) \mid n = 1,2,\cdots\}$,即 $H^* = \bigvee_{n=1}^{\infty} H^n$.

iii) $\tau$ 是$(L, \mathscr{D})$中的理论当且仅当

$$J(\tau) \vee a \leqslant \tau. \tag{6.4.2}$$

**证**　i) 由 $J$ 保序以及(6.4.1)式知 $H$ 是保序增值算子,设 $A$ 是 $L$ 中的定向子集,则由 $J$ 连续知

$$\begin{aligned} H(\lim A) &= J(\lim A) \vee \lim A \vee a \\ &= \lim J(A) \vee \lim A \vee a \\ &= [\vee J(A)] \vee [\vee A] \vee a \\ &= \vee \{J(x) \vee x \vee a \mid x \in A\} \\ &= \vee \{H(x) \mid x \in A\} \\ &= \lim H(A). \end{aligned}$$

所以 $H$ 连续.

ii) 由 $H^*$ 为闭包算子知 $H^*$ 是幂等的,所以由 $H \leqslant H^*$ 得

$$H^n \leqslant (H^*)^n = H^* \quad (n = 1,2,\cdots).$$

从而有

$$\bigvee_{n=1}^{\infty} H^n \leqslant H^*.$$

以下只需证相反的不等式. 由 $H$ 保定向并以及

$$H^n \leqslant H^{n+1} \quad (n = 1,2,\cdots)$$

知

$$H\left(\bigvee_{n=1}^{\infty} H^n\right) = \bigvee_{n=1}^{\infty} H^{n+1} = \bigvee_{n=1}^{\infty} H^n.$$

从而

$$H^m\left(\bigvee_{n=1}^{\infty} H^n\right) = \bigvee_{n=1}^{\infty} H^n \quad (m = 1,2,\cdots).$$

由此即得

$$\left(\bigvee_{n=1}^{\infty} H^n\right)\left(\bigvee_{n=1}^{\infty} H^n\right) = \bigvee_{n=1}^{\infty} H^n.$$

这就证明了 $\bigvee_{n=1}^{\infty} H^n$ 的幂等性. 它显然是保序增值的,所以是包含 $H$ 的闭包算子. 从而有

$$H^* \leqslant \bigvee_{n=1}^{\infty} H^n.$$

iii) 设 $\tau$ 是理论,则 $H^*(\tau) = \tau$,从而由 $J(\tau) \vee a \leqslant H(\tau)$ 知(6.4.2)式成立. 反之,设(6.4.2)式成立,则 $H(\tau) = J(\tau) \vee \tau \vee a = \tau$. 那么易证

$$H^n(\tau) = \tau \quad (n = 1, 2, \cdots),$$

从而

$$H^*(\tau) = \left(\bigvee_{n=1}^{\infty} H^n\right)(\tau) = \bigvee_{n=1}^{\infty} H^n(\tau) = \tau.$$

所以 $\tau$ 是理论.

## 6.5 抽象模糊逻辑

设 $L$ 是 Fuzzy 格,即具有逆序对合对应$'$: $L \to L$ 的**分子格**(即完备的完全分配格),$X$ 是非空集,则 $X$ 上的 $L$-Fuzzy 集 $A$ 是一个映射 $A: X \to L$. $X$ 上的 $L$-Fuzzy 集的全体记作 $L^X$. 设 $A, A_i \in L^X (i \in I)$,设 $\bigvee_{i \in I} A_i$, $\bigwedge_{i \in I} A_i$ 与 $\neg A$ 分别定义为

$$\left(\bigvee_{i \in I} A_i\right)(x) = \bigvee_{i \in I} A_i(x), \qquad x \in X,$$

$$\left(\bigwedge_{i \in I} A_i\right)(x) = \bigwedge_{i \in I} A_i(x), \qquad x \in X,$$

与

$$\neg A(x) = (A(x))', \qquad x \in X.$$

$\neg A$ 也常简写为 $A'$. 显然,$L^X$ 也是 Fuzzy 格. 本节中就是要讨论以 $L^X$ 取代前几节中 $L$ 的位置而得的抽象逻辑理论,即抽象模糊逻辑理论.

### 6.5.1 基本概念

设 $L$ 是 Fuzzy 格,$F$ 是非空集,称 $F$ 中元素为**公式**.

**定义 6.5.1** 设 $\mathscr{D}$ 是 $L^F$ 上的闭包算子,则称 $(L^F, \mathscr{D})$ 为 **$F$ 上的抽象 $L$-模糊推理系统**,简称为 **$F$ 上的 $L$-Fuzzy 推理系统**. 设 $\mu$ 是 $L^F$ 的非空子集,且 $F$ 上的最大模糊集 $1_F$ 不属于 $\mu$,则称 $\mu$ 为 **$F$ 上的抽象 $L$-模糊语义**,简称为 **$F$ 上的 $L$-Fuzzy 语义**. $\mu$ 的元素叫 **$L$-Fuzzy 模型**. $L^F$ 中的元仍叫做信息,有时也叫做**初始赋值**.

**定义 6.5.2** 设 $\mu$ 是 $F$ 上的 $L$-Fuzzy 语义. 令

$$\mathrm{Tau}(\mu) = \bigwedge \{m \in L^F \mid m \in \mu\}, \tag{6.5.1}$$

称 $\mathrm{Tau}(\mu)$ 为 ***L*-Fuzzy 重言式**. 设 $A\in F$,称 $\mathrm{Tau}(\mu)(A)$ 为 $A$ 的**重言度**. 令

$$\mathrm{Contr}(\mu)=\wedge\{m'\in L^F\mid m\in\mu\},\tag{6.5.2}$$

称 $\mathrm{Contr}(\mu)$ 为 ***L*-Fuzzy 矛盾式**. 设 $A\in F$,称 $\mathrm{Contr}(\mu)(A)$ 为 $A$ 的**矛盾度**. 称重言度(矛盾度)等于 1 的公式 $A$ 为**重言式(矛盾式)**.

由 De Morgan 对偶律以及(6.5.1)式与(6.5.2)式立即得出

$$\wedge\mu=\wedge\mu''\leqslant\vee\mu''=(\wedge\mu')'$$

$$\mathrm{Tau}(\mu)\leqslant(\mathrm{Contr}(\mu))',\mathrm{Contr}(\mu)\leqslant(\mathrm{Tau}(\mu))'.\tag{6.5.3}$$

由(6.5.3)式易证重言式的矛盾度等于 0,矛盾式的重言度等于 0. 但逆命题均不成立.

**例 6.5.3**　令 $L=F=[0,1]$,

$$\mu=\{f:[0,1]\to[0,1]\mid f(x)\text{ 不恒等于 }1\};$$

则

$$\mathrm{Tau}(\mu)(x)=0,\ x\in[0,1],$$
$$\mathrm{Contr}(\mu)(x)=0,\ x\in[0,1].$$

以公式$\frac{1}{2}$为例,$\frac{1}{2}$的矛盾度等于 0,但$\frac{1}{2}$不是重言式. 又$\frac{1}{2}$的重言度等于 0,但$\frac{1}{2}$不是矛盾式.

### 6.5.2　模糊算子的紧致性

对于 $L$-Fuzzy 集而言,可以引入有限集概念.

**定义 6.5.4**　设 $f\in L^F$,且

$$\mathrm{supp}f=\{x\in F\mid f(x)>0\}$$

为 $F$ 的有限子集,则称 $f$ 为**有限 *L*-Fuzzy 集**,简称**有限集**.

既然有了有限概念,就可方便地引入紧致性.

**定义 6.5.5**　设 $J:L^F\to L^F$ 为算子. 如果对每个 $s\in L^F$,

$$J(s)=\vee\{J(t)\mid t\leqslant s,t\text{ 有限}\},\tag{6.5.4}$$

则称 $J$ 为**紧算子**. 如果 $J$ 保序,并且对每个 $s\in L^F$ 以及每个 $x\in F$,存在相应的有限集 $t$ 使 $t\leqslant s$ 且

$$J(s)(x)=J(t)(x),\tag{6.5.5}$$

则称 $J$ 为**点紧算子**.

**命题 6.5.6**　点紧算子是紧算子.

**证**　设 $J$ 是点紧算子,$s\in L^F$. $\forall x\in F$,取有限集 $t_x$ 使 $t_x\leqslant s$ 且 $J(s)(x)=J(t_x)(x)$,则由 $\forall x\in F$ 均有 $t_x\leqslant s$ 以及 $J$ 保序知

$$J(s)=\vee\{J(t_x)\mid x\in F\}\leqslant\vee\{J(t)\mid t\leqslant s,t\text{ 有限}\}.$$

相反的不等式显然成立,所以

$$J(s) = \bigvee \{J(t) \mid t \leqslant s, t \text{有限}\},$$

即 $J$ 是紧算子.

**命题 6.5.7** 连续算子是紧算子.

**证** 设 $s \in L^F$. 令 $\mathscr{A} = \{t \in L^F \mid t \leqslant s, t \text{有限}\}$,则 $\mathscr{A}$ 是 $L^F$ 中的定向集族. 显然, $s = \bigvee \mathscr{A}$. 由 $J$ 的连续性得

$$J(s) = \bigvee \{J(t) \mid t \leqslant s, t \text{有限}\},$$

所以 $J$ 是紧算子.

请读者举例说明以上两个命题的逆命题均不成立.

设 $L$ 是 Fuzzy 格,则 $L^F$ 也是 Fuzzy 格. 由于分子格是连续格[35],可以考虑命题 6.3.15 中的 $L$ 为 $L^F$ 的情形. 设 $\varphi$ 是 $L^F$ 中的有限集的全体所成之族,则由 $L^F$ 为连续格以及 $F$ 的任一子集均可表示为其有限子集之并可知 $\varphi$ 在 $L^F$ 中是连续稠密的. 所以由命题6.3.15立即得出下面的命题.

**命题 6.5.8** 设$(L^F, \mathscr{D})$为 $F$ 上的 $L$-Fuzzy 推理系统,则下列条件等价:

i) $\mathscr{D}$是逻辑紧致算子;

ii)对 $L^F$ 中每个信息 $v$,$v$ 是相容的当且仅当 $\forall u \in \varphi(v)$,$u$ 是相容的.

设$\mu$ 是 $F$ 上的 $L$-Fuzzy 语义,则 $C = C_\mu$ 是 $F$ 上的 $L$-Fuzzy 闭包算子. 这时对每个$v \in L^F$,$v$ 关于 $C$ 是相容的当且仅当 $v$ 关于$\mu$ 是可满足的. 所以由定义 6.3.9 以及命题6.5.8得如下命题.

**命题 6.5.9** 设 $\mu$ 是 $F$ 上的 $L$-Fuzzy 语义,则下列条件等价:

i)$\mu$ 是逻辑紧致的;

ii)对 $L^F$ 中每个信息 $v$,$v$ 是可满足的当且仅当 $\forall u \in \varphi(v)$,$u$ 是可满足的.

## 6.6 公式集 $F$ 上的非运算

在6.5 节中出现的公式集 $F$ 是抽象的,即 $F$ 是普通的非空集,$F$ 上没有任何运算. 本节中在假定 $F$ 上有一个抽象的非运算的情况下讨论若干有关的性质.

**定义 6.6.1** 设 $F$ 是非空集,$\mu$ 是 $F$ 上的 $L$-Fuzzy 语义. 如果 $F$ 上有一元运算 $\neg: F \to F$使得对$\mu$ 中的任一模型 $m$ 和 $F$ 中的任一公式 $\alpha$,恒有

$$m(\alpha) \leqslant (m(\neg \alpha))' \tag{6.6.1}$$

成立,则称$\neg$ 是 **$F$ 上关于$\mu$ 而言的非运算**.

**例 6.6.2** 设 $F(S)$是由 $S$ 生成的$(\neg, \vee, \to)$型自由代数,$\Omega$ 是一切 $R_0$ 赋值 $v: F(S) \to [0,1]$组成的$[0,1]^F$ 上的 Fuzzy 语义,则$\neg$ 是 $F$ 上关于 $\Omega$ 而言的非运算. 因为这时对 $F$ 中每个公式 $\alpha$,恒有 $v(\alpha) = (v(\neg \alpha))'$.

**命题 6.6.3** 设 $F$ 上具有关于 $\mu$ 而言的非运算$\neg$,$v$ 是可满足的信息,$m \vDash v$,则

$$v \leqslant C(v) \leqslant m \leqslant C(v)^{\perp} \leqslant v^{\perp}. \tag{6.6.2}$$

这里 $v^{\perp}(\alpha)=(v(\neg\alpha))'$, $C(v)^{\perp}(\alpha)=(C(v)(\neg\alpha))'(\alpha\in F)$, 且 $C=C_{\mu}$.

**证**　由 $m\vDash v$ 知 $v\leqslant C(v)\leqslant m$. 又由 $C(v)(\neg\alpha)\leqslant m(\neg\alpha)$ 与(6.6.1)式得

$$\begin{aligned} m(\alpha) &\leqslant (m(\neg\alpha))' \\ &\leqslant (C(v)(\neg\alpha))' \\ &= C(v)^{\perp}(\alpha), \quad \alpha\in F. \end{aligned}$$

所以 $m\leqslant C(v)^{\perp}$. 又由 $v(\neg\alpha)\leqslant C(v)(\neg\alpha)$ 得

$$\begin{aligned} C(v)^{\perp}(\alpha) &= (C(v)(\neg\alpha))' \\ &\leqslant (v(\neg\alpha))' \\ &= v^{\perp}(\alpha), \quad \alpha\in F. \end{aligned}$$

这就证明了(6.6.2)式.

**注 6.6.4**　$F$ 上的 $L$-Fuzzy 推理系统当 $L=\{0,1\}$ 时就成为经典的二值推理系统. 这时 $L^F$ 中的一个信息 $v$ 实际上是 $F$ 的一个子集 $\Gamma$. 设 $C$ 是 $2^F$ 上的由语义 $\mu$(即赋值集)导出的闭包算子, $\alpha$ 是 $F$ 中任一公式, 则 $\alpha$ 是或不是 $\Gamma$ 的推论取决于 $C(\Gamma)(\alpha)=1$ 或 0. 以此为背景, 我们可以把 $C(v)(\alpha)$ 理解为 $\alpha$ 是 $v$ 的结论的程度. 而 $C(v)^{\perp}(\alpha)=1-C(v)(\neg\alpha)$ 可以理解为 $\neg\alpha$ 不是 $v$ 的结论的程度, 或者 $\alpha$ 与 $v$ 相容的程度, 即

$C(v)(\alpha)$ 表示 $\alpha$ 是 $v$ 的结论的程度,

$C(v)^{\perp}(\alpha)$ 表示 $\alpha$ 与 $v$ 相容的程度.

**定义 6.6.5**　设 $v$ 是 $L^F$ 中的信息, $\neg: F\to F$ 是 $F$ 上关于 $\mu$ 的非运算, $\alpha\in F$, $C=C_{\mu}$. 如果 $C(v)(\alpha)=C(v)^{\perp}(\alpha)$, 则称 **$\alpha$ 在 $v$ 中可判定**. 当 $F$ 中的每个公式都在 $v$ 中可判定时, 称 $v$ 是**完全的**, 或**平衡的**. 当 $\mu$ 中的每个模型 $m$ 都是完全的时, 称 $\mu$ 是**平衡的**.

**例 6.6.6**　例 6.6.2 中的 $\Omega$ 是平衡的.

**命题 6.6.7**　设 $F$ 上有关于 $\mu$ 的非运算, 这里 $\mu$ 是平衡的, 则对每个公式 $\alpha$ 恒有

$$\mathrm{Contr}(\mu)(\alpha)=\mathrm{Tau}(\mu)(\neg\alpha).$$

**证**

$$\begin{aligned} \mathrm{Contr}(\mu)(\alpha) &= \wedge\{m'(\alpha)\mid m\in\mu\} \\ &= \wedge\{m(\neg\alpha)\mid m\in\mu\} \\ &= \mathrm{Tau}(\mu)(\neg\alpha). \end{aligned}$$

# 第 7 章　Pavelka 的逻辑学

捷克学者 Pavelka 于 1979 年以“On Fuzzy Logic”为题发表了三篇有影响的文章[20~22]，为模糊命题演算提供了一种比较完整的理论框架. 从整体上看，这一工作是著名逻辑学家 Tarski 关于逻辑、语义与元数学思想[37]的具体化与发挥，而这一工作的特点则在于将公式乃至公理的真度程度化，同时也将推理规则以及证明过程程度化，这种程度化以在格中取值为标志，所得结果是系统而漂亮的. 在第 6 章中我们曾介绍过完备格上的逻辑学，那里的框架更广泛得多. 我们知道，一种理论越是广泛，所能得到的具体结果就越少. 从这一意义上看，本章的内容比第 6 章要丰富得多，不过第 6 章的基本思想也是 Tarski 观点的一种抽象化实现，所以对理解本章的内容有直接的帮助.

## 7.1　Pavelka 逻辑的基本理论

### 7.1.1　Tarski 的观点

在逻辑学中，人们把各种具体的命题抽象化和形式化为符号，如 $A$, $B$, $C$ 等，并可利用逻辑连接词对这些代表命题的符号(公式)进行运算以得出更多的公式，如 $A\vee B$, $B\to C$ 等. 一个基本的问题是：给定了一组公式 $X$，从 $X$ 出发可以“推出”哪些公式？这里的“推出”有两种途径可循：一种是事先指定若干个公式为公理，再确定一些推理规则，那么由 $X$ 与公理一道通过推理规则所得的公式就算作是可由 $X$ 推出的公式. 6.4 节中介绍的逐步推理就是这种思想的抽象化实现. 另一种是借助于外来的评价标准，如取一个偏序集 $P$，并在其中指定一个或一些好的元素，记此集为 $D$. 那么就可以利用赋值的方法来判断一个公式 $\gamma$ 是否可由那一组公式 $X$ 推出了. 具体地讲，如果对每个赋值 $T$，只要 $T$ 把 $X$ 中的公式都映射为好值(即属于 $D$)，那么 $T$ 就把 $\gamma$ 映射为好值. 这时就说 $\gamma$ 可由 $X$ 推出. 这就是 Tarski 的基本思想. 对于前一种基于公理与推理规则的途径，我们以 $X\vdash\gamma$ 表示公式 $\gamma$ 可由那组公式 $X$ 推出，并称 $\gamma$ 是 $X$ 的语法上的结论，把这种 $\gamma$ 的全体称为 $X$ 的语法闭包. 特别当 $X$ 是空集时，其语法闭包由那种公式组成，它们可以由公理出发通过推理规则而得到，这种公式叫做定理. 对于后一种基于赋值的途径，我们以 $X\models\gamma$ 表示公式 $\gamma$ 可由 $X$ 推出，并称 $\gamma$ 是 $X$ 的语义上的结论，把这种 $\gamma$ 的全体称为 $X$ 的语义闭包. 特别是当 $X$ 是空集时，其语义闭包由那种公式组成，它们在任一赋值

之下的像都是好值，这种公式叫 $D$-重言式.

现在把以上所说的内容符号化. 设 $F$ 是全体公式之集，$X\subset F$，$A\subset F$，$A$ 是公理之集，$\mathscr{R}$ 是推理规则之集，$P$ 是偏序集，$D\subset P$，$\mathscr{S}\subset P^F$，即 $\mathscr{S}$是从 $F$ 到 $P$ 的一族映射，$\mathscr{S}$ 的成员 $T$ 叫赋值，$\gamma\in F$. 那么

i) $X\vdash\gamma$ 指 $\gamma$ 可由 $A\cup X$ 运用 $\mathscr{R}$ 中的规则而推出，$X$ 的语法闭包

$$\mathrm{Con}(\text{语法})(X)=\{\gamma\in F\mid X\vdash\gamma\}.$$

Con(语法)($\varnothing$)是全体定理之集.

ii) $X\models\gamma$ 指对每个 $T\in\mathscr{S}$，当 $T(X)\subset D$ 时，$T(\gamma)\in D$，$X$ 的语义闭包

$$\mathrm{Con}(\text{语义})(X)=\{\gamma\in F\mid X\models\gamma\}.$$

Con(语义)($\varnothing$)中的公式叫 $D$-重言式.

语义闭包概念是容易程度化的. 比如，设 $P$ 是完备格，这时 $\mathscr{S}$ 可看成是论域为 $F$ 的 $P$-Fuzzy 集族，$\mathscr{S}$ 中的每个赋值 $T$ 可看成是 $F$ 上的一个 $P$-Fuzzy 集. 如果再取 $D=\{1\}$，则可定义

$$\mathrm{Con}(\text{语义})(X)=\wedge\{T\in\mathscr{S}\mid T\geqslant X\}.$$

这里我们把 $F$ 的子集 $X$ 等同于它的特征函数 $\chi_X$. 这时，Con(语义)($X$)实际上已成为 $F$ 上的一个 $P$-Fuzzy 集. 对任一公式 $\gamma\in F$，

$$\mathrm{Con}(\text{语义})(X)(\gamma)=\wedge\{T(\gamma)\mid T\in\mathscr{S},T\geqslant X\}$$

可看成是 $\gamma$ 可由 $X$ 语义推出的程度，这时 $X\models\gamma$ 等价于说 $\gamma$ 可由 $X$ 语义推出的程度等于 1. Pavelka 正是基于这种思想而建立起他的逻辑学的.

### 7.1.2　$L$-语义结论算子

设 $F$ 是非空集，$L$ 是完备格(不必带有逆序对合对应)，则称 $L^F$ 中的元 $X$ 为 $L$-集，这时 $X$ 实际上是一个映射 $X:F\to L$. 当 $L$ 是 Fuzzy 格时，$X$ 就是 $L$-Fuzzy 集. 对一般的完备格 $L$，也可称 $X$ 为 $L$-Fuzzy 集，这里 $L$-集的称呼更简单一些.

**定义 7.1.1**　设 $F$ 是非空集，$L$ 是完备格，映射 $\mathrm{Con}:L^F\to L^F$ 叫 $F$ 上的 **$L$-结论算子**，是指 Con 是 $L^F$ 上的保序、增值和幂等的算子.

如果把 $L^F$ 看成一个完备格 $L^*$，则 $F$ 上的 $L$-结论算子就是定义 6.1.1 中 $L^*$ 上的闭包算子.

**定义 7.1.2**　设 $\mathrm{Con}:L^F\to L^F$ 是 $L$-结论算子，$X$ 是 $F$ 上的 $L$-集. 如果 $\mathrm{Con}(X)\neq 1$，则称 $X$ **关于 Con 是相容的**，这里 1 指 $F$ 上的最大 $L$-集，即在 $F$ 上恒取值 1 的 $L$-集.

上述相容性定义与定义 6.2.1 中的相容性定义是相一致的.

**命题 7.1.3**　设 $\mathrm{Con}:L^F\to L^F$ 是 $F$ 上的 $L$-结论算子，$X,Y,Z\in L^F$，则

i) 当 $X\leqslant\mathrm{Con}(Y)$，$Y\leqslant\mathrm{Con}(Z)$ 时，$X\leqslant\mathrm{Con}(Z)$.

ii) $\mathrm{Con}(X \vee Y) = \mathrm{Con}(X \vee \mathrm{Con}(Y))$

$= \mathrm{Con}(\mathrm{Con}(X) \vee \mathrm{Con}(Y))$.

**证** i)是显然的. 以下证 ii)，而且只需证

$$\mathrm{Con}(X \vee Y) \geqslant \mathrm{Con}(\mathrm{Con}(X) \vee \mathrm{Con}(Y)). \tag{7.1.1}$$

事实上，由 Con 的保序性得

$$\mathrm{Con}(X \vee Y) \geqslant \mathrm{Con}(X) \vee \mathrm{Con}(Y).$$

两边同用 Con 作用并注意 Con 是幂等的即得(7.1.1)式.

**定义 7.1.4** 设 $\mathscr{S} \subset L^F$，即 $\mathscr{S}$ 是 $F$ 上的一族 $L$-集，且 $1 \notin \mathscr{S}$，则称 $\mathscr{S}$ 为 ***F* 上的 *L*-语义**.

**命题 7.1.5** 设 $\mathscr{S}$ 是 $F$ 上的 $L$-语义，定义 $\mathrm{Con}_{\mathscr{S}}: L^F \to L^F$ 如下：

$$\mathrm{Con}_{\mathscr{S}}(X) = \wedge \{T \in \mathscr{S} \mid T \geqslant X\}, \quad X \in L^F, \tag{7.1.2}$$

则 $\mathrm{Con}_{\mathscr{S}}$ 是 $F$ 上的 $L$-结论算子，称为由 $\mathscr{S}$ 导出的 ***L*-语义结论算子**.

**证** $\mathrm{Con}_{\mathscr{S}}$ 显然是保序和增值的，这里像以前一样，规定空交等于最大元 1，那么当 $\mathscr{S}$ 中没有大于或等于 $X$ 的元时，$\mathrm{Con}_{\mathscr{S}}(X) = 1$. 由(7.1.2)式可见，$\forall T \in \mathscr{S}$，

$$T \geqslant X \quad \text{当且仅当 } T \geqslant \mathrm{Con}_{\mathscr{S}}(X), \tag{7.1.3}$$

由(7.1.3)式就推得 $\mathrm{Con}_{\mathscr{S}}$ 的幂等性，所以它是 $F$ 上的 $L$-结论算子.

为方便起见，以下常省去变量外面的括号，如 $\mathrm{Con}(X)$ 可简写为 $\mathrm{Con}X$，$(\mathrm{Con}(X))(y)$ 可简写为 $(\mathrm{Con}X)y$ 等.

**定义 7.1.6** 设 $\mathrm{Con}_{\mathscr{S}}$ 是 $F$ 上的 $L$-语义结论算子，$X \in L^F$，$x \in F$，$a \in L$. 如果

$$(\mathrm{Con}_{\mathscr{S}}X)x \geqslant a,$$

则称 $x$ 为 **$X$ 关于语义 $\mathscr{S}$ 而言的 $a$ 结论**，简称 $x$ 为 **$X$ 的 $a$ 语义结论**，记作 $(\mathscr{S}, a)X \models x$. 这样就有

$$(\mathscr{S}, a)X \models x \quad \text{当且仅当} \quad (\mathrm{Con}_{\mathscr{S}}X)x \geqslant a. \tag{7.1.4}$$

特别是当 $a = 1$ 时，称 $x$ 为 **$X$ 的语义结论**.

下面的命题是自明的.

**命题 7.1.7** 设 $X \in L^F$，$x \in F$，则

$$(\mathrm{Con}_{\mathscr{S}}X)x = \vee \{a \in L \mid (\mathscr{S}, a)X \models x\}. \tag{7.1.5}$$

### 7.1.3 *L*-语法结论算子

**定义 7.1.8** 设 $F$ 是非空集，$L$ 是完备格. $F$ 上的 ***n* 元 *L*-推理规则 *r***，简称 ***L*-规则 *r***，是指一个序对 $r = \langle r', r'' \rangle$，这里

i) $r'$ 是 $F$ 上的部分 $n$ 元运算，即 $r'$ 为映射

$$r': Dr' \to F, \quad Dr' \subset F^n.$$

这里 $Dr'$ 是 $r'$ 的定义域.

ii) $r''$是 $L$ 上的 $n$ 元运算 $r'':L^n\to L$，满足半连续条件(SC)，即

$$\text{(SC)}\quad r''(a_1,\cdots,a_{k-1},\bigvee\{a_{kj}\mid j\in J\},a_{k+1},\cdots,a_n)$$
$$=\bigvee_{j\in J}r''(a_1,\cdots,a_{k-1},a_{kj},a_{k+1},\cdots,a_n),\qquad J\neq\varnothing.$$

即 $r''$关于每个变元均保非空并.

**例 7.1.9**　在本例中我们给出后面要用到的两个二元 $L$-推理规则.

i) $r_0=\langle r_0',r_0''\rangle$. 这里 $r_0'$的定义域为 $F\times F$ 的对角线，即

$$Dr_0'=\{(x,x)\mid x\in F\},\quad 且\ r_0'(x,x)=x.$$

$r_0'':L\times L\to L$ 的定义是 $r_0''(a,b)=a\vee b$. $r_0''$显然满足半连续条件(SC).

ii) $r_1=\langle r_1',r_1''\rangle$. 这里

$$Dr_1'=\{(x,x\Rightarrow y)\mid x,y\in F\},\quad r_1'(x,x\Rightarrow y)=y,$$

$\Rightarrow$是 $F$ 上的二元运算. 又

$$r_1''(a,b)=a\wedge b.$$

这里假定 $L$ 满足第一无限分配律，于是容易验证 $r_1''$满足(SC).

以上 $r_0$ 与 $r_1$ 可分别记作

$$\frac{x,\ x}{x}\left(\frac{a,\ b}{a\vee b}\right)\quad 与\quad \frac{x,\ x\Rightarrow y}{y}\left(\frac{a,\ b}{a\wedge b}\right).\tag{7.1.6}$$

条件(SC)比单调性要强，但当 $L$ 为有限链时二者是一致的.

**定义 7.1.10**　设 $\mathscr{R}$ 是 $F$ 上的一族 $L$-规则，$r\in\mathscr{R}$，$T$ 是 $F$ 上的 $L$-集.

i) 如果 $\forall(x_1,\cdots,x_n)\in Dr'$，恒有

$$Tr'(x_1,\cdots,x_n)\geqslant r''(Tx_1,\cdots,Tx_n),$$

则称 ***T* 关于规则 *r* 是闭的.**

ii) 如果 $\forall r\in\mathscr{R}$，$T$ 关于 $r$ 都是闭的，则称 ***T* 关于 $\mathscr{R}$ 是闭的**. 这里 $\mathscr{R}$ 中的规则不必同为 $n$ 元 $L$-规则.

由此可见，所谓 $T$ 关于 $r$ 是闭的是指：$T$ 在各个公式经 $r'$作用后所得公式处的值不小于 $T$ 分别在各公式处的值经 $r''$作用后的值.

**命题 7.1.11**　设 $\mathscr{R}$ 是 $F$ 上一族 $L$-规则. 令

$$\mathscr{U}=\{T\in L^F\mid T\ 关于\ \mathscr{R}\ 是闭的\},$$

则 $\mathscr{U}$ 关于任意交运算封闭，即 $F$ 上若干关于 $\mathscr{R}$ 闭的 $L$-集的交集仍然是关于 $\mathscr{R}$ 闭的.

**证**　显然，$F$ 上的最大 $L$-集 1 关于任何规则都是闭的，所以 $\mathscr{U}$ 关于空交运算是封闭的. 设 $\mathscr{V}$ 是 $\mathscr{U}$ 的非空子集，$r$ 是 $\mathscr{R}$ 中的 $n$ 元 $L$-规则，则

$$\begin{aligned}(\wedge\mathscr{V})r'(x_1,\cdots,x_n)&=\wedge\{Tr'(x_1,\cdots,x_n)\mid T\in\mathscr{V}\}\\&\geqslant\wedge\{r''(Tx_1,\cdots,Tx_n)\mid T\in\mathscr{V}\}\\&\geqslant r''((\wedge\mathscr{V})x_1,\cdots,(\wedge\mathscr{V})x_n).\end{aligned}$$

这里最后一个不等式用到了 $r''$关于各变元的单调性，由 $r''$满足(SC)知这一点自然

是成立的.

**定义 7.1.12** 设 $F$ 是非空集，$L$ 是完备格. $F$ 上的一个 **$L$-语法**是一个序对 $\langle A, \mathscr{R}\rangle$. 这里 $A \in L^F$，$\mathscr{R}$ 是 $F$ 上的一族 $L$-规则.

**命题 7.1.13** 设 $\langle A, \mathscr{R}\rangle$ 是 $F$ 上的 $L$-语法，定义 $\mathrm{Con}_{A,\mathscr{R}}: L^F \to L^F$ 如下：

$$\mathrm{Con}_{A,\mathscr{R}}X = \bigwedge\{T \in L^F \mid T \geqslant A \vee X, T\text{关于}\mathscr{R}\text{闭}\},\quad X \in L^F, \tag{7.1.7}$$

则 $\mathrm{Con}_{A,\mathscr{R}}$ 是 $F$ 上的 $L$-结论算子，称为由 $\langle A, \mathscr{R}\rangle$ 导出的 **$L$-语法结论算子**.

**证** $\mathrm{Con}_{A,\mathscr{R}}$ 显然保序、增值. 又设 $T$ 关于 $\mathscr{R}$ 闭. 因为

$$T \geqslant A \vee X \quad \text{当且仅当} \quad T \geqslant A \vee \mathrm{Con}_{A,\mathscr{R}}X,$$

所以 $\mathrm{Con}_{A,\mathscr{R}}$ 还是幂等的，所以它是 $F$ 上的 $L$-结论算子.

注意，由命题 7.1.11 知对任一 $X \in L^F$，$\mathrm{Con}_{A,\mathscr{R}}X$ 关于 $\mathscr{R}$ 是闭的. 当 $A$ 与 $X$ 都是 $F$ 的分明子集时，$\mathrm{Con}_{A,\mathscr{R}}X$ 是 $F$ 的包含 $A$ 与 $X$ 且对 MP 规则封闭的最小子集.

**定义 7.1.14** 设 $\mathrm{Con}_{A,\mathscr{R}}$ 是 $F$ 上的 $L$-语法结论算子，$X \in L^F$，$x \in F$，$a \in L$. 如果

$$(\mathrm{Con}_{A,\mathscr{R}}X)x \geqslant a,$$

则称 $x$ 为 **$X$ 关于语法 $\langle A, \mathscr{R}\rangle$ 而言的 $a$ 结论**，简称 $x$ 为 **$X$ 的 $a$ 语法结论**，记作 $(A, \mathscr{R}, a)X \vdash x$. 这样就有

$$(A, \mathscr{R}, a)X \vdash x \quad \text{当且仅当} \quad (\mathrm{Con}_{A,\mathscr{R}}X)x \geqslant a. \tag{7.1.8}$$

特别是当 $a=1$ 时，称 $x$ 为 **$X$ 的语法结论**.

下面的命题是自明的.

**命题 7.1.15** 设 $X \in L^F$，$x \in F$，则

$$(\mathrm{Con}_{A,\mathscr{R}}X)x = \bigvee\{a \in L \mid (A, \mathscr{R}, a)X \vdash x\}. \tag{7.1.9}$$

**命题 7.1.16** 设对每个 $i = 1, \cdots, n$ 均有

$$(A, \mathscr{R}, a_i)\ X \vdash x_i, \tag{7.1.10}$$

则对任一 $n$ 元的 $r \in \mathscr{R}$，

$$(A, \mathscr{R}, r''(a_1, \cdots, a_n))X \vdash r'(x_1, \cdots, x_n). \tag{7.1.11}$$

**证** 设 $r \in \mathscr{R}$，$T$ 关于 $\mathscr{R}$ 闭且 $T \geqslant A \vee X$，则

$$Tr'(x_1, \cdots, x_n) \geqslant r''(Tx_1, \cdots, Tx_n), \tag{7.1.12}$$

且由(7.1.10)式有

$$Tx_i \geqslant (\mathrm{Con}_{A,\mathscr{R}}X)x_i \geqslant a_i \quad (i = 1, \cdots, n).$$

所以由(7.1.12)式得

$$Tr'(x_1, \cdots, x_n) \geqslant r''(a_1, \cdots, a_n).$$

由 $T$ 的任意性可得

$$(\mathrm{Con}_{A,\mathscr{R}}X)r'(x_1, \cdots, x_n) \geqslant r''(a_1, \cdots, a_n),$$

即(7.1.11)式成立.

命题 7.1.16 说明，如果从语法上 $X$ 以程度 $a_i$ 推出 $x_i (i=1, \cdots, n)$，则 $X$ 以程度 $r''(a_1, \cdots, a_n)$ 推出 $r'(x_1, \cdots, x_n)$.

### 7.1.4　$F$ 中的证明

首先让我们回忆经典命题演算中的证明. 设 $F$ 是全体公式之集，$A \subset F$，$A$ 是公理之集，$X \subset F$，$X$ 是假设之集，$x \in F$，$x$ 是一个公式. 那么 $X \vdash x$，即存在从 $X$ 到 $x$ 的一个证明是指存在一个有限序列

$$x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n. \tag{7.1.13}$$

这里 $x_n = x$，且 $\forall i \leqslant n$，$x_i$ 属于以下三种情况之一：

i) $x_i \in X$;

ii) $x_i \in A$;

iii) 存在 $j, k < i$，使 $x_i$ 是由 $x_j$ 与 $x_k$ 运用 MP 规则推得的结果.

这时对于给定的公式 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，(7.1.13) 式是或不是 $x_n$ 的证明是清楚的，二者必居其一且仅居其一. Pavelka 则要把 $X \vdash x$ 程度化，这里 $x = x_n$. 因为对于确定的公式序列 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，(7.1.13) 式究竟是不是从 $X$ 到 $x$ 的证明显然与假设集 $X$ 有关、与公理集 $A$ 有关，也与推理规则有关. 同一个公式序列 (7.1.13) 可能对于某个假设集 $X$ 是 $x$ 的证明，而对另外的假设集 $Y$，则不构成从 $Y$ 到 $x$ 的证明. Pavelka 首先把假设集 $X$ 程度化，即 $X$ 不再是 $F$ 的分明子集，而是以 $F$ 为论域的 $L$-Fuzzy 集. 为了一般化，Pavelka 把公理集也程度化，假定 $A$ 也是论域 $F$ 上的 $L$-Fuzzy 集，同时也把推理规则一般化，不限于考虑 MP 规则. 现在设 $A$ 与推理规则集均已给定，而假设集 $X$ 是可以变化的，那么 (7.1.13) 式中原来是公理的那些 $x_i$ 关于给定的 $A$ 就有一个隶属度 $Ax_i$，而原来是假设集 $X$ 中的公式 $x_i$ 则有未定的隶属度 $Xx_i$，它随 $X$ 的变化而变化. 至于由前面 $n$ 项运用推理规则得出的项，它的“值”自然由前面项的值以及具体的推理规则而定. 为了明确起见，Pavelka 把 (7.1.13) 式中的三类公式用三种不同的符号表示：作为假设的公式 $x$ 用 $\langle x \rangle$ 表示，作为公理的公式 $x$ 用 $\langle x, 0 \rangle$ 表示，而由前面第 $j, k$ 两项运用 MP 规则（即例 7.1.9 中的规则 $r_1$）而得的 $x$ 则用 $\langle x, r_1, \langle j, k \rangle \rangle$ 表示. 这最后一种公式（设为第 $k$ 项）还可一般化为 $\langle x, r, \langle i_1, \cdots, i_n \rangle \rangle$ 的形式，意指公式 $x$ 是由第 $i_1$ 项，……，第 $i_n$ 项 $(1 \leqslant i_1, \cdots, i_n < k)$ 运用规则 $r$ 而得出的. 现在把以上所说精确化地表达如下：

首先约定，设 $P$ 为任一非空分明集，以 $P^+$ 记由 $P$ 生成的自由半群，其一般元素可写为 $x_1, \cdots, x_n$，或 $W = \langle x_1, \cdots, x_n \rangle$，叫做 $P$ 中的**字**，这里 $x_i \in P (i = 1, \cdots, n)$. 这时约定

$$\ulcorner W = x_1, \quad W \urcorner = x_n,$$

即 $\ulcorner W$ 和 $W \urcorner$ 分别表示 $W$ 的第一个与最后一个元素.

**定义 7.1.17**　设 $\Sigma = F \cup (F \times \{0\}) \cup (F \times \mathscr{R} \times \mathbf{N}^+)$，这里 $\mathbf{N}$ 表示自然数集，$\mathscr{R}$ 是 $F$ 上的一族 $L$-规则. **$F$ 中的一个 $\mathscr{R}$ 证明**是 $\Sigma^+$ 中的元素，即 $\Sigma$ 中的字

$$W = \langle W_1, \cdots, W_m \rangle \in \Sigma^+.$$

这里 $W_1=\langle x\rangle$ 或 $W_1=\langle x, 0\rangle$，对于每个 $k$，$2\leqslant k\leqslant m$，$W$ 中的第 $k$ 个元素如果属于 $F\times\mathscr{R}\times N^+$，即

$$W_k=\langle x, r, \langle i_1, \cdots, i_n\rangle\rangle,$$

则 $r$ 是 $n$ 元 $L$-规则，$1\leqslant i_1, \cdots, i_n<k$，且

$$x=r'(\ulcorner W_{i_1}, \cdots, \ulcorner W_{i_n}).$$

这个证明 $W$ 叫做以 $\ulcorner W_m$ 为**目标**的证明，设 $\ulcorner W_m=x$，这时也常写 $W\urcorner=x$（实为 $x=\ulcorner W_m$，$W_m=W\urcorner$）. $m$ 叫做证明 $W$ 的**长度**，记作 $m=l(W)$. 又 $F$ 中的全部 $\mathscr{R}$ 证明之集记作 $P(F, \mathscr{R})$. 例如，

$$\langle\langle x\rangle, \langle x\to y, 0\rangle, \langle y, r_1, \langle 1, 2\rangle\rangle\rangle$$

是以 $y$ 为目标且长度等于 3 的证明.

显然，如果 $W=\langle W_1, \cdots, W_m\rangle$ 是 $F$ 中的 $\mathscr{R}$ 证明，则 $\forall k\leqslant m$，$W_{(k)}=\langle W_1, \cdots, W_k\rangle$ 也是 $F$ 中的 $\mathscr{R}$ 证明.

**定义 7.1.18** 设 $W$ 是 $F$ 中的 $\mathscr{R}$ 证明，$X$ 是 $F$ 上的 $L$-Fuzzy 集，$A$ 是公理集，它也是 $F$ 上的 $L$-Fuzzy 集，则 **$W$ 关于 $X$ 的值 $\hat{W}X$** 归纳地定义如下：

i）设 $l(W)=1$，则分别当 $W=\langle\langle x\rangle\rangle$ 或 $\langle\langle x, 0\rangle\rangle$ 时规定

$$\hat{W}X=Xx \quad 或 \quad \hat{W}X=Ax.$$

ii）设当 $l(W')<m$ 时 $\hat{W}'X$ 已定义，令 $W=\langle W_1, \cdots, W_m\rangle$，则

$$\hat{W}X=\begin{cases}Xx, & W_m=\langle x\rangle,\\ Ax, & W_m=\langle x, 0\rangle,\\ r''(\hat{W}_{(i_1)}X, \cdots, \hat{W}_{(i_n)}X), & W_m=\langle x, r, \langle i_1, \cdots, i_n\rangle\rangle.\end{cases}$$

**注 7.1.19** 设 $W$ 是 $F$ 中的 $\mathscr{R}$ 证明，$W=\langle W_1, \cdots, W_m\rangle$，$\ulcorner W_i=x_i(i=1, \cdots, m)$，则由以上定义可见 $W$ 关于 $X$ 的值只与 $F$ 上的 $L$-Fuzzy 集 $X$ 在 $x_1, \cdots, x_m$ 这 $m$ 个公式处的值有关. 如果 $Y$ 是 $F$ 上的任一 $L$-Fuzzy 集，$Y$ 在 $x_1, \cdots, x_m$ 各点处的值与 $X$ 在各点的值相等，则 $\hat{W}Y=\hat{W}X$. 特别是令 $Y$ 在以上各点之外的值恒为零，即令

$$Y=X\mid G, \quad 这里\ Gy=\begin{cases}1, & y=x_1, \cdots, x_m,\\ 0, & 其他,\end{cases}$$

则 $\hat{W}Y=\hat{W}X$.

设 $\langle A, \mathscr{R}\rangle$ 是 $F$ 上的 $L$-语法，我们在命题 7.1.13 中用（7.1.7）式定义了由 $\langle A, \mathscr{R}\rangle$ 导出的 $L$-语法结论算子 $\mathrm{Con}_{A,\mathscr{R}}$. 这是一个整体性的定义. 对每个 $X\in L^F$，下面的定理把 $X$ 按整体观点由 $\mathrm{Con}_{A,\mathscr{R}}$ 作用后在公式 $x$ 处的值通过以 $x$ 为目标的各个局部性证明关于 $X$ 的值而表达了出来.

**定理 7.1.20** 设 $\langle A, \mathscr{R}\rangle$ 是 $F$ 上的 $L$-语法，$X$ 是 $F$ 上的 $L$-集，$x$ 是 $F$ 中任一公式，则

$$(\mathrm{Con}_{A,\mathscr{R}}X)x = \bigvee \{\hat{W}X \mid W \in P(F,\mathscr{R}),\ W^{\urcorner} = x\}. \tag{7.1.14}$$

**证**　用 $\bar{X}x$ 表示(7.1.14)式的右端，即令

$$\bar{X}x = \bigvee \{\hat{W}X \mid W \in P(F,\mathscr{R}),\ W^{\urcorner} = x\}, \tag{7.1.15}$$

也即 $\bar{X}$ 是 $F$ 上这样的 $L$-集，它在 $x$ 处的值等于以 $x$ 为目标的证明关于 $X$ 的值的上确界. 以下证明 $\bar{X} = \mathrm{Con}_{A,\mathscr{R}}X$.

i) 先证 $\bar{X} \leqslant \mathrm{Con}_{A,\mathscr{R}}X$.

为证 $\bigvee_{i\in I} a_i \leqslant \bigwedge_{j\in J} b_j$，必须且只需证明对任一 $i \in I$ 和任一 $j \in J$，$a_i \leqslant b_j$. 由(7.1.15)式看出 $\bar{X}x$ 相当于 $\bigvee a_i$，由(7.1.7)式看出 $\mathrm{Con}_{A,\mathscr{R}}X$ 相当于 $\bigwedge b_j$，所以只需证明对每个 $W \in P(F,\mathscr{R})$，对每个 $T \in L^F$，$T \geqslant A \vee X$ 且 $T$ 关于 $\mathscr{R}$ 闭时有

$$\hat{W}X \leqslant T(W^{\urcorner}). \tag{7.1.16}$$

事实上，当 $l(W) = 1$ 时，$\hat{W}X$ 的值等于 $Xx$ 或 $Ax$，这里 $x = W^{\urcorner}$. 所以由 $T \geqslant A \vee X$ 知(7.1.16)式成立. 设当 $l(W') < m$ 时 $\hat{W}'X \leqslant T(W'^{\urcorner})$. 令 $W = \langle W_1, \cdots, W_m\rangle \in P(F,\mathscr{R})$. 若 $W_m \in F \cup (F \times \{0\})$，则可像上面一样证明(7.1.16)式成立. 若 $W_m \in F \times \mathscr{R} \times N^+$，设

$$W_m = \langle x, r, \langle i_1, \cdots, i_n\rangle\rangle.$$

由定义 7.1.18，这时由 $r''$ 保序以及 $T$ 关于 $r$ 闭得

$$\begin{aligned}\hat{W}X &= r''(\hat{W}_{(i_1)}X, \cdots, \hat{W}_{(i_n)}X)\\ &\leqslant r''(T(W^{\urcorner}_{(i_1)}), \cdots, T(W^{\urcorner}_{(i_n)}))\\ &= r''(T({}^{\ulcorner}W_{i_1}), \cdots, T({}^{\ulcorner}W_{i_n}))\\ &\leqslant Tr'({}^{\ulcorner}W_{i_1}, \cdots, {}^{\ulcorner}W_{i_n})\\ &= T({}^{\ulcorner}W_m) = T(W^{\urcorner}),\end{aligned}$$

即当 $l(W) = m$ 时(7.1.16)式仍成立，所以(7.1.16)式恒成立.

ii) 现在证明 $\mathrm{Con}_{A,\mathscr{R}}X \leqslant \bar{X}$.

因为 $\langle\langle x\rangle\rangle$ 与 $\langle\langle x, 0\rangle\rangle$ 都是以 $x$ 为目标的证明，且关于 $X$ 的值分别为 $Xx$ 与 $Ax$. 所以由(7.1.15)式得 $A \vee X \leqslant \bar{X}$. 由(7.1.7)式知以下只需证 $\bar{X}$ 关于 $\mathscr{R}$ 闭.

事实上，设 $r = \langle r', r''\rangle \in \mathscr{R}$，$\langle x_1, \cdots, x_n\rangle \in Dr'$. 对每个 $k(k = 1, \cdots, n)$，以 $\{W^{(k,j_k)} \mid j_k \in J_k\}$ 记全体以 $x_k$ 为目标的证明，则由(7.1.15)式得

$$\bar{X}x_k = \bigvee \{\hat{W}^{(k,j_k)}X \mid j_k \in J_k\}, \tag{7.1.17}$$

这里

$$W^{(k,j_k)} = \langle W_1^{(k,j_k)}, \cdots, W_{m(k,j_k)}^{(k,j_k)}\rangle.$$

设 $\langle j_1, \cdots, j_n\rangle \in J_1 \times \cdots \times J_n$. $\Sigma$ 中的字

$$\begin{aligned}W^{(j_1,\cdots,j_n)} = \langle &W_1^{(1,j_1)}, \cdots, W_{m(1,j_1)}^{(1,j_1)}, \cdots, W_1^{(n,j_n)}, \cdots, W_{m(n,j_n)}^{(n,j_n)},\\ &\langle r'(x_1, \cdots, x_n), r, \langle i_1, \cdots, i_n\rangle\rangle\rangle\end{aligned} \tag{7.1.18}$$

是 $F$ 中以 $r'(x_1, \cdots, x_n)$ 为目标的证明，这里

$$i_k = m(1, j_1) + \cdots + m(k, j_k).$$

由 $r''$ 满足(SC)条件以及(7.1.17)式、(7.1.18)式与(7.1.15)式得

$$\begin{aligned} r''(\bar{X}x_1, \cdots, \bar{X}x_n) &= r''(\bigvee\{\hat{W}^{(1,j_1)}X \mid j_1 \in J_1\}, \cdots, \\ &\quad \bigvee\{\hat{W}^{(n,j_n)}X \mid j_n \in J_n\}) \\ &= \bigvee\{r''(\hat{W}^{(1,j_1)}X, \cdots, \hat{W}^{(n,j_n)}X) \mid \langle j_1, \cdots, j_n\rangle \\ &\quad \in J_1 \times \cdots \times J_n\} \\ &= \bigvee\{\hat{W}^{(j_1,\cdots,j_n)}X \mid \langle j_1, \cdots, j_n\rangle \in J_1 \times \cdots \times J_n\} \\ &\leqslant \bar{X}r'(x_1, \cdots, x_n). \end{aligned}$$

因为 $r$ 是 $\mathscr{R}$ 中的任意规则，所以 $\bar{X}$ 关于 $\mathscr{R}$ 是闭的.

**推论 7.1.21** 设 $L$ 是全序集，$\langle A, \mathscr{R}\rangle$ 是 $F$ 上的 $L$-语法，$(A, \mathscr{R}, a)X \vdash x$ 且 $b < a$，则有 $W \in P(F, \mathscr{R})$，$W^{\urcorner} = x$，使 $\hat{W}X > b$.

**推论 7.1.22** 设 $L$ 是对偶良序集，即 $L$ 是全序集且每个非空子集都有最大元，则对每个 $X \in L^F$ 和每个 $x \in F$，有 $W \in P(F, \mathscr{R})$，$W^{\urcorner} = x$，且 $(\mathrm{Con}_{A,\mathscr{R}}X)x = \hat{W}X$.

**推论 7.1.23** 设 $L$ 是格且 $L$ 满足**上升链条件 A.C.C.**，即 $L$ 中不存在无限上升链，如果 $\mathscr{R}$ 中含有规则 $r_0$，则对任一 $X \in L^F$ 与任一 $x \in F$，

i) $E = \{\hat{W}X \mid W \in P(F, \mathscr{R}), W^{\urcorner} = x\}$ 关于非空有限并运算封闭.

ii) 存在 $W \in P(F, \mathscr{R})$，$W^{\urcorner} = x$，使 $(\mathrm{Con}_{A,\mathscr{R}}X)x = \hat{W}X$.

**证** i) 设 $\hat{W}_1X, \hat{W}_2X \in E$，则

$$W_1, W_2 \in P(F, \mathscr{R}), \quad W_1^{\urcorner} = W_2^{\urcorner} = x.$$

设

$$W_1 = \langle W_1^{(1)}, \cdots, W_m^{(1)}\rangle, \quad W_2 = \langle W_1^{(2)}, \cdots, W_n^{(2)}\rangle.$$

令

$$W_3 = \langle W_1^{(1)}, \cdots, W_m^{(1)}, W_1^{(2)}, \cdots, W_n^{(2)}\rangle,$$

$$W = \langle W_1^{(1)}, \cdots, W_m^{(1)}, W_1^{(2)}, \cdots, W_n^{(2)}, \langle x, r_0, \langle m, m+n\rangle\rangle\rangle,$$

则

$$\hat{W}_3X = \hat{W}_2X, \quad W^{\urcorner} = x \quad \text{且} \quad W \in P(F, \mathscr{R}).$$

这时

$$\hat{W}X = r_0''(\hat{W}_1X, \hat{W}_3X) = r_0''(\hat{W}_1X, \hat{W}_2X) = \hat{W}_1X \vee \hat{W}_2X.$$

这就证明了 $E$ 关于非空有限并运算封闭.

ii) 因为 $L$ 中不存在无限的上升链，$E$ 中各非空有限并中必存在一最大元，设为 $\hat{W}_1X \vee \cdots \vee \hat{W}_nX$，那么由 i)，有 $W \in P(F, \mathscr{R})$，$W^{\urcorner} = x$ 且 $\hat{W}X = \hat{W}_1X \vee \cdots \vee \hat{W}_nX$.

### 7.1.5　紧算子

设 $X\in L^F$, $G\subset F$, 则 $X|G$ 是 $F$ 上的如下 $L$-集:

$$(X|G)y=\begin{cases}Xy, & y\in G,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

**定义 7.1.24**　设 $C:L^F\to L^F$ 是 $L$-结论算子. 如果对每个 $X\in L^F$, $x\in F$, 存在 $F$ 的有限子集 $G=G(X,x)$, 使

$$(CX)x=(C(X|G))x,$$

则称 $C$ 为紧算子.

**定理 7.1.25**　设 $\langle A,\mathscr{R}\rangle$ 是 $F$ 上的 $L$-语法. 如果 $L$ 是对偶良序集或 $L$ 是格且 $L$ 满足上升链条件 A. C. C., 且 $r_0\in\mathscr{R}$, 则 $\mathrm{Con}_{A,\mathscr{R}}$是紧算子.

**证**　由推论 7. 1. 22 和推论 7. 1. 23 知对给定的 $X\in L^F$ 和 $x\in F$, 有 $W\in P(F,\mathscr{R})$, $W^{\urcorner}=x$ 使

$$(\mathrm{Con}_{A,\mathscr{R}}X)x=\hat{W}X. \tag{7.1.19}$$

设 $W=\langle W_1,\cdots,W_n\rangle$, 令 $G=\{\ulcorner W_1,\cdots,\ulcorner W_n\}$, 则由注 7. 1. 19 知 $\hat{W}X=\hat{W}(X|G)$. 由此得

$$\hat{W}(X|G)=\hat{W}X=(\mathrm{Con}_{A,\mathscr{R}}X)x\geqslant(\mathrm{Con}_{A,\mathscr{R}}(X|G))x.$$

另一方面,

$$\begin{aligned}(\mathrm{Con}_{A,\mathscr{R}}(X|G))x&=\bigvee\{\hat{W}'(X|G)\mid W'\in P(F,\mathscr{R}),\ W'^{\urcorner}=x\}\\ &\geqslant\hat{W}(X|G).\end{aligned}$$

所以

$$(\mathrm{Con}_{A,\mathscr{R}}(X|G))x=\hat{W}(X|G).$$

从而由(7. 1. 19)式得

$$(\mathrm{Con}_{A,\mathscr{R}}X)x=(\mathrm{Con}_{A,\mathscr{R}}(X|G))x. \tag{7.1.20}$$

所以 $\mathrm{Con}_{A,\mathscr{R}}$是紧算子.

**注 7. 1. 26**　如果把(7. 1. 20)式的右边放宽, 则无须任何条件恒有下式成立:

$$(\mathrm{Con}_{A,\mathscr{R}}X)x=\bigvee\{(\mathrm{Con}_{A,\mathscr{R}}(X|G))x\mid G\subset F,\ G\text{有限}\}. \tag{7.1.21}$$

**证**　因为对 $F$ 的任一有限子集 $G$

$$\mathrm{Con}_{A,\mathscr{R}}(X|G)\leqslant\mathrm{Con}_{A,\mathscr{R}}X,$$

所以(7. 1. 21)式右边不会超过左边. 又设 $\{W^{(j)}\mid j\in J\}$ 是全部以 $x$ 为目标的证明之集. 对每个 $j\in J$, 设

$$W^{(j)}=\langle W_1^{(j)},\cdots,W_{m(j)}^{(j)}\rangle.$$

令

$$G_j=\{\ulcorner W_1^{(j)},\cdots,\ulcorner W_{m(j)}^{(j)}\},$$

则由注 7.1.19 知，$\hat{W}^{(j)}X=\hat{W}^{(j)}(X|G_j)$. 所以由定理 7.1.20 得

$$\begin{aligned}(\mathrm{Con}_{A,\mathscr{R}}X)x &= \bigvee\{\hat{W}^{(j)}X \mid j\in J\} = \bigvee\{\hat{W}^{(j)}(X\mid G_j)\mid j\in J\}\\ &\leqslant \bigvee\{(\mathrm{Con}_{A,\mathscr{R}}(X\mid G_j))x\mid j\in J\}\\ &\leqslant \bigvee\{(\mathrm{Con}_{A,\mathscr{R}}(X\mid G))x\mid G\subset F,\ G\text{有限}\}.\end{aligned}$$

这就证明了(7.1.21)式.

### 7.1.6 可靠性

**定义 7.1.27** 设 $r$ 是 $F$ 上的 $L$-规则，$\mathscr{S}$ 是 $F$ 上的 $L$-语义. 如果 $\mathscr{S}$ 中每个元 $T$ 都关于 $r$ 闭，则称 **$r$ 关于 $\mathscr{S}$ 是可靠的**. 设 $\langle A,\mathscr{R}\rangle$ 是 $F$ 上的 $L$-语法，则称 **$\langle A,\mathscr{R}\rangle$ 关于 $\mathscr{S}$ 是可靠的**，若

i) $A\leqslant \mathrm{Con}_{\mathscr{S}}\ 0$，即对每个 $T\in\mathscr{S}$，$A\leqslant T$.

ii) 对每个 $r\in\mathscr{R}$，$r$ 关于 $\mathscr{S}$ 是可靠的.

**注 7.1.28** 规则 $r_0$ 关于每个 $T\in L^F$ 都是可靠的，因为

$$Tr_0{}'(x,x) = Tx = Tx\vee Tx = r_0{}''(Tx,Tx).$$

**定理 7.1.29** 设 $\langle A,\mathscr{R}\rangle$ 与 $\mathscr{S}$ 分别是 $F$ 上的 $L$-语法与 $L$-语义，则 $(A,\mathscr{R})$ 关于 $\mathscr{S}$ 可靠当且仅当

$$\mathrm{Con}_{A,\mathscr{R}}\leqslant \mathrm{Con}_{\mathscr{S}}.$$

**证** 设 $\langle A,\mathscr{R}\rangle$ 关于 $\mathscr{S}$ 可靠，则对每个 $T\in\mathscr{S}$，$A\leqslant T$，并且 $T$ 关于 $\mathscr{R}$ 是闭的. 所以由(7.1.7)式知当 $T\geqslant X$ 时，$T\geqslant \mathrm{Con}_{A,\mathscr{R}}X$. 所以由(7.1.2)式即得 $\mathrm{Con}_{A,\mathscr{R}}\leqslant\mathrm{Con}_{\mathscr{S}}$.

反过来，设上式成立，则 $A\leqslant \mathrm{Con}_{A,\mathscr{R}}\ 0\leqslant \mathrm{Con}_{\mathscr{S}}\ 0$. 其次，设 $r=\langle r',r''\rangle\in\mathscr{R}$，$\langle x_1,\cdots,x_n\rangle\in Dr'$，$T\in\mathscr{S}$，则由命题 7.1.13 后面的注意知 $\mathrm{Con}_{A,\mathscr{R}}T$ 关于 $\mathscr{R}$ 是闭的，所以

$$\begin{aligned}r''(Tx_1,\cdots,Tx_n) &\leqslant r''((\mathrm{Con}_{A,\mathscr{R}}T)x_1,\cdots,(\mathrm{Con}_{A,\mathscr{R}}T)x_n)\\ &\leqslant(\mathrm{Con}_{A,\mathscr{R}}T)r'(x_1,\cdots,x_n)\\ &\leqslant(\mathrm{Con}_{\mathscr{S}}T)r'(x_1,\cdots,x_n)\\ &=Tr'(x_1,\cdots,x_n).\end{aligned}$$

这最后的等号是由于 $T\in\mathscr{S}$，从而 $\mathrm{Con}_{\mathscr{S}}T=T$. 这就证明了对每个 $r\in\mathscr{R}$，$r$ 关于 $\mathscr{S}$ 是可靠的，从而 $\langle A,\mathscr{R}\rangle$ 关于 $\mathscr{S}$ 是可靠的.

### 7.1.7 完备性

**定义 7.1.30** $F$ 上的 $L$-语法 $\langle A,\mathscr{R}\rangle$ 叫做关于 $L$-语义 $\mathscr{S}$ 是**完备的**，如果

$$\mathrm{Con}_{A,\mathscr{R}} = \mathrm{Con}_{\mathscr{S}}.$$

这时称 $L$-语义系统 $\langle F,\mathscr{S}\rangle$ 可以**公理化**.

**注 7.1.31**　上述完备性是相当强的概念，因为它要求对 $F$ 上的任意 $L$-集 $X$，$\mathrm{Con}_{A,\mathscr{R}}X=\mathrm{Con}_{\mathscr{S}}X$ 成立，同时 $A$ 与 $\mathscr{S}$ 中的元也都是 $F$ 上的 $L$-集. 但在经典情形中，只要求上式对 $F$ 中的分明集 $X$ 成立，而且 $A$ 以及 $\mathscr{S}$ 中的元也都是 $F$ 中的分明集，所以经典情形的完备性要弱得多. 特别是第一章中介绍的完备性还限制了 $X$ 为空集，自然更弱一些.

## 7.2　剩　余　格

为了建立实用的 $L$-语义理论，赋值格 $L$ 上应当有适当的结构或运算. 本节中就系统研究带有丰富结构与运算的剩余格和强剩余格理论.

### 7.2.1　伴随

**定义 7.2.1**　设 $P$ 是偏序集，$P$ 上的二元运算 $\otimes$ 与 $\to$ 叫做**互为伴随**，若以下条件成立：

($\mathrm{M}_0$)　$\otimes: P\times P\to P$ 是单调递增的.

($\mathrm{R}_0$)　$\to: P\times P\to P$ 关于第一变量是不增的，关于第二变量是不减的.

(A)　$a\otimes b\leqslant c$　当且仅当　$a\leqslant b\to c$，$a, b, c\in P$.

这时 $(\otimes, \to)$ 叫做 $P$ 上的**伴随对**.

**命题 7.2.2**　设 $P$ 是偏序集，则条件组 ($\mathrm{M}_0$)，($\mathrm{R}_0$)，(A) 等价于条件组 ($\mathrm{M}_0$)，($\mathrm{R}_0$)，(A′)，(A″)，这里条件 (A′) 与 (A″) 的意义如下：

(A′)　$a\leqslant(b\to(a\otimes b))$.

(A″)　$(a\to b)\otimes a\leqslant b$，　$a, b\in P$.

**证**　设 ($\mathrm{M}_0$)，($\mathrm{R}_0$) 与 (A) 都成立，则由 (A) 以及 $a\otimes b\leqslant a\otimes b$ 即得 (A′). 由 (A) 以及 $(a\to b)\leqslant(a\to b)$ 即得 (A″). 反过来，设 ($\mathrm{M}_0$)，($\mathrm{R}_0$)，(A′)，(A″) 成立，设 $a\leqslant b\to c$，则由 ($\mathrm{M}_0$) 以及 (A″) 得

$$a\otimes b\leqslant(b\to c)\otimes b\leqslant c,$$

故 $a\otimes b\leqslant c$. 设 $a\otimes b\leqslant c$，则由 ($\mathrm{R}_0$) 以及 (A′) 得

$$a\leqslant(b\to(a\otimes b))\leqslant b\to c,$$

故 $a\leqslant b\to c$. 这就证明了 (A).

**命题 7.2.3**　设 $P$ 是偏序集，$\otimes$ 与 $\to$ 是 $P$ 上的伴随对，$a\in P$，则下列条件成立：

($\mathrm{M}_1$)　映射 $f: P\to P$ 保存在并，这里 $f(x)=x\otimes a$，即

$$\left(\bigvee_i x_i\right)\otimes a=\bigvee_i(x_i\otimes a) \tag{7.2.1}$$

当等号两边出现的并都存在时等式成立.

($\mathrm{R}_1$)　映射 $g: P\to P$ 保存在交，这里 $g(y)=a\to y$，即

$$a \to \bigwedge_i y_i = \bigwedge_i (a \to y_i) \tag{7.2.2}$$

当等号两边出现的交都存在时等式成立.

特别是当 $P$ 是完备格时(7.2.1)式与(7.2.2)式都成立.

这个命题是下述更一般的命题的推论.

**命题 7.2.4** 设 $P$ 是偏序集, $f, g: P \to P$ 满足条件:

$$f(x) \leqslant y \quad \text{当且仅当} \quad x \leqslant g(y), \tag{7.2.3}$$

则 $f$ 保存在并, $g$ 保存在交.

**证** 设(7.2.3)式成立, $x_i \in P(i \in I)$ 且 $\bigvee_{i \in I} x_i$ 存在, 则由(7.2.3)式得

$$\begin{aligned} f(\bigvee_i x_i) \leqslant y \quad & \text{当且仅当} \quad \bigvee_i x_i \leqslant g(y), \\ & \text{当且仅当} \quad \forall i, x_i \leqslant g(y), \\ & \text{当且仅当} \quad \forall i, f(x_i) \leqslant y, \\ & \text{当且仅当} \quad \bigvee_i f(x_i) \leqslant y, \ y \in P. \end{aligned}$$

因为 $y$ 是任意的, 所以

$$f(\bigvee_i x_i) = \bigvee_i f(x_i).$$

当等号两边出现的并都存在时等式成立, 即 $f$ 保存在并.

其次证明当(7.2.3)式成立时 $g$ 保存在交. 设 $y_i \in P(i \in I)$ 且 $\wedge y_i$ 存在, 则由(7.2.3)式得

$$\begin{aligned} x \leqslant g(\bigwedge_i y_i) \quad & \text{当且仅当} \quad f(x) \leqslant \bigwedge_i y_i, \\ & \text{当且仅当} \quad \forall i, f(x) \leqslant y_i, \\ & \text{当且仅当} \quad \forall i, x \leqslant g(y_i), \\ & \text{当且仅当} \quad x \leqslant \bigwedge_i g(y_i), \ x \in P. \end{aligned}$$

因为 $x$ 是任意的, 所以

$$g(\bigwedge_i y_i) = \bigwedge_i g(y_i).$$

当等号两边出现的交都存在时等式成立, 即 $g$ 保存在交.

**推论 7.2.5** 命题 7.2.3 成立.

**证** 设 $f(x) = x \otimes a$, $g(y) = a \to y$, 这里 $a$ 是 $P$ 中任一固定元. 因为 $\otimes$ 与 $\to$ 互为伴随, 由条件(A)知(7.2.3)式成立, 所以由命题 7.2.4 即得命题 7.2.3.

**命题 7.2.6** 设 $L$ 是完备格.

i) 设映射 $\otimes: L \times L \to L$ 满足条件($M_0$)与($M_1$), 则有满足条件($R_0$)的唯一的映射 $\to: L \times L \to L$ 使(A)成立, 且

$$(a \to b) = \bigvee \{x \in L \mid x \otimes a \leqslant b\}, \quad a, b \in L. \tag{7.2.4}$$

ii) 设映射 $\to: L \times L \to L$ 满足条件($R_0$)与($R_1$), 则有满足条件($M_0$)的唯一的映射 $\otimes: L \times L \to L$ 使(A)成立, 且

$$a \otimes b = \bigwedge \{x \in L \mid a \leqslant b \to x\}, \quad a, b \in L. \tag{7.2.5}$$

**证**　i) 就按(7.2.4)式定义→，则由⊗满足($M_0$)知→满足($R_0$). 由(7.2.4)式与($M_1$)得

$$(a \to b) \otimes a = \bigvee \{x \otimes a \mid x \otimes a \leqslant b\} \leqslant b.$$

又由(7.2.4)式得

$$b \to (a \otimes b) = \bigvee \{x \in L \mid x \otimes b \leqslant a \otimes b\} \geqslant a.$$

即(A′)与(A″)均成立，所以由命题 7.2.2 知(A)成立.

最后，一旦→满足(A)，它就只能被(7.2.4)式唯一确定. 事实上，这时

$$\begin{aligned} a \to b &= \bigvee \{x \in L \mid x \leqslant (a \to b)\} \\ &= \bigvee \{x \in L \mid x \otimes a \leqslant b\}. \end{aligned}$$

即(7.2.4)式成立. 所以$\to: L \times L \to L$ 是唯一的.

ii) 就按(7.2.5)式定义⊗，则由→满足($R_0$)知⊗满足($M_0$). 由(7.2.5)式与($R_1$)得

$$b \to (a \otimes b) = \bigwedge \{b \to x \mid a \leqslant b \to x\} \geqslant a.$$

又由(7.2.5)式得

$$(a \to b) \otimes a = \bigwedge \{x \in L \mid (a \to b) \leqslant (a \to x)\} \leqslant b.$$

即(A′)与(A″)均成立，所以由命题 7.2.2 知(A)成立.

最后，一旦⊗满足(A)，它就只能被(7.2.5)式唯一确定. 事实上，

$$\begin{aligned} a \otimes b &= \bigwedge \{x \in L \mid a \otimes b \leqslant x\} \\ &= \bigwedge \{x \in L \mid a \leqslant b \to x\}, \end{aligned}$$

即(7.2.5)式成立. 所以$\otimes: L \times L \to L$ 是唯一的.

**例 7.2.7**　设 $L = [0, 1]$，则 $L$ 是完备格.

i) 设 $a \to b$ 由 Łukasiewicz 的 $R_{Łu}(a, b)$ 定义，即

$$a \to b = (a' + b) \wedge 1, \quad a, b \in [0, 1], \tag{7.2.6}$$

则→满足($R_0$)与($R_1$)，按(7.2.5)式定义⊗. 注意，当 $x \in [0, 1]$ 时 $a \leqslant b \to x$ 当且仅当 $x \geqslant (a + b - 1) \vee 0$，则由(7.2.5)式得

$$a \otimes b = (a + b - 1) \vee 0. \tag{7.2.7}$$

由命题 7.2.6 知，(⊗, →)是[0, 1]上的伴随对，叫 **Łukasiewicz 伴随对**.

ii) 设 $a \to b$ 由 Gödel 的 $R_G(a, b)$ 定义，即

$$a \to b = \begin{cases} 1, & a \leqslant b, \\ b, & a \nleqslant b, \end{cases} \tag{7.2.8}$$

则→满足($R_0$)与($R_1$). 按(7.2.5)式定义⊗. 注意，当 $a \geqslant b$ 时满足 $a \leqslant b \to x$ 的最小 $x$ 等于 $b$；当 $a < b$ 时满足 $a \leqslant b \to x$ 的最小 $x$ 等于 $a$，便得

$$a \otimes b = a \wedge b.$$

由命题 7.2.6 知(⊗, →)是[0, 1]上的又一组伴随对，叫 **Gödel 伴随对**.

iii)设$a \to b$，由$R_0$算子$R_0(a, b)$定义，即

$$a \to b = \begin{cases} 1, & a \leqslant b, \\ a' \vee b, & a > b, \end{cases} \tag{7.2.9}$$

则→仍满足($R_0$)与($R_1$). 按(7.2.5)式定义⊗. 注意，当$a \leqslant b'$时满足$a \leqslant b \to x$的最小$x$等于0；当$a > b'$时满足$a \leqslant b \to x$的最小$x$等于$a \wedge b$，便得

$$a \otimes b = \begin{cases} 0, & a + b \leqslant 1, \\ a \wedge b, & a + b > 1. \end{cases} \tag{7.2.10}$$

由(7.2.9)式、(7.2.10)式确定的伴随对(⊗, →)叫[0, 1]上的$\boldsymbol{R}_0$ **伴随对**.

**定理 7.2.8** 设$P$是偏序集，(⊗, →)是$P$上的伴随对，则以下的条件($M_i$)与($R_i$)($i=2, 3, \cdots, 8$)等价：

($M_2$) $x \mapsto a \otimes x$保存在并.　　($R_2$) $y \mapsto (y \to a)$是并-交运算.

($M_3$) $(a \otimes b) \otimes c \leqslant a \otimes (b \otimes c)$.　　($R_3$) $b \to c \leqslant ((a \to b) \to (a \to c))$.

($M_4$) $a \otimes 1 = a$.　　($R_4$) $a = 1 \to a$.

($M_5$) $1 \otimes a = a$.　　($R_5$) $a \leqslant b$ 当且仅当 $a \to b = 1$.

($M_6$) $a \otimes b = b \otimes a$.　　($R_6$) $a \leqslant b \to c$ 当且仅当 $b \leqslant a \to c$.

($M_7$) $(a \otimes b) \otimes c \geqslant a \otimes (b \otimes c)$.　　($R_7$) $(a \to b) \leqslant ((a \otimes c) \to (b \otimes c))$.

($M_8$) $(a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c)$.　　($R_8$) $(a \otimes b) \to c = (a \to (b \to c))$.

**证** 用($M_i$) ~ ($R_i$)表示($M_i$)与($R_i$)等价($i=2, \cdots, 8$). 则各等价性的证明如下：

($M_2$) ~ ($R_2$)：

设($R_2$)成立，则当$f(x) = x \to a$时，$f(\bigvee_i x_i) = \bigwedge_i f(x_i)$，所以

$\bigvee_i (a \otimes x_i) \leqslant y$　当且仅当　$\forall i,\ a \otimes x_i \leqslant y$，

当且仅当　$\forall i,\ a \leqslant x_i \to y$，

当且仅当　$a \leqslant \bigwedge_i (x_i \to y)$，

当且仅当　$a \leqslant (\bigvee_i x_i) \to y$，(由($R_2$))

当且仅当　$a \otimes (\bigvee_i x_i) \leqslant y$.

因为$y$是任意的，所以

$$a \otimes (\bigvee_i x_i) = \bigvee_i (a \otimes x_i). \tag{7.2.11}$$

当等号两边的并都存在时等式成立，即($M_2$)成立.

反过来，设($M_2$)成立，则

$y \leqslant \left(\bigvee_i x_i\right) \to a$　当且仅当　$y \otimes (\bigvee_i x_i) \leqslant a$，

当且仅当　$\bigvee_i (y \otimes x_i) \leqslant a$，　(由($M_2$))

当且仅当　$\forall i,\ y\otimes x_i\leqslant a$,

当且仅当　$\forall i,\ y\leqslant x_i\rightarrow a$,

当且仅当　$y\leqslant \bigwedge_i (x_i\rightarrow a)$.

因为 $y$ 是任意的，所以

$$((\bigvee_i x_i)\rightarrow a)=\bigwedge_i (x_i\rightarrow a). \tag{7.2.12}$$

当等号两边的并与交都存在时等式成立，即$(R_2)$成立.

$(M_3)\sim(R_3)$:

由条件$(A'')$和$(M_0)$知

$$(b\rightarrow c)\otimes((a\rightarrow b)\otimes a)\leqslant(b\rightarrow c)\otimes b\leqslant c.$$

设$(M_3)$成立，则由上式得

$$((b\rightarrow c)\otimes(a\rightarrow b))\otimes a\leqslant c. \tag{7.2.13}$$

从而两次运用条件(A)分别得出

$$(b\rightarrow c)\otimes(a\rightarrow b)\leqslant(a\rightarrow c)$$

和

$$(b\rightarrow c)\leqslant((a\rightarrow b)\rightarrow(a\rightarrow c)).$$

这最后一个不等式就是$(R_3)$. 注意：由以上推理可见当(A)成立时$(R_3)$等价于(7.2.13)式.

反过来，设

$$a\otimes(b\otimes c)\leqslant x. \tag{7.2.14}$$

这里 $x$ 是 $L$ 中任一元. 则由(A)得

$$a\leqslant((b\otimes c)\rightarrow x). \tag{7.2.15}$$

又由$(A')$得

$$b\leqslant(c\rightarrow(b\otimes c)). \tag{7.2.16}$$

由(7.2.15)式和(7.2.16)式运用$(M_0)$得

$$a\otimes b\leqslant(((b\otimes c)\rightarrow x)\otimes(c\rightarrow(b\otimes c))).$$

设$(R_3)$成立，则由$(M_0)$与(7.2.13)式得

$$(a\otimes b)\otimes c\leqslant[((b\otimes c)\rightarrow x)\otimes(c\rightarrow(b\otimes c))]\otimes c$$
$$\leqslant x. \tag{7.2.17}$$

以上从(7.2.14)式推得(7.2.17)式. 因为 $x$ 是任意的，特别当 $x=a\otimes(b\otimes c)$ 时(7.2.14)式成立，所以

$$(a\otimes b)\otimes c\leqslant a\otimes(b\otimes c).$$

这就是$(M_3)$.

$(M_4)\sim(R_4)$:

设$(M_4)$成立，则 $a\otimes 1\leqslant a$. 由(A)得 $a\leqslant 1\rightarrow a$. 又，设 $x\leqslant 1\rightarrow a$，则由(A)得

$x\otimes 1\leqslant a$. 由($M_4$)，即 $x\leqslant a$. 由 $x$ 的任意性得 $1\to a\leqslant a$. 所以($R_4$)成立.

反之，设($R_4$)成立，即 $a=1\to a$. 则由(A)得 $a\otimes 1\leqslant a$. 又设 $a\otimes 1\leqslant x$，则 $a\leqslant 1\to x$. 由($R_4$)，即 $a\leqslant x$. 由 $x$ 的任意性得 $a\otimes 1\geqslant a$. 所以($M_4$)成立.

($M_5$) ~ ($R_5$)：

设($M_5$)成立，则 $a=1\otimes a$，所以

$$
\begin{aligned}
a\leqslant b \quad &\text{当且仅当} \quad 1\otimes a\leqslant b,\\
&\text{当且仅当} \quad 1\leqslant a\to b,\\
&\text{当且仅当} \quad a\to b=1.
\end{aligned}
$$

所以($R_5$)成立.

反过来，设($R_5$)成立，则由 $a\leqslant a$ 得 $1=a\to a$. 由(A)，$1\otimes a\leqslant a$. 又，由 $1\otimes a\leqslant 1\otimes a$ 及(A)得 $1\leqslant(a\to(1\otimes a))$. 那么由($R_5$)即得 $a\leqslant 1\otimes a$. 所以($M_5$)成立.

($M_6$) ~ ($R_6$)：

设($M_6$)成立，则由(A)知

$$
\begin{aligned}
a\leqslant b\to c \quad &\text{当且仅当} \quad a\otimes b\leqslant c,\\
&\text{当且仅当} \quad b\otimes a\leqslant c,\\
&\text{当且仅当} \quad b\leqslant a\to c.
\end{aligned}
$$

所以($R_6$)成立.

反之，设($R_6$)成立，则由(A)知

$$
\begin{aligned}
a\otimes b\leqslant x \quad &\text{当且仅当} \quad a\leqslant b\to x,\\
&\text{当且仅当} \quad b\leqslant a\to x,\\
&\text{当且仅当} \quad b\otimes a\leqslant x.
\end{aligned}
$$

所以由 $x$ 的任意性即得($M_6$).

($M_7$) ~ ($R_7$)：

设($M_7$)成立，则由($A''$)与($M_0$)得

$$(a\to b)\otimes(a\otimes c)\leqslant((a\to b)\otimes a)\otimes c\leqslant b\otimes c.$$

故由(A)得

$$(a\to b)\leqslant((a\otimes c)\to(b\otimes c)).$$

即($R_7$)成立.

反之，设$(a\otimes b)\otimes c\leqslant x$，则由(A)得 $a\otimes b\leqslant(c\to x)$ 或 $a\leqslant(b\to(c\to x))$. 设($R_7$)成立，则由($A''$)与($R_0$)得

$$
\begin{aligned}
a&\leqslant(b\to(c\to x))\leqslant[(b\otimes c)\to((c\to x)\otimes c)]\\
&\leqslant((b\otimes c)\to x).
\end{aligned}
$$

那么由(A)就得到 $a\otimes(b\otimes c)\leqslant x$. 所以由 $x$ 的任意性即得($M_7$).

($M_8$) ~ ($R_8$)：

设($M_8$)成立，则由(A)得

$$
\begin{aligned}
x\leqslant((a\otimes b)\to c)\quad &\text{当且仅当}\quad x\otimes(a\otimes b)\leqslant c,\\
&\text{当且仅当}\quad (x\otimes a)\otimes b\leqslant c,\\
&\text{当且仅当}\quad x\otimes a\leqslant(b\to c),\\
&\text{当且仅当}\quad x\leqslant(a\to(b\to c)).
\end{aligned}
$$

由 $x$ 的任意性即得($R_8$).

反过来，由(A)以及($R_8$)得

$$
\begin{aligned}
(a\otimes b)\otimes c\leqslant x\quad &\text{当且仅当}\quad a\otimes b\leqslant(c\to x),\\
&\text{当且仅当}\quad a\leqslant(b\to(c\to x)),\\
&\text{当且仅当}\quad a\leqslant((b\otimes c)\to x),\\
&\text{当且仅当}\quad a\otimes(b\otimes c)\leqslant x.
\end{aligned}
$$

由 $x$ 的任意性即得($M_8$).

### 7.2.2　剩余格

**定义 7.2.9**　有界格 $L$ 叫**剩余格**(residuated lattice)，若

i) $L$ 上有伴随对($\otimes$, $\to$).

ii) $\langle L, \otimes, 1\rangle$ 是带单位元 1 的交换半群，这里 1 是 $L$ 的最大元.

这时 $L$ 常记作 $\langle L, \otimes, \to\rangle$.

**定理 7.2.10**　设 $\langle L, \otimes, \to\rangle$ 是剩余格，则

i) ($M_i$)与($R_i$)($i=0, 1, \cdots, 8$)都成立.

ii) $a\otimes b\leqslant a\wedge b$.

iii) $(a\to b\wedge c)=(a\to b)\wedge(a\to c)$, $(a\vee b\to c)=(a\to c)\wedge(b\to c)$.

**证**　i) 只需证($R_1$)与($M_i$)成立($i=1, \cdots, 8$). 由定义 7.2.1 与命题 7.2.3 知($M_1$)与($R_1$)成立. 由 $L$ 关于$\otimes$构成交换半群且 1 是乘法$\otimes$的单位知($M_3$) ~ ($M_8$)成立. 所以只剩下证明($M_2$)成立. 事实上，由($M_1$)知 $f(x)=x\otimes a$ 保存在并，那么由交换律知 $g(x)=a\otimes x$ 也保存在并，即($M_2$)成立.

ii) 由($M_0$)知 $a\otimes b\leqslant a\otimes 1$, $a\otimes b\leqslant 1\otimes b$, 所以由($M_4$)与($M_5$)得

$$a\otimes b\leqslant(a\otimes 1)\wedge(1\otimes b)=a\wedge b.$$

iii) 由($R_1$)与($R_2$)即得此两特例.

**推论 7.2.11**　当 $m\leqslant n$ 时 $a^n\leqslant a^m$, 这里

$$a^k=\underbrace{a\otimes a\otimes\cdots\otimes a}_{k\text{个}}.$$

**证**　以 $a^3\leqslant a^2$ 为例，

$$a^3=a\otimes a\otimes a\leqslant(a\otimes a)\wedge a\leqslant a\otimes a=a^2.$$

一般情形的证明与上式类似，略去. 由于有结合律成立，所以在上面我们略去了多个因子相乘时的括号.

**例7.2.12** 设$L=[0,1]$，则$L$按例7.2.7中的三种伴随对都构成剩余格. 下面是剩余格的进一步例子.

i) 设$L$是Boole代数，则$L$关于乘法$\wedge$构成带单位1的交换半群. $\wedge$显然满足$(M_0)$（取$\otimes$为$\wedge$）. 规定$a\to b=a'\vee b$. 这里$a'$是$a$的补元，则$\to$显然满足$(R_0)$. 又设$a\wedge b\leqslant c$，则$(a\wedge b)\vee b'\leqslant b'\vee c$. 但$(a\wedge b)\vee b'=(a\vee b')\wedge(b\vee b')=(a\vee b')\wedge 1=a\vee b'\geqslant a$，所以$a\leqslant b'\vee c=b\to c$. 反过来，设$a\leqslant b\to c=b'\vee c$，则$a\wedge b\leqslant(b'\vee c)\wedge b=(b'\wedge b)\vee(c\wedge b)=0\vee(c\wedge b)\leqslant c$. 所以

$$a\wedge b\leqslant c \quad 当且仅当 \quad a\leqslant b\to c. \tag{7.2.18}$$

即条件(A)成立. 所以$(\wedge,\to)$是$L$上的伴随对，$\langle L,\wedge,\to\rangle$是剩余格.

ii) 设$L$是有界Heyting代数，则$\to$正是通过(7.2.18)式而定义的. 这时可证$\langle L,\wedge,\to\rangle$仍构成剩余格，只是$a\to b$的表达式已不能用$a'\vee b$表示，因为在一般的Heyting代数中补元不存在. 请读者自行证明这时$\to$由Gödel的蕴涵算子(7.2.8)式确定. 与例7.2.7的ii)不同，那里$L=[0,1]$，而此处$L$可为一般的有界Heyting代数，即$L$是具有最大元1与最小元0的格，$L$上有一个按(7.2.8)式定义的满足(7.2.18)式的二元运算$\to$（见文献[35,36]）.

iii) 设$R$是带单位1的交换环，$\vartheta(R)$是$R$中的理想按包含序所成之完备格. 在$\vartheta(R)$上定义两个二元运算$\otimes$与$\to$如下：设$\mathscr{A}$，$\mathscr{B}$是$R$中的理想，则

$$\mathscr{A}\otimes\mathscr{B}=\left\{\sum_{i=1}^{n}a_ib_i \mid a_i\in\mathscr{A},\ b_i\in\mathscr{B},\ n\in\mathbf{N}\right\},$$

$$\mathscr{A}\to\mathscr{B}=\{x\in R\mid xa\in\mathscr{B}\text{对每个}a\in\mathscr{A}\text{都成立}\}.$$

可以证明$\langle\vartheta(R),\otimes,\to\rangle$是剩余格.

事实上，上面已经说过$\vartheta(R)$是一个完备格. 首先回忆交换环$R$的一个理想$I$是$R$的一个子环满足条件$rI\subset I$对每个$r$都成立，这里$rI=\{rx\mid x\in I\}$. $R$的一个非空子集$S$构成$R$的一个理想的充要条件是$S$对差运算封闭，且对每个$r\in R$均有$rS\subset S$（见文献[38]）. 据此可验证$\vartheta(R)$对运算$\otimes$与$\to$都是封闭的. 以$\otimes$为例，设$\sum_{i=1}^{n}a_ib_i$是$\mathscr{A}\otimes\mathscr{B}$中任一元，$r\in R$，则

$$r\sum_{i=1}^{n}a_ib_i=\sum_{i=1}^{n}(ra_i)b_i$$

仍为$\mathscr{A}\otimes\mathscr{B}$的元，因为$ra_i\in\mathscr{A}\ (i=1,\cdots,n)$，所以$r(\mathscr{A}\otimes\mathscr{B})\subset\mathscr{A}\otimes\mathscr{B}$. 又设$\sum_{i=1}^{n}a_ib_i$，$\sum_{j=1}^{m}c_jd_j\in\mathscr{A}\otimes\mathscr{B}$，则由

$$\sum_{i=1}^{n}a_ib_i-\sum_{j=1}^{m}c_jd_j=\sum_{k=1}^{n+m}x_ky_k,\quad x_k\in\mathscr{A},\ y_k\in\mathscr{B}\quad(k=1,\cdots,n+m).$$

知$\mathscr{A}\otimes\mathscr{B}$对差运算封闭，这里

$$x_k = \begin{cases} a_k, & k \leqslant n, \\ -c_{k-n}, & k > n, \end{cases} \qquad y_k = \begin{cases} b_k, & k \leqslant n, \\ d_{k-n}, & k > n. \end{cases}$$

所以 $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$ 仍为 $R$ 中的理想，即 $\vartheta(R)$ 关于乘法 $\otimes$ 运算封闭. 又 $\otimes$ 显然是交换的与结合的，且 $R$ 是 $\vartheta(R)$ 中的乘法单位，所以 $\langle \vartheta(R), \otimes, R\rangle$ 是带单位的交换半群. 以下证明 $(\otimes, \rightarrow)$ 是 $\vartheta(R)$ 上的伴随对.

事实上，设 $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B} \subset \mathscr{C}$, $a \in \mathscr{A}$. 因为对每个 $b \in \mathscr{B}$ 均有 $ab \in \mathscr{A} \otimes \mathscr{B} \subset \mathscr{C}$ 成立，所以 $a \in \mathscr{B} \rightarrow \mathscr{C}$. 这就证明了 $\mathscr{A} \subset \mathscr{B} \rightarrow \mathscr{C}$. 反过来，设 $\mathscr{A} \subset \mathscr{B} \rightarrow \mathscr{C}$, 则当 $a_i \in \mathscr{A}$, $b_i \in \mathscr{B}(i=1, \cdots, n)$ 时，由 $a_i \in \mathscr{B} \rightarrow \mathscr{C}$ 知 $a_i b_i \in \mathscr{C}(i=1, \cdots, n)$. 所以 $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \in \mathscr{C}$. 这就证明了 $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B} \subset \mathscr{C}$.

综上所述知 $\langle \vartheta(R), \otimes, \rightarrow\rangle$ 是剩余格.

iv) 设 $R = \mathbf{Z}_{12}$，即 $R$ 是整数模 12 环，则 $R$ 是带单位的交换环. 令 $\mathscr{A} = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \overline{10}\}$，则

$$\mathscr{A} \otimes \mathscr{A} = \{\bar{0}, \bar{4}, \bar{8}\} \neq \mathscr{A},$$

可见，乘法 $\otimes$ 不是幂等的. 又 $\mathscr{B} = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}\}$ 是 $\vartheta(R)$ 中与 $\mathscr{A}$ 互不包含的理想，所以 $\vartheta(R)$ 按包含序不构成链.

v) 设 $C_{m+1} = \{a_i \mid 0 \leqslant i \leqslant m\}$, $0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_m = 1$. 规定

$$a_k \otimes a_p = a_{\max(0,\, k+p-m)}, \tag{7.2.19}$$

$$a_k \rightarrow a_p = a_{\min(m,\, m-k+p)}, \tag{7.2.20}$$

则可证 $\langle C_{m+1}, \otimes, \rightarrow\rangle$ 是剩余格，叫 $m+1$ 元 **Łukasiewicz 链**.

又若规定

$$a \rightarrow b = \begin{cases} a_m, & a \leqslant b, \\ b, & a > b, \end{cases}$$

则 $(\wedge, \rightarrow)$ 是 $C_{m+1}$ 上的又一伴随对，称剩余格 $\langle C_{m+1}, \wedge, \rightarrow\rangle$ 为 $m+1$ 元 **Heyting 链**. 请读者完成以上的证明.

**注 7.2.13** 由例 7.2.12 的 v) 可见，$C_{m+1}$ 上有不同的伴随对使其成为剩余格. 以 $n(m)$ 记这种不同剩余格的数目，则在一定条件下可证下面的事实成立（见文献[21]）：

| $m$ | 1 | 2 | 3 | 4 | … | $k \geqslant 5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $n(m)$ | 1 | 2 | 6 | 22 | … | $(k+5) \cdot 2^{k-4}$ |

又 $[0, 1]$ 上则有不少于 $2^{\omega}$ 个不同的伴随对. 比如，在例 7.2.7 中，我们介绍了 $[0, 1]$ 上的 Łukasiewicz 伴随对 $(\otimes, \rightarrow)$，由 (7.2.7) 式与 (7.2.6) 式确定. 请读者自行证明 $(\times, \Rightarrow)$ 是 $[0, 1]$ 上的另一个伴随对，这里 $\times$ 是普通乘法运算，且

$$a \Rightarrow b = \begin{cases} 1, & a \leqslant b, \\ b/a, & a > b. \end{cases}$$

最后，请读者证明对于Łukasiewicz 的乘法⊗而言，

$$x^n = x \otimes \cdots \otimes x = 0 \vee [1 - n(1 - x)], \qquad (7.2.21)$$

从而当 $x<1$ 且 $n>\dfrac{1}{1-x}$ 时 $x^n=0$.

以下讨论剩余格的进一步的性质.

**定理 7.2.14**　设 $\langle L, \otimes, \rightarrow\rangle$ 是剩余格，规定

$$a \leftrightarrow b = (a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow a), \quad a, b \in L, \qquad (7.2.22)$$

则以下性质 $(\mathrm{B}_i)(i=1, \cdots, 8)$ 成立：

$(\mathrm{B}_1)$　$a \leftrightarrow 1 = a$.

$(\mathrm{B}_2)$　$a=b$　当且仅当　$a \leftrightarrow b = 1$.

$(\mathrm{B}_3)$　$a \leftrightarrow b = b \leftrightarrow a$.

$(\mathrm{B}_4)$　$(a \leftrightarrow b) \otimes (b \leftrightarrow c) \leqslant a \leftrightarrow c$.

$(\mathrm{B}_5)$　$(a_1 \leftrightarrow b_1) \wedge (a_2 \leftrightarrow b_2) \leqslant ((a_1 \wedge a_2) \leftrightarrow (b_1 \wedge b_2))$.

$(\mathrm{B}_6)$　$(a_1 \leftrightarrow b_1) \wedge (a_2 \leftrightarrow b_2) \leqslant ((a_1 \vee a_2) \leftrightarrow (b_1 \vee b_2))$.

$(\mathrm{B}_7)$　$(a_1 \leftrightarrow b_1) \otimes (a_2 \leftrightarrow b_2) \leqslant ((a_1 \otimes a_2) \leftrightarrow (b_1 \otimes b_2))$.

$(\mathrm{B}_8)$　$(a_1 \leftrightarrow b_1) \otimes (a_2 \leftrightarrow b_2) \leqslant ((a_1 \rightarrow a_2) \leftrightarrow (b_1 \rightarrow b_2))$.

**证**　性质 $(\mathrm{B}_1)-(\mathrm{B}_3)$ 是显然的，以下证明 $(\mathrm{B}_4)-(\mathrm{B}_8)$.

$(\mathrm{B}_4)$：由 $(\mathrm{R}_3)$ 有

$$(b \rightarrow c) \leqslant ((a \rightarrow b) \rightarrow (a \rightarrow c)).$$

再由 $(\mathrm{R}_6)$ 即得

$$(a \rightarrow b) \leqslant ((b \rightarrow c) \rightarrow (a \rightarrow c)),$$

所以由(A)得

$$(a \rightarrow b) \otimes (b \rightarrow c) \leqslant (a \rightarrow c),$$

从而

$$(a \leftrightarrow b) \otimes (b \leftrightarrow c) \leqslant (a \rightarrow c). \qquad (7.2.23)$$

同理

$$(c \leftrightarrow b) \otimes (b \leftrightarrow a) \leqslant (c \rightarrow a),$$

即

$$(a \leftrightarrow b) \otimes (b \leftrightarrow c) \leqslant (c \rightarrow a). \qquad (7.2.24)$$

由(7.2.23)式和(7.2.24)式即得 $(\mathrm{B}_4)$.

$(\mathrm{B}_5)$：由(7.2.22)式以及条件 $(\mathrm{M}_0)$ 与 $(\mathrm{A}'')$ 得

$$\begin{aligned} &((a_1 \leftrightarrow b_1) \wedge (a_2 \leftrightarrow b_2)) \otimes (a_1 \wedge a_2) \\ \leqslant &((a_1 \rightarrow b_1) \wedge (a_2 \rightarrow b_2)) \otimes (a_1 \wedge a_2) \end{aligned}$$

$$\leqslant ((a_1 \to b_1) \otimes a_1) \wedge ((a_2 \to b_2) \otimes a_2)$$
$$\leqslant b_1 \wedge b_2.$$

所以由(A)得

$$(a_1 \leftrightarrow b_1) \wedge (a_2 \leftrightarrow b_2) \leqslant ((a_1 \wedge a_2) \to (b_1 \wedge b_2)).$$

由↔的对称性即得$(B_5)$.

$(B_6)$:与$(B_5)$的证明类似，略去.

$(B_7)$:由⊗的交换性与结合性以及(7.2.22)、$(M_0)$与$(A'')$得

$$((a_1 \leftrightarrow b_1) \otimes (a_2 \leftrightarrow b_2)) \otimes (a_1 \otimes a_2)$$
$$= ((a_1 \leftrightarrow b_1) \otimes a_1) \otimes ((a_2 \leftrightarrow b_2) \otimes a_2)$$
$$\leqslant ((a_1 \to b_1) \otimes a_1) \otimes ((a_2 \to b_2) \otimes a_2)$$
$$\leqslant b_1 \otimes b_2.$$

由此即可得出$(B_7)$.

$(B_8)$:请读者利用$(B_4)$自行完成证明.

**注 7.2.15**　注意 $a \otimes b \leqslant a \wedge b$，则由性质$(B_5)$-$(B_8)$得

$$(a_1 \leftrightarrow b_1) \otimes (a_2 \leftrightarrow b_2) \leqslant ((a_1 \square a_2) \leftrightarrow (b_1 \square b_2)). \tag{7.2.25}$$

这里□可为∧，∨，⊗，→中的任一个.(7.2.25)式还容易推广为

$$(a_1 \leftrightarrow b_1) \otimes \cdots \otimes (a_n \leftrightarrow b_n) \leqslant ((a_1 \square \cdots \square a_n) \leftrightarrow (b_1 \square \cdots \square b_n)), \tag{7.2.26}$$

这里当□取为→时，右边的运算□按从左到右的顺序进行.

### 7.2.3　匹配算子

将(7.2.26)式一般化，可引入匹配算子的概念.

**定义 7.2.16**　设$\langle L, \otimes, \to \rangle$是剩余格，$u: L^n \to L$ 是 $L$ 上的 $n$ 元运算$(n \in \boldsymbol{N})$. 若存在自然数 $k_1, \cdots, k_n$ 使

$$(a_1 \leftrightarrow b_1)^{k_1} \otimes \cdots \otimes (a_n \leftrightarrow b_n)^{k_n}$$
$$\leqslant (u(a_1, \cdots, a_n) \leftrightarrow u(b_1, \cdots, b_n)), \tag{7.2.27}$$
$$a_i, b_i \in L \quad (i = 1, \cdots, n)$$

成立，则称 $u$ 是 $L$ 上的**匹配算子**，这时也说 $u$ 与 $L$ **匹配**($u$ fits $L$)，或 $L$ **容许** $u$($L$ admits $u$). $k_1, \cdots, k_n$ 叫 $u$ 的**匹配指数**，这里的指数是关于乘法⊗而言的指数.

由(7.2.26)式可见，如果令 $u(a_1, \cdots, a_n)$ 为 $a_1 \wedge \cdots \wedge a_n$，$a_1 \vee \cdots \vee a_n$，$a_1 \otimes \cdots \otimes a_n$ 或$(\cdots((a_1 \to a_2) \to a_3) \to \cdots \to a_{n-1}) \to a_n$，则 $u$ 都与 $L$ 匹配，且匹配指数 $k_1 = \cdots = k_n = 1$. 又由推论 7.2.11 知 $u$ 的匹配指数不是唯一的.

**例 7.2.17**　i)Łukasiewicz 链 $C_{m+1}$上的任一 $n$ 元算子 $u$ 都与 $C_{m+1}$匹配.

事实上，由(7.2.19)式知对任一 $p < m$，

$$a_p{}^m = \underbrace{a_p \otimes \cdots \otimes a_p}_{m个} = a_{\max(0,\, mp-(m-1)m)}. \tag{7.2.28}$$

由 $p<m$ 得 $mp-(m-1)m\leqslant m((m-1)-(m-1))=0$，从而由(7.2.28)式得

$$a_p^m = a_0 \quad (p=0, 1, \cdots, m-1). \tag{7.2.29}$$

令 $k_1=\cdots=k_n=m$. 那么，当 $a_i=b_i(i=1, \cdots, n)$时由(7.2.20)式知(7.2.27)式右边等于 $a_m$，而当存在某 $a_j$ 与 $b_j$ 不相等时 $a_j\leftrightarrow b_j=a_p(p<m)$，由(7.2.29)知(7.2.27)式左边等于 $a_0$(因为由(7.2.19)式，$a_0\otimes x=a_0$). 所以(7.2.27)式恒成立.

ii)设 $L=[0, 1]$，$(\otimes, \to)$是 $L$ 上的Łukasiewicz 伴随对，则$\langle L, \otimes, \to\rangle$是剩余格. 这时 $L$ 上的 $n$ 元算子 $u:L^n\to L$ 叫 **Lipschitz 算子**，若存在正数 $C$ 使(7.2.30)式成立：

$$|u(x_1, \cdots, x_n)-u(y_1, \cdots, y_n)|\leqslant C\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|, \tag{7.2.30}$$
$$x_i, y_i\in[0, 1] \quad (i=1, \cdots, n).$$

可以证明 Lipschitz 算子 $u$ 与 $L$ 匹配. 首先，由(7.2.22)式与(7.2.6)式不难证明

$$x\leftrightarrow y=1-|x-y|. \tag{7.2.31}$$

再利用(7.2.21)式即得

$$(x\leftrightarrow y)^k=0\vee[1-k|x-y|] \quad (k=1, 2, \cdots). \tag{7.2.32}$$

设 $u$ 是 Lipschitz 算子，则由(7.2.30)式得

$$1-k\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|\leqslant 1-|u(x_1, \cdots, x_n)-u(y_1, \cdots, y_n)|. \tag{7.2.33}$$

这里 $k\in\mathbf{N}$，$k\geqslant C$. 注意，由(7.2.7)式有

$$a_1\otimes\cdots\otimes a_n=\left[\sum_{i=1}^{n}a_i-(n-1)\right]\vee 0, \tag{7.2.34}$$

则由(7.2.34)式、(7.2.32)式、(7.2.33)式与(7.2.31)式得

$$\begin{aligned}
&(x_1\leftrightarrow y_1)^k\otimes\cdots\otimes(x_n\leftrightarrow y_n)^k\\
\leqslant&\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i\leftrightarrow y_i)^k-(n-1)\right]\vee 0\\
=&\left[\sum_{i=1}^{n}(1-k|x_i-y_i|)\vee 0-(n-1)\right]\vee 0\\
=&\left(1-k\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|\right)\vee 0\\
\leqslant&1-|u(x_1, \cdots, x_n)-u(y_1, \cdots, y_n)|\\
=&u(x_1, \cdots, x_n)\leftrightarrow u(y_1, \cdots, y_n).
\end{aligned}$$

所以 $u$ 与 $L$ 匹配. 其匹配指数可取 $k_1=\cdots=k_n=k\geqslant C$.

**命题 7.2.18** 设 $L=[0, 1]$，$(\otimes, \to)$是Łukasiewicz 伴随对，$u:L^n\to L$ 是与 $L$

匹配的算子当且仅当 $u$ 是 Lipschitz 算子.

**证**　由(7.2.34)式与(7.2.32)式得

$$\begin{aligned}&(x_1\leftrightarrow y_1)^k\otimes\cdots\otimes(x_n\leftrightarrow y_n)^k\\ \geqslant&\sum_{i=1}^{n}(x_i\leftrightarrow y_i)^k-(n-1)\\ \geqslant&n-k\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|-(n-1)\\ =&1-k\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|.\end{aligned}\tag{7.2.35}$$

设 $u$ 与 $L$ 匹配, 则有自然数 $k_1,\cdots,k_n$ 使(7.2.27)式成立. 取 $k=\max(k_1,\cdots,k_n)$,则由推论 7.2.11 知 $k,\cdots,k$ 仍为 $u$ 的匹配指数. 这时由(7.2.31)式、(7.2.27)式与(7.2.35)式得

$$\begin{aligned}&|u(x_1,\cdots,x_n)-u(y_1,\cdots,y_n)|\\ =&1-(u(x_1,\cdots,x_n)\leftrightarrow u(y_1,\cdots,y_n))\\ \leqslant&1-(x_1\leftrightarrow y_1)^k\otimes\cdots\otimes(x_n\leftrightarrow y_n)^k\\ \leqslant&k\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|.\end{aligned}\tag{7.2.36}$$

由(7.2.36)式知 $u$ 是 Lipschitz 算子.

反过来, 从例 7.2.17ii)中已看到每个 Lipschitz 算子均与 $L$ 匹配.

**推论 7.2.19**　设 $L=[0,1]$, $(\times,\Rightarrow)$是注 7.2.13 中所说的伴随对, 则$\Rightarrow$作为 $L$ 上的二元运算与$\langle L,\otimes,\rightarrow\rangle$不匹配.

**证**　因为当 $a>b$ 时, $(a\Rightarrow b)=b/a$, $\Rightarrow$显然不满足 Lipschitz 条件(7.2.30), 所以$\Rightarrow$与$\langle L,\otimes,\rightarrow\rangle$不匹配.

**例 7.2.20**　设 $L=[0,1]$, 则$\langle L,\times,\Rightarrow\rangle$是剩余格, 设$(\otimes,\rightarrow)$是 Łukasiewicz 伴随对, 则二元算子$\otimes$与$\rightarrow$都不与$\langle L,\times,\Rightarrow\rangle$匹配.

**证**　注意, 当 $a\leqslant b$ 时, $(a\Rightarrow b)=1$;当 $a>b$ 时, $(a\Rightarrow b)=b/a$, 则易证

$$(a\Leftrightarrow b)=\frac{a\wedge b}{a\vee b},\quad a\text{ 与 }b\text{ 不全为 }0.\tag{7.2.37}$$

又当 $a=b=0$ 时, $(a\Leftrightarrow b)=1$.

先令 $a_1=a_2=1$, $b_1=b_2=1/2$, 则由(7.2.37)式得

$$(a_1\Leftrightarrow b_1)^{k_1}\times(a_2\Leftrightarrow b_2)^{k_2}=\left(\frac{1}{2}\right)^{k_1+k_2}>0.$$

但由(7.2.7)式与(7.2.37)式得

$$((a_1\otimes a_2)\Leftrightarrow(b_1\otimes b_2))=(1\Leftrightarrow 0)=0.$$

可见, $\otimes$不与$\langle L,\times,\Rightarrow\rangle$匹配.

再令 $a_1=1/2$, $b_1=1$, $a_2=b_2=0$, 则

$$(a_1\Leftrightarrow b_1)^{k_1}\times(a_2\Leftrightarrow b_2)^{k_2}=\left(\frac{1}{2}\right)^{k_1}>0.$$

但

$$((a_1\to a_2)\Leftrightarrow(b_1\to b_2))=\left(\frac{1}{2}\Leftrightarrow 0\right)=0.$$

可见, $\to$也不与$\langle L,\times,\Rightarrow\rangle$匹配.

**定理 7.2.21** 设$\langle L,\otimes,\to\rangle$是剩余格, $\mathscr{U}$是一族与 $L$ 匹配的算子, 则由 $\mathscr{U}$ 以及$\wedge$, $\vee$, $\otimes$, $\to$和 $L$ 中的常元按任意方式复合所得的算子都与 $L$ 匹配.

**证** 首先注意凡零元算子(即 $L$ 中的元)都与 $L$ 匹配, 因为这时(7.2.27)式右边为$(a\leftrightarrow a)=1$. 又由(7.2.25)式知$\wedge$, $\vee$, $\otimes$与$\to$也都与 $L$ 匹配.

设$f:L^n\to L$ 与 $L$ 匹配, 匹配指数为 $k_1,\cdots,k_n$. 又对每个 $i\leqslant n$, $g_i:L^{m_i}\to L$ 与 $L$ 匹配, 匹配指数为 $k_{i1},\cdots,k_{im_i}$. 令 $s_i=m_1+\cdots+m_i(i=1,\cdots,n)$. 定义映射 $q:\{1,2,\cdots,s_n\}\to\{1,2,\cdots,n\}$为

$$q(j)=i\quad 当且仅当\ s_{i-1}<j\leqslant s_i\quad(s_0=0).\tag{7.2.38}$$

(7.2.38)式的意义是:把从 1 到 $s_n$ 的整数分成 $n$ 段:

$$\begin{aligned}&第1段\quad 1,2,\cdots,m_1,\\&第2段\quad m_1+1,\cdots,m_1+m_2,\\&\qquad\cdots\cdots\\&第n段\quad s_{n-1}+1,\cdots,s_n.\end{aligned}$$

而 $q(j)$表示整数$j$所在段的序号. $j$在其所在段中的序号为$j-s_{q(j)-1}$.

设$p:\{1,\cdots,s_n\}\to\{1,\cdots,m\}(m\geqslant 1)$是任意给定的映射. 考虑$f$与各$g_i$复合所得之 $m$ 元算子

$$\begin{aligned}h(x_1,\cdots,x_m)=f[&g_1(x_{p(1)},\cdots,x_{p(s_1)}),\cdots,\\&g_n(x_{p(s_{n-1}+1)},\cdots,x_{p(s_n)})].\end{aligned}$$

以下证明 $h$ 与 $L$ 匹配, 且匹配指数为

$$k^{(i)}=\sum_{p(j)=i}k_{q(j)}\cdot k_{q(j),j-s_{q(j)-1}}\quad(i=1,\cdots,m).$$

事实上,

$$\begin{aligned}&(x_1\leftrightarrow y_1)^{k(1)}\otimes\cdots\otimes(x_m\leftrightarrow y_m)^{k(m)}\\&=[(x_{p(1)}\leftrightarrow y_{p(1)})^{k_{11}}\otimes\cdots\otimes(x_{p(s_1)}\leftrightarrow y_{p(s_1)})^{k_{1m_1}}]^{k_1}\otimes\cdots\\&\quad\otimes[(x_{p(s_{n-1}+1)}\leftrightarrow y_{p(s_{n-1}+1)})^{k_{n1}}\otimes\cdots\otimes(x_{p(s_n)}\leftrightarrow y_{p(s_n)})^{k_{nm_n}}]^{k_n}\\&\leqslant[g_1(x_{p(1)},\cdots,x_{p(s_1)})\leftrightarrow g_1(y_{p(1)},\cdots,y_{p(s_1)})]^{k_1}\otimes\cdots\\&\quad\otimes[g_n(x_{p(s_{n-1}+1)},\cdots,x_{p(s_n)})\leftrightarrow g_n(y_{p(s_{n-1}+1)},\cdots,y_{p(s_n)})]^{k_n}\\&\leqslant h(x_1,\cdots,x_m)\leftrightarrow h(y_1,\cdots,y_m).\end{aligned}$$

所以 $h$ 与 $L$ 匹配.

**注 7.2.22**　给定任一 $n$ 元算子 $f: L^n \to L$. 令 $n$ 个自变量相等: $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = x$, 则得出一个 1 元算子 $f(x, \cdots, x)$. 类似地, 从 $f$ 也可作出 2 元、3 元, 以致 $n-1$ 元算子. 对复合算子而言也有类似情况. 这正是在以上证明中提出映射 $p$ 的原因所在.

### 7.2.4　强剩余格

强剩余格就是在剩余格上添加上一组与其匹配的算子以后所得的具有多种运算的格.

**定义 7.2.23**　设 $\langle L, \otimes, \to \rangle$ 是剩余格, $\mathscr{U}$ 是一族与 $L$ 匹配的算子, 则称 $\mathscr{E} = \langle\langle L, \otimes, \to\rangle, \mathscr{U}\rangle$ 为**强剩余格**, 简记为 $\mathscr{E} = \langle L, \mathscr{U}\rangle$ 或 $L$.

**定义 7.2.24**　设 $\langle\langle L, \otimes, \to\rangle, \mathscr{U}\rangle$ 是强剩余格, $\mathscr{U} = \{u_d \mid d \in \Delta\}$, 以 $Ar(d)$ 记 $u_d$ 的元数, 以 $Ex(d)$ 记 $u_d$ 的匹配指数 $\langle k_1^{(d)}, \cdots, k_{Ar(d)}^{(d)}\rangle$, 则 $Ar: \Delta \to \boldsymbol{N}$ 与 $Ex: \Delta \to \boldsymbol{N}^+$ 都是映射, 称映射 $Ar$ 为此强剩余格的**型**, $\langle Ar, Ex\rangle$ 为**全型**.

**注 7.2.25**　对于与 $L$ 匹配的算子 $u$ 来说, 把匹配指数增大后仍得到 $u$ 的匹配指数. 所以两个强剩余格只要有相同的型, 就可以有相同的全型.

**定义 7.2.26**　设 $\mathscr{E}_1 = \langle\langle L_1, \otimes_1, \to_1\rangle, \mathscr{U}_1\rangle$, $\mathscr{E}_2 = \langle\langle L_2, \otimes_2, \to_2\rangle, \mathscr{U}_2\rangle$ 有相同的型 $Ar: \Delta \to \boldsymbol{N}$, 则映射 $f: L_1 \to L_2$ 叫 **$Ar$ 型同态**, 或 **$\mathscr{E}_1(\mathscr{E}_2)$ 同态**, 是指

i) $f$ 分别把 $L_1$ 的最大元 1 与最小元 0 映成 $L_2$ 的最大元 1 与最小元 0.

ii) $f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b)$,　$f(a \vee b) = f(a) \vee f(b)$,

　$f(a \otimes_1 b) = f(a) \otimes_2 f(b)$,　$f(a \to_1 b) = f(a) \to_2 f(b)$.

iii) 设 $d \in \Delta$, 分别以 $u$ 与 $v$ 记 $\mathscr{U}_1$ 中与 $\mathscr{U}_2$ 中的 $Ar(d)$ 元算子, 则

$$f(u(a_1, \cdots, a_{Ar(d)})) = v(f(a_1), \cdots, f(a_{Ar(d)})).$$

**定义 7.2.27**　设 $\mathscr{E} = \langle\langle L, \otimes, \to\rangle, \mathscr{U}\rangle$ 是强剩余格, $\approx$ 是 $L$ 上的等价关系.

i) 若等价关系 $\approx$ 在 $\wedge$, $\vee$, $\otimes$, $\to$ 运算之下被保持, 则称 $\approx$ 为 **$L$ 上的同余关系**.

ii) 若等价关系 $\approx$ 在 $\wedge$, $\vee$, $\otimes$, $\to$ 以及 $\mathscr{U}$ 中各运算之下都被保持, 则称 $\approx$ 为 **$\mathscr{E}$ 同余关系**.

**定义 7.2.28**　设 $L = \langle L, \otimes, \to\rangle$ 是剩余格, $\mathscr{F} \subset L$. 若下列条件成立:

$(\mathrm{F}_1)$　$1 \in \mathscr{F}$;

$(\mathrm{F}_2)$　$a \in \mathscr{F}$, $b \geqslant a$ 时 $b \in \mathscr{F}$;

$(\mathrm{F}_3)$　$a, b \in \mathscr{F}$ 时 $a \otimes b \in \mathscr{F}$,

则称 $\mathscr{F}$ 为 $L$ 中的**滤子**.

**定理 7.2.29**　设 $\mathscr{E} = \langle L, \mathscr{U}\rangle$ 是强剩余格.

i) 若 $\approx$ 是 $L$ 上的同余关系, 则

$$\mathscr{F} = \{x \in L \mid x \approx 1\} \tag{7.2.39}$$

是 $L$ 中的滤子，记作 $\mathscr{F}(\approx)$.

ii) 若 $\mathscr{F}$ 是 $L$ 中的滤子，规定

$$x \approx y \quad \text{当且仅当} \quad (x \leftrightarrow y) \in \mathscr{F}, \tag{7.2.40}$$

则 $\approx$ 是 $\mathscr{E}$ 同余关系，记作 $\approx(\mathscr{F})$.

iii) 以 $\Sigma$ 记 $L$ 中全体滤子之集，以 $\Gamma$ 记 $\mathscr{E}$ 上的全体同余关系之集，则

$$\varphi: \Sigma \to \Gamma, \quad \varphi(\mathscr{F}) = \approx(\mathscr{F}) \tag{7.2.41}$$

与

$$\psi: \Gamma \to \Sigma, \quad \psi(\approx) = \mathscr{F}(\approx) \tag{7.2.42}$$

都是一一对应且 $\psi \circ \varphi = 1_\Sigma$，$\varphi \circ \psi = 1_\Gamma$，即

$$\mathscr{F}(\approx(\mathscr{F})) = \mathscr{F}, \quad \approx(\mathscr{F}(\approx)) = \approx. \tag{7.2.43}$$

**证** i) 由 $1 \approx 1$ 知 $(F_1)$ 成立. 设 $a \in \mathscr{F}$，$b \geqslant a$，则 $a \approx 1$，$a \vee b = b$. 由 $\approx$ 为 $L$ 上的同余关系得

$$b = (a \vee b) \approx (1 \vee b) = 1.$$

即 $b \approx 1$，那么 $b \in \mathscr{F}$，从而 $(F_2)$ 成立. 最后设 $a$，$b \in \mathscr{F}$，则 $a \approx 1$，$b \approx 1$. 那么 $a \otimes b \approx 1 \otimes 1 = 1$. 故 $(F_3)$ 成立. 所以由 (7.2.39) 式确定的 $\mathscr{F}$ 是 $L$ 中的滤子.

ii) 先证由 (7.2.40) 式确定的 $\approx$ 是 $L$ 上的等价关系. 事实上，由 $(x \leftrightarrow x) = 1 \in \mathscr{F}$ 知 $x \approx x$. $\approx$ 显然是对称的. 再设 $x \approx y$，$y \approx z$，则 $(x \leftrightarrow y) \in \mathscr{F}$，$(y \leftrightarrow z) \in \mathscr{F}$，那么 $(x \leftrightarrow y) \otimes (y \leftrightarrow z) \in \mathscr{F}$. 由条件 $(B_4)$，$(x \leftrightarrow z) \geqslant ((x \leftrightarrow y) \otimes (y \leftrightarrow z))$，所以 $(x \leftrightarrow z) \in \mathscr{F}$，即 $x \approx z$. 所以 $\approx$ 是 $L$ 上的等价关系.

设 $u$ 是 $\mathscr{U}$ 中与 $L$ 匹配的 $n$ 元算子，$x_i \approx y_i (i = 1, \cdots, n)$，则 $(x_i \leftrightarrow y_i) \in \mathscr{F}$，$(x_i \leftrightarrow y_i)^{k_i} \in \mathscr{F} (i = 1, \cdots, n)$，从而

$$(x_1 \leftrightarrow y_1)^{k_1} \otimes \cdots \otimes (x_n \leftrightarrow y_n)^{k_n} \in \mathscr{F}.$$

那么由 (7.2.27) 式知 $(u(x_1, \cdots, x_n) \leftrightarrow u(y_1, \cdots, y_n)) \in \mathscr{F}$，即 $u(x_1, \cdots, x_n) \approx u(y_1, \cdots, y_n)$. 因为 $u$ 是 $\mathscr{U}$ 中任意与 $L$ 匹配的算子，也包括 $\wedge$，$\vee$，$\otimes$ 与 $\to$ 在内，所以 $\approx$ 是 $\mathscr{E}$ 同余关系.

iii) 为证 (7.2.43) 式我们需要一个如下引理.

**引理 7.2.30** 设 $\approx$ 是 $\langle L, \otimes, \to \rangle$ 上的同余关系，则

$$(x \leftrightarrow y) \approx 1 \quad \text{当且仅当} \quad x \approx y. \tag{7.2.44}$$

**证** 设 $x \approx y$，则 $(x \leftrightarrow y) \approx (y \leftrightarrow y)$，即 $(x \leftrightarrow y) \approx 1$. 反过来，设 $(x \leftrightarrow y) \approx 1$，则 $(x \otimes 1) \approx (x \otimes (x \leftrightarrow y))$，即

$$x \approx (x \otimes (x \leftrightarrow y)). \tag{7.2.45}$$

又由 $(B_4)$ 知

$$(1 \leftrightarrow x) \otimes (x \leftrightarrow y) \leqslant (1 \leftrightarrow y).$$

由 $(B_1)$ 知此即

$$x \otimes (x \leftrightarrow y) \leqslant y.$$

所以

$$x \otimes (x \leftrightarrow y) = (x \otimes (x \leftrightarrow y)) \wedge y. \tag{7.2.46}$$

由(7.2.45)式与(7.2.46)式得 $x \approx x \wedge y$. 同理可证 $y \approx x \wedge y$, 所以 $x \approx y$. 引理证毕.

现在证明(7.2.43)式. 由(7.2.39)式与(7.2.40)式得

$$\begin{aligned} x \in \mathscr{F}(\approx(\mathscr{F})) \quad & \text{当且仅当} \quad x \approx (\mathscr{F})1, \\ & \text{当且仅当} \quad (x \leftrightarrow 1) \in \mathscr{F}, \\ & \text{当且仅当} \quad x \in \mathscr{F}. \end{aligned}$$

所以 $\mathscr{F}(\approx(\mathscr{F})) = \mathscr{F}$. 又由引理 7.2.30 得

$$\begin{aligned} x \approx (\mathscr{F}(\approx))y \quad & \text{当且仅当} \quad (x \leftrightarrow y) \in \mathscr{F}(\approx), \\ & \text{当且仅当} \quad (x \leftrightarrow y) \approx 1, \\ & \text{当且仅当} \quad x \approx y. \end{aligned}$$

所以 $\approx(\mathscr{F}(\approx)) = \approx$. 这就证明了(7.2.43)式.

由上述命题 iii)知, 对强剩余格 $\mathscr{E} = \langle\langle L, \otimes, \rightarrow\rangle, \mathscr{U}\rangle$ 而言, $\langle L, \otimes, \rightarrow\rangle$ 中的滤子 $\mathscr{F}$ 可决定 $\mathscr{E}$ 上的一个同余关系 $\approx(\mathscr{F})$, 从而商 $\mathscr{E}/\approx(\mathscr{F})$ 存在, 可简记为 $\mathscr{E}/\mathscr{F}$. 设

$$f: \mathscr{E} \to \mathscr{E}/\mathscr{F}$$

是典型射影映射, 则 $\mathscr{E}/\mathscr{F}$ 上的序可方便地通过 $\mathscr{F}$ 来介定, 即

$$fx \leqslant fy \quad \text{当且仅当} \quad (x \rightarrow y) \in \mathscr{F} \tag{7.2.47}$$

事实上,

$$\begin{aligned} fx \leqslant fy \quad & \text{当且仅当} \quad fx = (fx) \wedge (fy) = f(x \wedge y), \\ & \text{当且仅当} \quad (x \leftrightarrow (x \wedge y)) \in \mathscr{F}, \\ & \text{当且仅当} \quad (x \rightarrow (x \wedge y)) \in \mathscr{F}, \\ & \text{当且仅当} \quad (x \rightarrow x) \wedge (x \rightarrow y) \in \mathscr{F}, \\ & \text{当且仅当} \quad (x \rightarrow y) \in \mathscr{F}, \end{aligned}$$

故(7.2.47)式成立.

## 7.3　赋值格为强剩余格的命题演算公式代数

在 7.1 节中全体公式之集 $F$ 上没有任何结构, 但在实用上应当考虑 $F$ 上有各种运算的情形. 在 7.2 节中已详细讨论过带有足够多的运算的强剩余格的性质, 在本节中我们相应地在 $F$ 上也赋予各种运算. 只是请读者注意, Pavelka 的逻辑是基于直觉主义观点而建立的, 其中不涉及非运算. 当然, 可以认为那一组匹配算子 $\mathscr{U}$ 中为非运算留下了可能的位置.

### 7.3.1 $(P, \mathscr{E})$ 公式代数

**定义 7.3.1** 设 $\mathscr{E}=\langle\langle L, \otimes, \to\rangle, \mathscr{U}\rangle$是强剩余格，$P$ 是非空集，$P\cap L=\varnothing$. 则由$P\cup L$生成的

$$\langle\{a \mid a\in L\}, \wedge, \vee, \&, \Rightarrow, \{d \mid d\in\Delta\}\rangle$$

型自由代数叫做**基于 $P$ 的 $\mathscr{E}$值命题演算的公式代数**，简称为**$(P, \mathscr{E})$公式代数**，记作

$$F(P, \mathscr{E}) = \langle F(P, \mathscr{E}):\{a \mid a\in L\}, \wedge, \vee, \&, \Rightarrow, \{d \mid d\in\Delta\}\rangle. \tag{7.3.1}$$

$F(P, \mathscr{E})$中的元叫**$(P, \mathscr{E})$公式**，或简称**公式**. 以上$\wedge$，$\vee$，&，$\Rightarrow$为二元运算，对每个 $d\in\Delta$，$d$ 是 $Ar(d)$元运算，对每个 $a\in L$，$a$ 是零元运算. $P\cup L$ 中的元叫**原子公式**.

通俗地说，$F(P, \mathscr{E})$中的公式如下：

i)对每个 $\varphi\in P$，$\varphi$ 是公式.

ii)对每个 $a\in L$，$a$ 是公式.

iii)若 $\varphi$，$\psi$ 是公式，则 $\varphi\wedge\psi$，$\varphi\vee\psi$，$\varphi\&\psi$，$\varphi\Rightarrow\psi$ 也都是公式.

iv)设 $d\in\Delta$，$Ar(d)=n$，$\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ 是公式，则 $d(\varphi_1, \cdots, \varphi_n)$是公式.

v)再没有其他公式.

又$\wedge$，$\vee$，& 与$\Rightarrow$分别叫公式间的**合取**、**析取**、**联络**(context)与**蕴涵**.

对公式而言，我们作以下简写的约定：

$$\varphi\Leftrightarrow\psi \overset{\Delta}{=\!=} (\varphi\Rightarrow\psi)\wedge(\psi\Rightarrow\varphi),$$

$$\varphi_1\&\cdots\&\varphi_n = (\cdots((\varphi_1\&\varphi_2)\&\varphi_3)\&\cdots)\&\varphi_n,$$

$$\varphi^n = \underbrace{\varphi\&\cdots\&\varphi}_{n\text{个}},$$

并称 $\varphi^n$ 为 **$\varphi$ 的 $n$ 次联络幂或 $n$ 次幂**.

**定义 7.3.2** 设 $\mathscr{E}=\langle\langle L, \otimes, \to\rangle, \mathscr{U}\rangle$是强剩余格，$F(P, \mathscr{E})$是$(P, \mathscr{E})$公式代数，则 $\sigma_i(i=1, \cdots, 17)$的意义如下：

$\sigma_1(a, b)=((a\wedge b)\Rightarrow(a\wedge b))$,

$\sigma_2(a, b)=((a\Rightarrow b)\Rightarrow(a\to b))$,

$\sigma_3{}^d(a_1, \cdots, a_n)=(d(a_1, \cdots, a_n)\Leftrightarrow u_d(a_1, \cdots, a_n))$,

$\sigma_4(\varphi, \psi, \chi)=(\varphi\Rightarrow 1)$,

$\sigma_5(\varphi, \psi, \chi)=(\varphi\Rightarrow\varphi)$,

$\sigma_6(\varphi, \psi, \chi)=((\psi\Rightarrow\chi)\Rightarrow((\varphi\Rightarrow\psi)\Rightarrow(\varphi\Rightarrow\chi)))$,

$\sigma_7(\varphi, \psi, \chi)=((\varphi\Rightarrow(\psi\Rightarrow\chi))\Rightarrow(\psi\Rightarrow(\varphi\Rightarrow\chi)))$,

$\sigma_8(\varphi, \psi, \chi)=((\varphi\wedge\psi)\Rightarrow\varphi)$,

$\sigma_9(\varphi, \psi, \chi) = ((\varphi \wedge \psi) \Rightarrow \psi)$,

$\sigma_{10}(\varphi, \psi, \chi) = ((\chi \Rightarrow \varphi) \Rightarrow ((\chi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\chi \Rightarrow (\varphi \wedge \psi))))$,

$\sigma_{11}(\varphi, \psi, \chi) = (\varphi \Rightarrow (\varphi \vee \psi))$,

$\sigma_{12}(\varphi, \psi, \chi) = (\psi \Rightarrow (\varphi \vee \psi))$,

$\sigma_{13}(\varphi, \psi, \chi) = ((\varphi \Rightarrow \chi) \Rightarrow ((\psi \Rightarrow \chi) \Rightarrow ((\varphi \vee \psi) \Rightarrow \chi)))$,

$\sigma_{14}(\varphi, \psi, \chi) = (\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow (\varphi \& \psi)))$,

$\sigma_{15}(\varphi, \psi, \chi) = ((\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \chi)) \Rightarrow ((\varphi \& \psi) \Rightarrow \chi))$,

$\sigma_{16}(\varphi, \psi, \chi) = ((\varphi \& 1) \Leftrightarrow \varphi)$,

$\sigma_{17}{}^{d}(\varphi_1, \cdots, \varphi_n, \psi_1, \cdots \psi_n)$

$= (((\varphi_1 \Leftrightarrow \psi_1)^{k_1} \& \cdots \& (\varphi_n \Leftrightarrow \psi_n)^{k_n}) \Rightarrow (d(\varphi_1, \cdots, \varphi_n) \Leftrightarrow d(\psi_1, \cdots, \psi_n)))$.

注意，以上 $\sigma_1$-$\sigma_{17}$ 中，符号⇒或⇔两边都是公式. 又对每个 $a \in L$，$a$ 既是 $L$ 中的元，也是 $F(P, \mathscr{E})$ 中的公式. 在 $L$ 中 $a \wedge b$ 表示 $a$ 与 $b$ 的下确界，但在 $F(P, \mathscr{E})$ 中 $a \wedge b$ 作为公式则是纯形式上的符号. 在 $\sigma_1$ 的定义中，⇒右边的 $a \wedge b$ 是 $L$ 中 $a$ 与 $b$ 的下确界，它是 $L$ 中的**一个元**，也是 $F(P, \mathscr{E})$ 中的**一个公式**，是原子公式. 而⇒左边的 $a \wedge b$ 则是由 $F(P, \mathscr{E})$ 中**两个公式**复合而成的公式，不是原子公式. 对 $\sigma_2$，$\sigma_3$ 中⇒两边的公式也有同样的解释.

### 7.3.2　$\mathscr{E}$赋值

**定义 7.3.3**　映射 $T: F(P, \mathscr{E}) \to \mathscr{E}$ 叫**$\mathscr{E}$赋值**，简称**赋值**，若

i) $T$ 是 $\mathscr{E}$同态.

ii) 对每个 $a \in L$，$Ta = a$.

这时对每个 $\varphi \in F(P, \mathscr{E})$，$T\varphi$ 也叫做 $\varphi$ 的 **$T$ 赋值**.

**注 7.3.4**　如果把 $T\varphi$ 叫做 $\varphi$ 的解释，则 $\varphi \wedge \psi$，$\varphi \vee \psi$，$\varphi \& \psi$ 与 $\varphi \Rightarrow \psi$ 分别被 $T$ 解释为 $T\varphi \wedge T\psi$，$T\varphi \vee T\psi$，$T\varphi \otimes T\psi$，与 $T\varphi \to T\psi$. 对于 $d \in \Delta$，当 $Ar(d) = n$ 时，$Td(\varphi_1, \cdots, \varphi_n) = u_d(T\varphi_1, \cdots, T\varphi_n)$，即 $T$ 把公式 $d(\varphi_1, \cdots, \varphi_n)$ 解释为 $L$ 中的元 $u_d(T\varphi_1, \cdots, T\varphi_n)$.

**定义 7.3.5**　设 $\mathscr{E} = \langle\langle L, \otimes, \to\rangle, \mathscr{U}\rangle$ 是强剩余格且 $L$ 完备，$F(P, \mathscr{E})$ 是 $(P, \mathscr{E})$ 公式代数.

i) 设 $\mathscr{S} = \{T \in L^{F(P, \mathscr{E})} \mid T: F(P, \mathscr{E}) \to \mathscr{E}$ 是赋值$\}$，则称 $\mathscr{S}$ 为 $F(P, \mathscr{E})$ 上的 **$\mathscr{E}$ 语义**. 必要时 $\mathscr{S}$ 也写作 $\mathscr{S}(P, \mathscr{E})$.

ii) 以 $F$ 简记 $F(P, \mathscr{E})$. 称算子 $\mathrm{Con}_{\mathscr{S}}: L^F \to L^F$ 为 **$\mathscr{E}$-语义结论算子**，这里对每个 $X \in L^F$，

$$\mathrm{Con}_{\mathscr{S}} X = \wedge \{T \mid T \in \mathscr{S}, T \geq X\}, \tag{7.3.2}$$

且当 $(\mathrm{Con}_{\mathscr{S}} X)\varphi \geq a$ 时称公式 $\varphi$ 是 $X$ 关于 $\mathscr{S}$ 而言的 **$a$-语义结论**，记作 $(\mathscr{S}, a) X \models \varphi$.

iii) $\mathrm{Con}_{\mathscr{S}}\varnothing = \wedge\{T \mid T \in \mathscr{S}\}$ 叫 $F(P, \mathscr{E})$ 上的**$\mathscr{E}$-重言式 $L$-集**. 当 $(\mathrm{Con}_{\mathscr{S}}\varnothing)\varphi = 1$ 时称 $\varphi$ 为 $F(P, \mathscr{E})$ 中的**$\mathscr{E}$-重言式**.

**命题 7.3.6** $(\mathscr{S}, a)X \models (\varphi \Rightarrow \psi)$ 的充要条件是

$$当\ T \in \mathscr{S} 且\ T \geqslant X\ 时, \quad a \otimes T\varphi \leqslant T\psi.$$

**证** 由定义知 $(\mathscr{S}, a)X \models (\varphi \Rightarrow \psi)$ 的充要条件是

$$当\ T \in \mathscr{S} 且\ T \geqslant X\ 时, \quad T(\varphi \Rightarrow \psi) \geqslant a.$$

由 $T$ 是同态知 $T(\varphi \Rightarrow \psi) = T\varphi \to T\psi$, 所以由

$$T\varphi \to T\psi \geqslant a \quad 当且仅当 \quad a \otimes T\varphi \leqslant T\psi$$

知命题 7.3.6 成立.

**推论 7.3.7** $\varphi \Rightarrow \psi$ 是 $\mathscr{E}$-重言式当且仅当对每个 $T \in \mathscr{S}$ 均有 $T\varphi \leqslant T\psi$.

**命题 7.3.8** 设 $a, b \in L$, 则

i) $(\mathscr{S}, a)\varnothing \models a$.

ii) $(\mathscr{S}, a \otimes b)\varnothing \models (a \& b)$.

iii) $(\mathscr{S}, a \to b)\varnothing \models (a \Rightarrow b)$.

**证** 由对每个 $T \in \mathscr{S}$ 而言 $Ta = a$ 知 i) 成立. 由 $T(a \& b) = Ta \otimes Tb = a \otimes b$ 知 ii) 成立. 由 $T(a \Rightarrow b) = Ta \to Tb = a \to b$ 知 iii) 成立.

**定理 7.3.9** $\sigma_i (i = 1, \cdots, 17)$ 是 $\mathscr{E}$-重言式.

**证** 设 $T \in \mathscr{S}$, 则

$$\begin{aligned}
T\sigma_1 &= T((a \wedge b) \Rightarrow (a \wedge b)) \\
&= ((Ta \wedge Tb) \to T(a \wedge b)) \\
&= (a \wedge b \to a \wedge b) = 1, \\
T\sigma_2 &= (Ta \to Tb) \to T(a \to b) \\
&= ((a \to b) \to (a \to b)) = 1, \\
T\sigma_3{}^d &= Td(a_1, \cdots, a_n) \leftrightarrow Tu_d(a_1, \cdots, a_n) \\
&= u_d(Ta_1, \cdots, Ta_n) \leftrightarrow u_d(a_1, \cdots, a_n) \\
&= u_d(a_1, \cdots, a_n) \leftrightarrow u_d(a_1, \cdots, a_n) = 1, \\
T\sigma_4 &= T\varphi \to T1 = T\varphi \to 1 = 1, \\
T\sigma_5 &= T\varphi \to T\varphi = 1.
\end{aligned}$$

以下分别用 $a, b, c$ 表示 $T\varphi, T\psi, T\chi$, 则由 $(\mathrm{R}_3)$ 与 $(\mathrm{R}_5)$ 以及由 $(\mathrm{R}_8)$ 分别得

$$\begin{aligned}
T\sigma_6 &= ((T\psi \to T\chi) \to ((T\varphi \to T\psi) \to (T\varphi \to T\chi))) \\
&= ((b \to c) \to ((a \to b) \to (a \to c))) = 1, \\
T\sigma_7 &= ((T\varphi \to (T\psi \to T\chi)) \to (T\psi \to (T\varphi \to T\chi)))
\end{aligned}$$

$$=((a\to(b\to c))\to(b\to(a\to c)))$$
$$=((a\otimes b\to c)\to(b\otimes a\to c))=1.$$

又

$$T\sigma_8=((T\varphi\wedge T\psi)\to T\varphi)=(a\wedge b\to a)=1,$$
$$T\sigma_9=((T\varphi\wedge T\psi)\to T\psi)=(a\wedge b\to b)=1.$$

由定理 7.2.10 知

$$(c\to a)\otimes(c\to b)\leqslant(c\to a)\wedge(c\to b)=(c\to a\wedge b),$$

所以由条件(A)与($R_5$)知

$$T\sigma_{10}=((T\chi\to T\varphi)\to((T\chi\to T\psi)\to(T\chi\to T\varphi\wedge T\psi)))$$
$$=(c\to a)\to((c\to b)\to(c\to a\wedge b))=1.$$

其次，

$$T\sigma_{11}=(T\varphi\to(T\varphi\vee T\psi))=(a\to a\vee b)=1,$$
$$T\sigma_{12}=(T\psi\to(T\varphi\vee T\psi))=(b\to a\vee b)=1.$$

由定理 7.2.10 知

$$(a\to c)\otimes(b\to c)\leqslant(a\to c)\wedge(b\to c)=(a\vee b\to c).$$

所以由(A)与($R_5$)知

$$T\sigma_{13}=((T\varphi\to T\chi)\to((T\psi\to T\chi)\to(T\varphi\vee T\psi\to T\chi)))$$
$$=((a\to c)\to((b\to c)\to(a\vee b\to c)))=1.$$

再次，由 $a\otimes b\leqslant a\otimes b$ 知 $a\leqslant(b\to(a\otimes b))$，所以

$$T\sigma_{14}=(T\varphi\to(T\psi\to(T\varphi\otimes T\psi)))$$
$$=(a\to(b\to(a\otimes b)))=1.$$

由 $(a\to(b\to c))\otimes a\otimes b\leqslant(b\to c)\otimes b\leqslant c$ 知

$$(a\to(b\to c))\leqslant((a\otimes b)\to c),$$

所以

$$T\sigma_{15}=((T\varphi\to(T\psi\to T\chi))\to((T\varphi\otimes T\psi)\to T\chi))$$
$$=((a\to(b\to c))\to(a\otimes b\to c))=1.$$

再次，

$$T\sigma_{16}=((T\varphi\otimes T1)\leftrightarrow T\varphi)=((a\otimes 1)\leftrightarrow a)=(a\leftrightarrow a)=1.$$

最后，由 $u_d$ 是与 $L$ 匹配的 $n$ 元算子($n=Ar(d)$)与(7.2.27)式得

$$\begin{aligned}T\sigma_{17}&=((T\varphi_1\leftrightarrow T\psi_1)^{k_1}\otimes\cdots\otimes(T\varphi_n\leftrightarrow T\psi_n)^{k_n})\\&\quad\to(u_d(T\varphi_1,\cdots,T\varphi_n)\leftrightarrow u_d(T\psi_1,\cdots,T\psi_n))\\&=((a_1\leftrightarrow b_1)^{k_1}\otimes\cdots\otimes(a_n\leftrightarrow b_n)^{k_n})\to(u_d(a_1,\cdots,a_n)\leftrightarrow u_d(b_1,\cdots,b_n))\\&=1.\end{aligned}$$

这里 $a_i=T\varphi_i$，$b_i=T\psi_i(i=1,\cdots,n)$.

**例 7.3.10** i)设 $L$ 是线性序完备格，即 $L$ 是完备链. 令

$$\lambda_0(\varphi,\psi)=((\varphi\Rightarrow\psi)\vee(\psi\Rightarrow\varphi)), \tag{7.3.3}$$

$$\lambda_n(\varphi,\psi)=((\varphi\vee\psi)^n\Rightarrow(\varphi^n\vee\psi^n))\quad(n=1,2,\cdots), \tag{7.3.4}$$

则 $\lambda_0$ 与 $\lambda_n$ 都是 $\mathscr{E}$重言式.

事实上，设 $T\in\mathscr{S}$. 由于 $L$ 是链，不妨设 $T\varphi\leqslant T\psi$，则由(7.3.3)式得

$$T\lambda_0=(T\varphi\to T\psi)\vee(T\psi\to T\varphi)=1\vee(T\psi\to T\varphi)=1.$$

这时，$(T\varphi)^n\leqslant(T\psi)^n$，所以

$$\begin{aligned}T\lambda_n&=(T\varphi\vee T\psi)^n\to((T\varphi)^n\vee(T\psi)^n)\\&=(T\psi)^n\to(T\psi)^n=1.\end{aligned}$$

所以 $\lambda_0$ 与 $\lambda_n(n=1,2,\cdots)$都是 $\mathscr{E}$重言式.

ii)设$\langle C_{m+1},\otimes,\to\rangle$是 $m+1$ 元 Łukasiewicz 链. 令

$$\mu_k(\varphi)=(\varphi\Rightarrow a_k)\vee(a_{k+1}\Rightarrow\varphi),\quad 0\leqslant k\leqslant m-1, \tag{7.3.5}$$

则 $\mu_k(k=0,1,\cdots,m-1)$是 $\mathscr{E}$重言式.

事实上，由 $C_{m+1}=\{a_0,a_1,\cdots,a_m\}$ 以及 $a_0<a_1<\cdots<a_m$ 知对任一 $T\in\mathscr{S}$，或 $T\varphi\leqslant a_k$ 或 $a_{k+1}\leqslant T\varphi$. 所以(7.3.5)式是 $\mathscr{E}$重言式.

iii)设 $L=[0,1]$，$(\otimes,\to)$是 $L$ 上的 Łukasiewicz 伴随对，则

1° 当$0\leqslant a_1<a\leqslant1$，$0\leqslant b<b_1\leqslant1$ 且 $na+b\leqslant na_1+b_1$ 时，

$$l_1(\varphi,a,b,a_1,b_1,n)=(((a\Rightarrow\varphi)^n\Rightarrow b)\Rightarrow((a_1\Rightarrow\varphi)^n\Rightarrow b_1))$$

是 $\mathscr{E}$重言式.

2° 当$0\leqslant a<a_1\leqslant1$，$0\leqslant b<b_1\leqslant1$ 且 $na-b\geqslant na_1-b_1$ 时，

$$l_2(\varphi,a,b,a_1,b_1,n)=(((\varphi\Rightarrow a)^n\Rightarrow b)\Rightarrow((\varphi\Rightarrow a_1)^n\Rightarrow b_1))$$

是 $\mathscr{E}$重言式.

事实上，用归纳法可以验证

$$(x\to y)^n\to z=1\wedge[z+(0\vee n(x-y))]. \tag{7.3.6}$$

设 $T\in\mathscr{S}$，以 $y$ 记 $T\varphi$，则由(7.3.6)式得

$$\begin{aligned}Tl_1&=(((a\to y)^n\to b)\to((a_1\to y)^n\to b_1))\\&=1\wedge[b+(0\vee n(a-y))]\\&\quad\to1\wedge[b_1+(0\vee n(a_1-y))].\end{aligned}$$

所以只需证当

$$na+b\leqslant na_1+b_1,\quad b_1>b,\ a>a_1 \tag{7.3.7}$$

时

$$b+(0\vee n(a-y))\leqslant b_1+(0\vee n(a_1-y)). \tag{7.3.8}$$

因为当 $a<y$ 时 $a_1<y$，(7.3.8)式左边等于 $b$，右边等于 $b_1$，所以由(7.3.7)式知(7.3.8)式成立. 如果 $a\geqslant y$，则(7.3.8)式左边等于 $b+na-ny$，右边大于或等于

$b_1+na_1-ny$，所以由(7.3.7)式仍得出(7.3.8)式. 这就证明了 $l_1$ 是 $\mathscr{E}$ 重言式. 请读者利用(7.3.6)式自行证明 2°.

**定义 7.3.11**　设 $Q$ 是偏序集，则 $Q$ 满足**上升链条件 A. C. C.** 是指 $Q$ 中严格递增的序列是有限的. $Q$ 满足**下降链条件 D. C. C.** 是指 $Q$ 中严格递减的序列是有限的.

**定理 7.3.12**　设 $\mathscr{E}=\langle\langle L,\otimes,\to\rangle,\mathscr{U}\rangle$ 是强剩余格且 $L$ 完备. 若 $\mathscr{E}$-语义结论算子 $\mathrm{Con}_{\mathscr{S}}$ 是紧算子($\mathscr{S}=\mathscr{S}(P,\mathscr{E})$)，则 $L$ 满足上升链条件 A. C. C. 与下降链条件 D. C. C.，这里 $P$ 是无穷集.

**证**　设 $L$ 不满足 A. C. C.，则有 $a_i\in L(i=1,2,\cdots)$，使

$$a_1<a_2<\cdots<a_n<\cdots.$$

因为 $L$ 完备，可设

$$a=\bigvee\{a_n\mid n\in \boldsymbol{N}\}.$$

在 $P$ 中取互不相同的原子公式 $p_0,p_1,p_2,\cdots$. 令

$$X\varphi=\begin{cases}1, & \varphi=(p_n\Rightarrow p_0)\quad(n=1,2,\cdots),\\ a_n, & \varphi=p_n\quad(n=1,2,\cdots),\\ 0, & 其他,\end{cases}$$

则由对任一 $T\in\mathscr{S}$ 和 $n\in\boldsymbol{N}$，当 $T\geqslant X$ 时，

$$\begin{aligned}Tp_0&\geqslant Tp_n\otimes(Tp_n\to Tp_0)=Tp_n\otimes T(p_n\Rightarrow p_0)\\&\geqslant Xp_n\otimes X(p_n\Rightarrow p_0)=a_n\otimes 1=a_n\end{aligned}$$

知 $Tp_0\geqslant a$，所以$(\mathrm{Con}_{\mathscr{S}}X)p_0\geqslant a$. 但对 $F(P,\mathscr{E})$ 的任一有限子集 $G$，令

$$k=\max\{i\mid(p_i\Rightarrow p_0)\in G\}\vee 1,$$

并取 $T\in\mathscr{S}$ 使 $Tp_0=a_k$，$Tp_n=a_n(n\in\boldsymbol{N})$（由 $F(P,\mathscr{E})$ 是由 $P\cup L$ 生成的自由代数知 $\mathscr{S}$ 中有这种赋值 $T$），则 $T\geqslant X\mid G$，从而

$$(\mathrm{Con}_{\mathscr{S}}(X\mid G))p_0\leqslant a_k<a.$$

所以 $\mathrm{Con}_{\mathscr{S}}$ 不是紧算子.

设 $L$ 不满足 D. C. C. 条件，则有 $a_i\in L(i=1,2,\cdots)$，

$$a_1>a_2>\cdots>a_n>\cdots.$$

令

$$a=\bigwedge\{a_n\mid n\in\boldsymbol{N}\}.$$

任取原子公式 $p\in P$，取 $X$ 使

$$X\varphi=\begin{cases}1, & \varphi=(p\Rightarrow a_n)\quad(n=1,2,\cdots),\\ 0, & 其他,\end{cases}$$

则由条件($\mathrm{R}_1$)易证$(\mathrm{Con}_{\mathscr{S}}X)(p\Rightarrow a)=1$.

令

$$l=\max\{j\mid(p\Rightarrow a_j)\in G\}\vee 1.$$

取 $T\in\mathscr{S}$使 $Tp=a_l$. 对 $X\mid G$ 而言，它在 $p\Rightarrow a_j(j=1,\cdots,l)$ 以外处的值全为0，而 $T$ 在这些点处的值为

$$T(p\Rightarrow a_j) = Tp\to Ta_j = a_l\to a_j = 1 \quad (j=1,\cdots,l).$$

所以 $T\geqslant X\mid G$. 从而

$$(\mathrm{Con}_{\mathscr{S}}(X\mid G))(p\Rightarrow a)\leqslant T(p\Rightarrow a) = a_l\to a < 1.$$

可见，$\mathrm{Con}_{\mathscr{S}}$不是紧算子.

## 7.4 完备性问题

在7.1节中我们已介绍了 Pavelka 逻辑的基本框架，在那里公式集 $F$ 上不带任何结构，语义 $\mathscr{S}$ 与语构 $\langle A,\mathscr{R}\rangle$ 也都是抽象的，$L$ 是一般的完备格甚至是偏序集. 在7.2节中则已赋予 $L$ 以充分多的和谐的运算(只是未引入非运算)，得到了强剩余格 $\mathscr{E}$. 在7.3节中，公式集 $F$ 也相应地被赋予了那些与 $\mathscr{E}$ 配套的运算而得到带有结构的公式集 $F(P,\mathscr{E})$，并从而把 $L$-语义 $\mathscr{S}$ 定义为全体 $\mathscr{E}$ 同态之集. 至于 $L$-语构 $\langle A,\mathscr{R}\rangle$，因为 $A$ 是 $F(P,\mathscr{E})$ 上的 $L$-集而不是 $F(P,\mathscr{E})$ 的分明子集，所以尚未给出，只是通过定义7.3.2给出了 $\sigma_1$-$\sigma_{17}$ 那些重言式，这为在本节中将 $A$ 具体化作好了准备. 最后，$L$-规则集 $\mathscr{R}$ 也将在本节中给出. 在此基础上，本节系统地讨论完备性问题.

本节的内容是这样安排的:首先给出几个不完备性定理，然后介绍若干通用的可靠的 $L$-规则，最后在给出商代数定理和一些预备定理的基础上证明两个完备性定理.

### 7.4.1 不完备性定理

**定理 7.4.1** 设 $\mathscr{E}=\langle\langle L,\otimes,\to\rangle,\mathscr{U}\rangle$ 是强剩余格，$L$ 是完备的. 如果 $L$ 满足 A. C. C. 条件但不满足 D. C. C. 条件，则无论 $L$-语法 $\langle A,\mathscr{R}\rangle$ 如何选择，$(P,\mathscr{E})$ 命题演算都不是完备的，即 $L$-语义系统 $\langle F(P,\mathscr{E}),\mathscr{S}\rangle$ 不可公理化，这里 $P$ 是无穷集.

**证** 首先注意，例7.1.9中给出的 $L$-规则 $r_0$ 满足定义7.1.10中的条件 i)，即任何 $T\in L^F$ 都是关于 $r_0$ 闭的，所以由(7.1.7)式知 $\mathrm{Con}_{A,\mathscr{R}}=\mathrm{Con}_{A,\mathscr{R}^*}$，这里 $\mathscr{R}^*=\mathscr{R}\cup\{r_0\}$. 因为 $L$ 满足 A. C. C.，所以由定理7.1.25知 $\mathrm{Con}_{A,\mathscr{R}^*}$ 是紧算子，从而 $\mathrm{Con}_{A,\mathscr{R}}$ 是紧算子. 但由 $L$ 不满足 D. C. C. 和定理7.3.12知 $\mathrm{Con}_{\mathscr{S}}$ 不是紧算子，所以 $\mathrm{Con}_{A,\mathscr{R}}\neq\mathrm{Con}_{\mathscr{S}}$, 所以 $F(P,\mathscr{E})$ 上的 $L$-语法 $\langle A,\mathscr{R}\rangle$ 关于 $L$-语义 $\mathscr{S}$ 不完备.

**定义 7.4.2** 设 $\langle L,\otimes,\to\rangle$ 是剩余格. 如果对任一强剩余格 $\mathscr{E}=\langle\langle L,\otimes,\to\rangle,\mathscr{U}\rangle$，$F(P,\mathscr{E})$ 上的任一 $L$-语法 $\langle A,\mathscr{R}\rangle$ 关于 $L$-语义 $\mathscr{S}(P,\mathscr{E})$ 都不完备，则称 $L$ 为**坏格**，这里 $P$ 是无穷集.

**例 7.4.3** i) 设 $L$ 是满足 A. C. C. 但不满足 D. C. C. 的完备格，则 $L$ 为坏格.

ii) 设 $L=\left\{\frac{1}{n}\middle| n\in N\right\}\cup\{0\}$，则 $L$ 按自然序成为一个完备格，$L$ 满足 A. C. C. 但不满足 D. C. C.，所以 $L$ 是坏格. 可以按种种不同方式在 $L$ 上引入伴随对使 $L$ 成为不同的剩余格，但均不能改变 $L$ 是坏格这一事实. 比如，可以在 $L$ 上规定

$$a\otimes b=\begin{cases}\dfrac{1}{m+n-1}, & a=\dfrac{1}{m},\ b=\dfrac{1}{n},\\ 0, & a=0 \text{ 或 } b=0.\end{cases}\tag{7.4.1}$$

这时易证 $\otimes$ 满足条件 $(\mathrm{M}_0)$ 与 $(\mathrm{M}_1)$，所以由命题 7.2.6 知 $L$ 上有二元运算 $\to$ 使 $(\otimes,\to)$ 成为 $L$ 上的伴随对. 由(7.2.4)式可求得

$$a\to b=\begin{cases}1, & a\leqslant b,\\ \dfrac{1}{n-m+1}, & a=\dfrac{1}{m},\ b=\dfrac{1}{n},\ m<n,\\ 0, & a>0,\ b=0.\end{cases}\tag{7.4.2}$$

以下用 $L(N_1)$ 表示这个剩余格 $\langle L,\otimes,\to\rangle$.

还可在 $L$ 上规定

$$a\otimes b=\begin{cases}\dfrac{1}{mn}, & a=\dfrac{1}{m},\ b=\dfrac{1}{n},\\ 0, & a=0 \text{ 或 } b=0.\end{cases}\tag{7.4.3}$$

这时 $\otimes$ 的伴随由下式定义：

$$a\to b=\begin{cases}1, & a\leqslant b,\\ 1\Big/\left\{\dfrac{n}{m}\right\}, & a=\dfrac{1}{m},\ b=\dfrac{1}{n},\ m<n,\\ 0, & a>0,\ b=0.\end{cases}\tag{7.4.4}$$

这里，当 $\alpha$ 是正整数时，$\{\alpha\}=\alpha$；当 $\alpha$ 是正数但不是整数时，$\{\alpha\}=[\alpha]+1$，即 $\alpha$ 的整数部分加 1. 以下用 $L(N_2)$ 记这个剩余格 $\langle L,\otimes,\to\rangle$.

**定理 7.4.4** 设 $\mathscr{E}=\langle\langle L,\otimes,\to\rangle,\mathscr{U}\rangle$ 是强剩余格，$L$ 是完备链，则 $F(P,\mathscr{E})$ 上的 $L$-语法 $\langle A,\mathscr{R}\rangle$ 关于 $L$-语义 $\mathscr{S}(P,\mathscr{E})$ 完备的必要条件是以下的 $(\overline{\mathrm{R}}_1)$ 与 $(\overline{\mathrm{R}}_2)$ 成立：

$(\overline{\mathrm{R}}_1)$ $a\to\bigvee_{i\in I}x_i=\bigvee_{i\in I}(a\to x_i)$，$I\neq\varnothing$.

$(\overline{\mathrm{R}}_2)$ $\bigwedge_{i\in I}x_i\to a=\bigvee_{i\in I}(x_i\to a)$，$I\neq\varnothing$.

**证** 设 $(\overline{\mathrm{R}}_1)$ 不成立，则 $L$ 有非空子集 $B$ 和元 $a$ 使

$$c=\bigvee\{a\to x\mid x\in B\}<(a\to\bigvee B)=d.$$

设 $P$ 是非空集，$\mathscr{E}=\langle L,\mathscr{U}\rangle$. 取 $p_0\in P$. 作 $X\in L^F$ 如下：

$$X\varphi = \begin{cases} 1, & \varphi = (b \Rightarrow p_0),\ b \in B, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

任取 $T \in \mathscr{S}(P, \mathscr{E})$, $T \geqslant X$, 则 $T(b \Rightarrow p_0) = b \to Tp_0 \geqslant X(b \Rightarrow p_0) = 1$, 所以 $b \leqslant Tp_0$. 由 $b$ 是 $B$ 的任意元得 $\bigvee B \leqslant Tp_0$. 那么由

$$T(a \Rightarrow p_0) = (a \to Tp_0) \geqslant (a \to \bigvee B) = d$$

知

$$(\mathrm{Con}_{\mathscr{S}} X)(a \Rightarrow p_0) \geqslant d \not\leqslant c. \tag{7.4.5}$$

另一方面, 任取 $F = F(P, \mathscr{E})$ 的分明有限子集 $G$, 则 $G$ 中至多含有有限多个形如 $b \Rightarrow p_0$ 的公式, 设为 $b_1 \Rightarrow p_0, \cdots, b_k \Rightarrow p_0$. 设 $b^* = \max\{b_1, \cdots, b_k\}$, 则由 $L$ 是链知 $b^* \in B$. 取赋值 $T \in \mathscr{S}(P, \mathscr{E})$ 使 $Tp_0 = b^*$, 则 $T \geqslant X | G$. 因为 $T(a \Rightarrow p_0) = a \to b^* \leqslant c$, 所以

$$(\mathrm{Con}_{\mathscr{S}}(X | G))(a \Rightarrow p_0) \leqslant c. \tag{7.4.6}$$

如果完备性定理成立, 则由 (7.4.5) 式得 $(\mathrm{Con}_{A,\mathscr{R}} X)(a \Rightarrow p_0) \geqslant d > c$, 而由 (7.4.6) 式与 (7.1.21) 式则得出 $(\mathrm{Con}_{A,\mathscr{R}} X)(a \Rightarrow p_0) \leqslant c$. 矛盾.

其次设 $(\bar{\mathrm{R}}_2)$ 不成立, 则 $L$ 有非空子集 $B$ 和元 $a$ 使

$$c = \bigvee \{x \to a \mid x \in B\} < (\bigwedge B \to a) = d.$$

作 $Y \in L^F$ 如下:

$$Y\varphi = \begin{cases} 1, & \varphi = (p_0 \Rightarrow b),\ b \in B, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

则可证

$$(\mathrm{Con}_{\mathscr{S}} Y)(p_0 \Rightarrow a) \geqslant (\bigwedge B \to a) = d.$$

但对 $F$ 的任一有限分明子集 $G$,

$$(\mathrm{Con}_{\mathscr{S}}(Y | G))(p_0 \Rightarrow a) \leqslant c.$$

从而像以上一样推得矛盾.

可见, $(\bar{\mathrm{R}}_1)$ 与 $(\bar{\mathrm{R}}_2)$ 都是完备性的必要条件.

**注 7.4.5** 设 $L$ 是完备链 (如 $L = [0, 1]$), 在 $L$ 上以

$$\{\{x \mid x < b\}, \{y \mid y > a\} \mid a, b \in L\}$$

为子基可以生成一个拓扑 $\tau$, 叫 $L$ 上的区间拓扑. 设 $\langle L, \otimes, \to \rangle$ 是剩余格, 则可证明 $\to: L \times L \to L$ 关于区间拓扑 $\tau$ 连续的充要条件是 $(\bar{\mathrm{R}}_1)$ 与 $(\bar{\mathrm{R}}_2)$ 成立. 由此得如下推论.

**推论 7.4.6** 设 $\mathscr{E} = \langle \langle L, \otimes, \to \rangle, \mathscr{U} \rangle$ 是强剩余格, 且 $\to$ 关于 $L$ 上的区间拓扑 $\tau$ 不连续, 则 $F(P, \mathscr{E})$ 上的任一 $L$-语法 $\langle A, \mathscr{R} \rangle$ 关于任一 $L$-语义 $\mathscr{S}(P, \mathscr{E})$ 都不完备, 即 $L$-语义系统 $\langle F, \mathscr{S} \rangle$ 不可公理化, 这里 $F = F(P, \mathscr{E})$, $\mathscr{S} = \mathscr{S}(P, \mathscr{E})$.

为证明下一个不完备性定理, 我们需要一个引理.

**引理 7.4.7** 设 $\langle A, \mathscr{R} \rangle$ 是 $F$ 上的 $L$-语法. 如果对 $\mathscr{R}$ 中的每个 $n$ 元 $L$-规则 $r =$

$\langle r', r''\rangle$均有

$$r''(a_1, \cdots, a_n) \leqslant a_1 \wedge \cdots \wedge a_n, \tag{7.4.7}$$

那么对任一 $X \in L^F$ 和任一 $x$,

$$(\mathrm{Con}_{A,\mathscr{R}}X)x \leqslant a \vee Bx. \tag{7.4.8}$$

这里 $a$ 是函数 $X:F \to L$ 的值集的上确界，即

$$a = \bigvee \{Xy \mid y \in F\}, \tag{7.4.9}$$

而

$$B = \mathrm{Con}_{A,\mathscr{R}}\varnothing. \tag{7.4.10}$$

**证**　只需证对 $F$ 中以 $x$ 为目标的任一证明 $W$,

$$\hat{W}X \leqslant a \vee Bx. \tag{7.4.11}$$

i) 当 $l(W)=1$ 时，$W=\langle\langle x\rangle\rangle$或$\langle\langle x, 0\rangle\rangle$. 这时 $\hat{W}X=Xx\leqslant a$ 或 $\hat{W}X=Ax\leqslant Bx$，所以(7.4.11)式成立.

ii) 设 $l(W)<m$ 时(7.4.11)式成立. 令 $W=\langle W_1, \cdots, W_m\rangle$. 不妨设

$$W_m = \langle x, r, \langle i_1, \cdots, i_n\rangle\rangle.$$

这时

$$\begin{aligned}\hat{W}X &= r''(\hat{W}_{(i_1)}X, \cdots, \hat{W}_{(i_n)}X)\\ &\leqslant r''(a \vee B(\ulcorner W_{i_1}), \cdots, a \vee B(\ulcorner W_{i_n}))\\ &= r''(B(\ulcorner W_{i_1}), \cdots, B(\ulcorner W_{i_n}))\\ &\quad \vee \bigvee \{r''(C_1^M, \cdots, C_n^M) \mid \varnothing \neq M \subset 2^{\bar{n}}\},\end{aligned}$$

这里 $\bar{n}=\{1, \cdots, n\}$ 且

$$c_k^{\ M} = \begin{cases} a, & k \in M,\\ B(\ulcorner W_{i_k}), & k \notin M \quad (k=1, \cdots, n).\end{cases}$$

由(7.4.7)式知 $r''(c_1^{\ M}, \cdots, c_n^{\ M}) \leqslant a$ 恒成立.

由命题 7.1.13 后面的注意知 $B$ 关于 $r$ 是闭的，所以

$$\begin{aligned}&r''(B(\ulcorner W_{i_1}), \cdots, B(\ulcorner W_{i_n}))\\ &\leqslant Br'(\ulcorner W_{i_1}, \cdots, \ulcorner W_{i_n}) = B(W\urcorner) = Bx.\end{aligned}$$

这就证明了(7.4.11)式.

**定理 7.4.8**　设 $\mathscr{E}=\langle\langle L, \otimes, \to\rangle, \mathscr{U}\rangle$是强剩余格. 如果 $L$ 完备且 $L$ 不是 Boole 代数，且 $\mathscr{R}$ 中的每个 $L$-规则 $r$ 都满足(7.4.7)式，则 $F(P, \mathscr{E})$上的 $L$-语法$\langle A, \mathscr{R}\rangle$关于 $L$-语义 $\mathscr{S}(P, \mathscr{E})$不完备，从而 $F(P, \mathscr{E})$上的 $L$-语义$\langle F, \mathscr{S}\rangle$不可公理化.

**证**　首先注意，如果对每个 $a \in L$ 均有

$$a \vee (a \to 0) = 1,$$

则 $L$ 必为 Boole 代数. 事实上, 由条件($M_1$)得

$$\begin{aligned} x &= x \otimes 1 \\ &= x \otimes (x \vee (x \to 0)) \\ &= (x \otimes x) \vee (x \otimes (x \to 0)) \\ &= (x \otimes x) \vee 0 \\ &= x \otimes x. \end{aligned}$$

由此知⊗满足幂等律. 那么

$$x \wedge y = (x \wedge y) \otimes (x \wedge y) \leqslant x \otimes y \leqslant x \wedge y.$$

从而⊗ = ∧. 因此可由($M_1$)证明 $L$ 是分配格, 且

$$a \wedge (a \to 0) = a \otimes (a \to 0) = 0.$$

那么$(a \to 0)$就是 $a$ 的补元, 所以 $L$ 成为 Boole 代数.

因为 $L$ 不是 Boole 代数, 由以上所证知有 $a \in L$, 使

$$a \vee (a \to 0) < 1.$$

取 $p_0 \in P$, 作 $X \in L^F$ 如下:

$$X\varphi = \begin{cases} a, & \varphi = p_0, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

则由(7.4.8)式得

$$\begin{aligned} &(\mathrm{Con}_{A,\mathscr{R}}X)(a \Rightarrow p_0) \\ &\leqslant a \vee B(a \Rightarrow p_0) \\ &= a \vee (\mathrm{Con}_{A,\mathscr{R}}\varnothing)(a \Rightarrow p_0). \end{aligned}$$

如果$\langle A, \mathscr{R} \rangle$关于 $\mathscr{S} = \mathscr{S}(P, \mathscr{E})$完备, 则由上式以及存在 $T \in \mathscr{S}$ 使 $Tp_0 = 0$ 得

$$\begin{aligned} &(\mathrm{Con}_{A,\mathscr{R}}X)(a \Rightarrow p_0) \\ &\leqslant a \vee (\mathrm{Con}_{\mathscr{S}}\varnothing)(a \Rightarrow p_0) \\ &\leqslant a \vee (a \to 0) < 1. \end{aligned}$$

另一方面, 当 $T \in \mathscr{S}$ 且 $T \geqslant X$ 时 $Tp_0 \geqslant Xp_0 = a$, 从而有

$$(\mathrm{Con}_{\mathscr{S}}X)(a \Rightarrow p_0) = 1.$$

所以 $\mathrm{Con}_{A,\mathscr{R}} \neq \mathrm{Con}_{\mathscr{S}}$, $\langle A, \mathscr{R} \rangle$关于 $\mathscr{S}(P, \mathscr{E})$不完备.

**注 7.4.9**　定理 7.4.1、推论 7.4.6 和定理 7.4.8 中给出了三个不完备性定理. 在第 3 章和第 4 章中介绍的命题演算系统 $\mathscr{L}^*$ 中, 赋值格 $L = [0, 1]$, $L$ 不满足 A. C. C., 也不满足 D. C. C., 同时 $R_0$ 算子关于 $L$ 上的区间拓扑也不连续, $L$ 也不是 Boole 代数等. 因为正如注 7.1.31 中所说的, 本章中的完备性是强得多的概念, 同时对每个 $a \in L$, 常值 $a$ 也都算作公式了, $F(P, \mathscr{E})$ 已不同于第 3、4 章的公式集 $F$. 所以前述的三个不完备性定理与 $\mathscr{L}^*$ 系统中的完备性问题无关.

### 7.4.2　通用的可靠 $L$-规则

在注 7.1.28 中已看到, $L$-规则 $r_0$ 关于 $F$ 上的任何 $L$-语义 $\mathscr{S}$ 都是可靠的. 下

面再介绍几个通用的可靠的 $L$-规则，有的需要稍加一些对 $L$ 的要求.

**命题 7.4.10**　设 $\mathscr{E}=\langle\langle L,\otimes,\to\rangle,\mathscr{U}\rangle$是强剩余格，$L$ 完备，则下述的 **$L$-分离规则** $r_1{}^*$ 关于 $L$-语义 $\mathscr{S}$ 可靠：

$$r_1{}^*:\quad \frac{\varphi,\ \varphi\Rightarrow\psi}{\psi}\left(\frac{a,\ b}{a\otimes b}\right). \tag{7.4.12}$$

**证**　由 $L$ 完备和$(\mathrm{M}_1)$知$(r_1{}^*)''$满足半连续条件(SC)，所以 $r_1{}^*$ 确为 $L$-规则. 又设 $T\in L^F$，则

$$\begin{aligned}T(r_1{}^*)'(\varphi,\ \varphi\Rightarrow\psi)&=T\psi\geqslant T\varphi\otimes(T\varphi\to T\psi)\\&=T\varphi\otimes T(\varphi\Rightarrow\psi)=(r_1{}^*)''(T\varphi,\ T(\varphi\Rightarrow\psi)).\end{aligned}$$

所以 $T$ 关于 $r_1{}^*$ 是闭的，即 $r_1{}^*$ 关于 $\mathscr{S}=L^F$ 可靠，从而也关于任一 $L$-语义 $\mathscr{S}$ 可靠.

**命题 7.4.11**　设 $\mathscr{E}=\langle\langle L,\otimes,\to\rangle,\mathscr{U}\rangle$是强剩余格，$L$ 满足条件$(\bar{\mathrm{R}}_1)$，则对每个$a\in L$,下述的 **$(L,a)$ 提升规则** $r_2a$ 关于 $\mathscr{E}$-语义 $\mathscr{S}$ 可靠：

$$r_2a:\quad \frac{\varphi}{a\Rightarrow\varphi}\left(\frac{b}{a\to b}\right). \tag{7.4.13}$$

**证**　由$(r_2a)''(b)=a\to b$ 及条件$(\bar{\mathrm{R}}_1)$知$(r_2a)''$满足半连续条件(SC)，所以 $r_2a$ 确为 $L$-规则. 又对任一 $T\in L^F$，

$$\begin{aligned}T(r_2a)'(\varphi)&=T(a\Rightarrow\varphi)\\&=Ta\to T\varphi=a\to T\varphi=(r_2a)''(T\varphi).\end{aligned}$$

所以 $T$ 关于 $r_2a$ 是闭的，从而由 $T$ 的任意性可知 $r_2a$ 可靠.

**定义 7.4.12**　设 $L$ 是格，$\leftarrow:L\times L\to L$ 是 $L$ 上的二元运算. 如果条件

$$(\bar{\mathrm{A}})\quad a\vee b\geqslant c\quad 当且仅当\quad a\geqslant b\leftarrow c \tag{7.4.14}$$

成立，则称 $L$ 为**对偶 Heyting 代数**.

**注 7.4.13**　易证$(\bar{\mathrm{A}})$等价于以下的条件组：

$$\begin{aligned}&(\bar{\mathrm{A}}')\quad a\geqslant b\leftarrow(a\vee b),\\&(\bar{\mathrm{A}}'')\quad (a\leftarrow b)\vee a\geqslant b.\end{aligned} \tag{7.4.15}$$

又设 $L$ 是有界链，定义

$$a\leftarrow b=\begin{cases}0, & b\leqslant a,\\ b, & b\nleqslant a,\end{cases} \tag{7.4.16}$$

则 $L$ 成为对偶 Heyting 代数.

**命题 7.4.14**　设 $\mathscr{E}=\langle\langle L,\otimes,\to\rangle,\mathscr{U}\rangle$是强剩余格，$L$ 是完备的对偶 Heyting 代数，则对每个 $a\in L$，下述的 **$(L,a)$ 消去规则** $r_3a$ 关于 $\mathscr{E}$-语义 $\mathscr{S}$ 可靠：

$$r_3a:\quad \frac{\varphi\vee a}{\varphi}\left(\frac{b}{a\leftarrow b}\right). \tag{7.4.17}$$

**证**　由条件$(\bar{A})$容易证明

$$a\leftarrow\bigvee_{i\in I}b_i=\bigvee_{i\in I}(a\leftarrow b_i),\quad I\neq\varnothing. \tag{7.4.18}$$

所以$(r_3a)''$满足半连续条件(SC). 又对任一 $T\in L^F$,

$$T(r_3a)'(\varphi\vee a)=T\varphi\geqslant a\leftarrow(T\varphi\vee a)$$
$$=a\leftarrow T(\varphi\vee a)$$
$$=(r_3a)''(T(\varphi\vee a)).$$

所以 $T$ 关于 $r_3a$ 是闭的, 从而由 $T$ 的任意性知 $r_3a$ 可靠.

**命题 7.4.15** 设 $\mathscr{E}=\langle\langle L,\otimes,\rightarrow\rangle,\mathscr{U}\rangle$是强剩余格, 则对每个 $a\in L$, 下述的**相容试验规则** $r_4a$ 关于 $\mathscr{E}$语义 $\mathscr{S}$ 可靠:

$$r_4a:\quad \frac{a}{0}\left(\frac{b}{0,\ 若\ b\leqslant a;1,\ 若\ b\not\leqslant a}\right). \tag{7.4.19}$$

**证** 设 $M$ 是 $L$ 的非空子集, 若 $M$ 中有元 $b$, 使 $b\not\leqslant a$, 则 $\bigvee M\not\leqslant a$, 从而

$$(r_4a)''(\bigvee M)=1=\bigvee\{(r_4a)''(b)\mid b\in M\}.$$

若对每个 $b\in M$ 均有 $b\leqslant a$, 则 $\bigvee M\leqslant a$, 从而

$$(r_4a)''(\bigvee M)=0=\bigvee\{(r_4a)''(b)\mid b\in M\}.$$

可见, $(r_4a)''$满足半连续条件, 所以 $r_4a$ 确为 $L$-规则. 又对任一 $T\in\mathscr{S}(P,\mathscr{E})$, 由 $T0=0$ 以及 $Ta=a$ 得

$$T(r_4a)'(a)=T0=0=(r_4a)''(a)=(r_4a)''(Ta).$$

所以 $r_4a$ 关于 $\mathscr{E}$语义 $\mathscr{S}(P,\mathscr{E})$可靠.

### 7.4.3 商代数定理

回忆第 3 章 $\mathscr{L}^*$ 中的公式集 $F$, $F$ 上虽有运算$\neg$, $\vee$与$\rightarrow$, 但 $F$ 上并没有偏序关系. 后来在 $F$ 上引入了可证等价关系 ~, 证明了 ~ 是同余关系, 然后用作商的办法得到了 $\mathscr{L}^*$-Lindenbaum 代数$[F]=F/\sim$, 在$[F]$上利用条件$[A]\leqslant[B]$当且仅当$\vdash(A\rightarrow B)$在$[F]$上引入了偏序$\leqslant$, 并证明了$[F]$构成一个 $R_0$ 代数. 类似地, 本章中的$(P,\mathscr{E})$代数 $F(P,\mathscr{E})$上虽已具有许多运算, 但也没有偏序关系, 我们将利用在 $F(P,\mathscr{E})$上建立同余关系的办法对 $F(P,\mathscr{E})$作商, 然后在商代数上引入偏序, 并证明商代数是与 $\mathscr{E}$具有同样全型的强剩余格.

**定理 7.4.16**(商代数定理) 设 $\mathscr{E}=\langle\langle L,\otimes,\rightarrow\rangle,\mathscr{U}\rangle$是强剩余格, 其全型为$\langle Ar:\Delta\rightarrow N,\ Ex:\Delta\rightarrow N^+\rangle$, $P$ 是非空集, $\langle A,\mathscr{R}\rangle$是 $F(P,\mathscr{E})$上的 $L$-语法, 且

i) $r_1{}^*\in\mathscr{R}$, 对每个 $a\in L$, 提升规则 $r_2a\in\mathscr{R}$.

ii) 公理 $L$-集 $A$ 在公式 $a$, $a\&b$ 与 $a\Rightarrow b$ 处的值分别大于或等于 $a$, $a\otimes b$ 与 $a\rightarrow b$.

iii) $(A,\mathscr{R},1)\varnothing\vdash\sigma_i(i=1,\cdots,17)$.

那么, 对 $F=F(P,\mathscr{E})$上一个固定的 $L$-集 $X$:

i) 在 $F$ 上规定

$$\varphi\prec\psi\quad 当且仅当\quad(A,\mathscr{R},1)X\vdash(\varphi\Rightarrow\psi), \tag{7.4.20}$$

则$\prec$是 $F$ 上的预序(pre-order), 且对 $a\in L$ 和 $\varphi\in F$,

$$a < \varphi \quad 当且仅当 \quad (A, \mathscr{R}, a)X \vdash \varphi. \tag{7.4.21}$$

ii) 规定

$$\varphi \sim \psi \quad 当且仅当 \quad \varphi < \psi 且 \psi < \varphi, \tag{7.4.22}$$

则 ~ 是 $F$ 上的 $\mathscr{E}$ 同余关系.

iii) 设 $F(X) = F/\sim$，以 $\bar{\varphi}$ 记 $\varphi$ 所在之同余类. 定义

$$\bar{\varphi} \leqslant \bar{\psi} \quad 当且仅当 \varphi < \psi, \tag{7.4.23}$$

则 $\leqslant$ 是 $F(X)$ 上的偏序，$\bar{1}$ 和 $\bar{0}$ 分别是 $(F(X), \leqslant)$ 中的最大元与最小元，且 $\bar{\varphi}$ 与 $\bar{\psi}$ 的上、下确界分别是

$$\bar{\varphi} \vee \bar{\psi} = \overline{\varphi \vee \psi} \quad 与 \quad \bar{\varphi} \wedge \bar{\psi} = \overline{\varphi \wedge \psi}, \tag{7.4.24}$$

从而 $(F(X), \leqslant)$ 是有界格.

iv) 设 $\bar{\varphi}, \bar{\psi} \in F(X)$，定义

$$\bar{\varphi} \otimes \bar{\psi} = \overline{\varphi \& \psi}, \bar{\varphi} \to \bar{\psi} = \overline{\varphi \Rightarrow \psi}, \tag{7.4.25}$$

则 $(\otimes, \to)$ 是 $F(X)$ 上的伴随对，且 $\otimes$ 是交换的，以 $\bar{1}$ 为单位，从而 $\langle F(X), \otimes, \to \rangle$ 成为剩余格.

v) 对 $\mathscr{U} = \{d \mid d \in \Delta\}$ 中的每个运算 $d$，设 $Ar(d) = n$，定义 $\bar{d}: (F(X))^n \to F(X)$ 为

$$\bar{d}(\bar{\varphi}_1, \cdots, \bar{\varphi}_n) = \overline{u_d(\varphi_1, \cdots, \varphi_n)}, \quad \bar{\varphi}_i \in F(X) \quad (i = 1, \cdots, n), \tag{7.4.26}$$

则 $\bar{d}$ 与 $\langle F(X), \otimes, \to \rangle$ 匹配，且匹配指数为 $Ex(d)$. 从而令 $\overline{\mathscr{U}} = \{\bar{d} \mid d \in \Delta\}$，则 $\mathscr{E}(X) = \langle \langle F(X), \otimes, \to \rangle, \overline{\mathscr{U}} \rangle$ 成为强剩余格，且与 $\mathscr{E}$ 有相同的全型.

vi) 定义映射 $j: \mathscr{E} \to \mathscr{E}(X)$ 为

$$j(a) = \bar{a}, \quad a \in L,$$

则 $j$ 为 $\mathscr{E}$ 同态.

vii) 当 $L$ 完备时 $j$ 保任意并.

**证**　i) 由 $(A, \mathscr{R}, 1)\varnothing \vdash \sigma_5$ 知 $(A, \mathscr{R}, 1)X \vdash \sigma_5$. 从而 $<$ 是自反的. 又设 $\varphi < \psi$, $\psi < \chi$，则

$$(A, \mathscr{R}, 1)X \vdash (\varphi \Rightarrow \psi), \quad (A, \mathscr{R}, 1)X \vdash (\psi \Rightarrow \chi).$$

因为 $r_1^* \in \mathscr{R}$. 由命题 7.1.16 以及

$$(A, \mathscr{R}, 1)X \vdash \sigma_6,$$

即

$$(A, \mathscr{R}, 1)X \vdash ((\psi \Rightarrow \chi) \Rightarrow ((\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \chi))),$$

并注意 $(r_1^*)''(1, 1) = 1 \otimes 1 = 1$ 得

$$(A, \mathscr{R}, (r_1^*)''(1, 1))X \vdash (r_1^*)'(\psi \Rightarrow \chi, \sigma_6),$$

即

$$(A, \mathscr{R}, 1)X \vdash ((\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \chi)).$$

再用一次命题 7.1.16 即得 $(A, \mathscr{R}, 1)X \vdash (\varphi \Rightarrow \chi)$，即 $\varphi < \chi$. 所以 $<$ 是传递的，从

而是 $F$ 上的预序.

又 $(L, a)$ 提升规则 $r_2a$ 在 $\mathscr{R}$ 中. 设 $(A, \mathscr{R}, a)X \vdash \varphi$, 则对每个 $T \in L^F$, 当 $T \geqslant A \vee X$ 且 $T$ 关于 $\mathscr{R}$ 闭时 $T\varphi \geqslant a$. 从而由 $T$ 关于 $r_2a$ 闭得

$$T(a \Rightarrow \varphi) = T(r_2a)'(\varphi) \geqslant (r_2a)''(T\varphi) = a \to T\varphi \geqslant 1.$$

由此得 $(A, \mathscr{R}, 1)X \vdash (a \Rightarrow \varphi)$, 即 $a < \varphi$.

反之, 设 $(A, \mathscr{R}, 1)X \vdash (a \Rightarrow \varphi)$. 由定理的条件 ii) 知 $(A, \mathscr{R}, a)X \vdash a$. 所以由命题 7.1.16 得

$$(A, \mathscr{R}, (r_1{}^*)''(a, 1))X \vdash (r_1{}^*)'(a, a \Rightarrow \varphi),$$

即 $(A, \mathscr{R}, a)X \vdash \varphi$. 这就证明了 (7.4.21).

特别地, 令 $a = 0$, 则由 (7.4.21) 知 $0 < \varphi$ 对每个 $\varphi \in F$ 都成立.

ii) 显然 $\sim$ 是 $F$ 上的等价关系. 以下设 $\varphi_1 \sim \psi_1$, $\varphi_2 \sim \psi_2$.

1° 由 $(A, \mathscr{R}, 1)X \vdash \sigma_i (i = 11, 12, 13)$ 知

当 $\varphi_1 < \psi_1$ 且 $\varphi_2 < \psi_2$ 时 $\varphi_1 < \psi_1 \vee \psi_2$, $\varphi_2 < \psi_1 \vee \psi_2$,

当 $\varphi_1 < \eta$ 且 $\varphi_2 < \eta$ 时 $(\varphi_1 \vee \varphi_2) < \eta$.

由此即可推得 $\varphi_1 \vee \varphi_2 \sim \psi_1 \vee \psi_2$.

2° 类似地, 由 $(A, \mathscr{R}, 1)X \vdash \sigma_i (i = 8, 9, 10)$ 可推知 $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \sim \psi_1 \wedge \psi_2$.

3° 由 $\varphi_2 < \psi_2$ 知 $(A, \mathscr{R}, 1)X \vdash (\varphi_2 \Rightarrow \psi_2)$. 所以由 $(A, \mathscr{R}, 1)X \vdash \sigma_4$ 得 $(A, \mathscr{R}, 1)X \vdash (\varphi_1 \Rightarrow (\varphi_2 \Rightarrow \psi_2))$, 从而由 $(A, \mathscr{R}, 1)X \vdash \sigma_{15}$ 可推知 $\varphi_1 \& \varphi_2 < \psi_2$. 同理, 由 $\varphi_1 < \psi_1$ 得 $(A, \mathscr{R}, 1)X \vdash (\varphi_2 \Rightarrow (\varphi_1 \Rightarrow \psi_1))$. 由此以及 $(A, \mathscr{R}, 1)X \vdash \sigma_7$ 可得 $(A, \mathscr{R}, 1)X \vdash (\varphi_1 \Rightarrow (\varphi_2 \Rightarrow \psi_1))$, 从而可像上面一样推得 $\varphi_1 \& \varphi_2 < \psi_1$. 那么利用 $(A, \mathscr{R}, 1)X \vdash \sigma_{14}$ 就可推出 $\varphi_1 \& \varphi_2 < \psi_1 \& \psi_2$, 进一步可得 $\varphi_1 \& \varphi_2 \sim \psi_1 \& \psi_2$.

4° 由 $\varphi_2 < \psi_2$ 以及 $(A, \mathscr{R}, 1)X \vdash \sigma_6$ 可得 $(\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2) < (\varphi_1 \Rightarrow \psi_2)$. 又由 $(A, \mathscr{R}, 1)X \vdash \sigma_6$ 可得 $(\varphi_1 \Rightarrow \psi_2) < ((\psi_1 \Rightarrow \varphi_1) \Rightarrow (\psi_1 \Rightarrow \psi_2))$. 而由 $\psi_1 < \varphi_1$ 以及规则 $r_1{}^*$ 又得 $((\psi_1 \Rightarrow \varphi_1) \Rightarrow (\psi_1 \Rightarrow \psi_2)) < (\psi_1 \Rightarrow \psi_2)$. 所以由 $<$ 的传递性得 $(\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2) < (\psi_1 \Rightarrow \psi_2)$. 同理可证明相反的不等式, 所以 $(\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2) \sim (\psi_1 \Rightarrow \psi_2)$.

由以上 1°~4° 知运算 $\vee$, $\wedge$, $\&$ 及 $\Rightarrow$ 都保持关系 $\sim$.

5° 设 $\varphi < \psi$, 则对每个 $T \in L^F$, 当 $T \geqslant A \vee X$ 且 $T$ 关于 $\mathscr{R}$ 闭时 $T(\varphi \Rightarrow \psi) = 1$. 由此以及 $r_1{}^*$ 知当 $\varphi \sim \psi$ 时 $T(\varphi \Leftrightarrow \psi) = 1$. 设 $d \in \Delta$, $Ar(d) = n$, $Er(d) = (k_1, \cdots, k_n)$, $\varphi_i \sim \psi_i (i = 1, \cdots, n)$. 则易证

$$T((\varphi_1 \Leftrightarrow \psi_1)^{k_1} \& \cdots \& (\varphi_n \Leftrightarrow \psi_n)^{k_n}) = 1.$$

从而由 $(A, \mathscr{R}, 1)X \vdash \sigma_{17}$ 可推得

$$T(u_d(\varphi_1, \cdots, \varphi_n) \Leftrightarrow u_d(\psi_1, \cdots, \psi_n)) = 1.$$

由 $T$ 的任意性即得

$$(A, \mathscr{R}, 1)X \vdash (u_d(\varphi_1, \cdots, \varphi_n) \Leftrightarrow u_d(\psi_1, \cdots, \psi_n)),$$

所以 $u_d(\varphi_1, \cdots, \varphi_n) \sim u_d(\psi_1, \cdots, \psi_n)$.

综上所述知 ~ 是 $F$ 上的 $\mathscr{E}$ 同余关系.

iii) 设 $\varphi_1 \in \bar{\varphi}$, $\psi_1 \in \bar{\psi}$, 则 $\varphi < \psi$ 当且仅当 $\varphi_1 < \psi_1$. 所以由(7.4.23)式定义的 $\leqslant$ 是合理的. $\leqslant$ 显然是 $F(X)$ 上的偏序. 在 i) 中已证 $0 < \varphi$. 所以 $\bar{0}$ 是 $F(X)$ 的最小元. 由 $(A, \mathscr{R}, 1)X \vdash \sigma_4$ 知 $\bar{1}$ 是 $F(X)$ 的最大元. 容易看出(7.4.24)式是成立的, 所以 $(F(X), \leqslant)$ 是有界格.

iv) 设 $F(X)$ 上的二元运算 $\otimes$ 与 $\rightarrow$ 由(7.4.25)式定义, 则由 $(A, \mathscr{R}, 1)X \vdash \sigma_{14}$ 知 $\varphi < (\psi \Rightarrow (\varphi \& \psi))$. 那么

$$\bar{\varphi} \leqslant \overline{\psi \Rightarrow (\varphi \& \psi)} = \bar{\psi} \rightarrow \overline{\varphi \& \psi} = \bar{\psi} \rightarrow \bar{\varphi} \otimes \bar{\psi}.$$

又由 $(\varphi \Rightarrow \psi) < (\varphi \Rightarrow \psi)$ 以及 $(A, \mathscr{R}, 1)X \vdash \sigma_{15}(\varphi \Rightarrow \psi, \varphi, \psi)$ 可得

$$(\bar{\varphi} \rightarrow \bar{\psi}) \otimes \bar{\varphi} \leqslant \bar{\psi},$$

即条件(A′)与(A″)都成立, 所以 $(\otimes, \rightarrow)$ 是 $F(X)$ 上的伴随对.

由 $(A, \mathscr{R}, 1)X \vdash \sigma_7$ 可证

$$\bar{\varphi} \leqslant \bar{\psi} \rightarrow \bar{\chi} \quad \text{当且仅当} \ \bar{\psi} \leqslant \bar{\varphi} \rightarrow \bar{\chi},$$

即 $(R_6)$ 成立. 那么由 $(M_6)$ 知 $\bar{\varphi} \otimes \bar{\psi} \leqslant \bar{\chi}$ 当且仅当 $\bar{\psi} \otimes \bar{\varphi} \leqslant \bar{\chi}$. 所以 $\otimes$ 是交换的.
由 $(A, \mathscr{R}, 1)X \vdash \sigma_{16}$ 得

$$(\bar{\varphi} \otimes \bar{1} \rightarrow \bar{\varphi}) \wedge (\bar{\varphi} \rightarrow \bar{\varphi} \otimes \bar{1}) = \bar{1},$$

故

$$\bar{\varphi} \otimes \bar{1} \leqslant \bar{\varphi} \leqslant \bar{\varphi} \otimes \bar{1},$$

所以 $\bar{\varphi} \otimes \bar{1} = \bar{\varphi}$, 即 $\bar{1}$ 是乘法 $\otimes$ 的单位.

由 $(A, \mathscr{R}, 1)X \vdash \sigma_6$ 可证

$$(\bar{\psi} \rightarrow \bar{\chi}) \leqslant ((\bar{\varphi} \rightarrow \bar{\psi}) \rightarrow (\bar{\varphi} \rightarrow \bar{\chi})),$$

即 $(R_3)$ 成立. 所以 $(M_3)$ 也成立, 即

$$(\bar{\varphi} \otimes \bar{\psi}) \otimes \bar{\chi} \leqslant \bar{\varphi} \otimes (\bar{\psi} \otimes \bar{\chi}).$$

再由 $\otimes$ 的交换性得

$$\begin{aligned} \bar{\varphi} \otimes (\bar{\psi} \otimes \bar{\chi}) &= (\bar{\chi} \otimes \bar{\psi}) \otimes \bar{\varphi} \\ &\leqslant \bar{\chi} \otimes (\bar{\psi} \otimes \bar{\varphi}) \\ &= (\bar{\varphi} \otimes \bar{\psi}) \otimes \bar{\chi}. \end{aligned}$$

所以 $\otimes$ 满足结合律. 那么 $\langle F(X), \otimes, \bar{1} \rangle$ 是带单位 $\bar{1}$ 的交换半群. 所以 $\langle F(X), \otimes, \rightarrow \rangle$ 是剩余格.

v) 由 $(A, \mathscr{R}, 1)X \vdash \sigma_{17}$ 可证对每个 $d \in \Delta$, 由(7.4.25)式定义的 $\bar{d}$ 与 $\langle F(X), \otimes, \rightarrow \rangle$ 匹配, 且 $Ar(\bar{d}) = Ar(d)$, $Ex(\bar{d}) = Ex(d)$, 所以 $\mathscr{E}(X) = \langle \langle F(X), \otimes, \rightarrow \rangle, \mathscr{U} \rangle$ 是与 $\mathscr{E}$ 有相同全型的强剩余格.

vi) 设在 $L$ 中 $a \leqslant b$. 由定理的条件 ii) 得 $(A, \mathscr{R}, b)X \vdash b$, 从而 $(A, \mathscr{R}, a)X \vdash b$. 由(7.4.21)式得 $a < b$, 从而 $\bar{a} \leqslant \bar{b}$. 所以 $j$ 保序.

由 $(A, \mathscr{R}, 1)X \vdash ((a \wedge b) \Rightarrow (a \wedge b))$ 得 $a \wedge b < a \wedge b$(这里左边是两个公式 $a$

与 $b$ 的交，右边是 $L$ 中的一个公式 $a\wedge b$)，从而 $\overline{a\wedge b}\leqslant\overline{a\wedge b}$，即 $\bar{a}\wedge\bar{b}\leqslant\overline{a\wedge b}$，也即 $ja\wedge jb\leqslant j(a\wedge b)$. 又由 $j$ 保序知相反的不等式成立，所以 $j(a\wedge b)=ja\wedge jb$.

由定理的条件 ii)知$(A,\mathscr{R},a\to b)X\vdash(a\Rightarrow b)$. 那么由(7.4.21)式得$(a\to b)<(a\Rightarrow b)$. 又由$(A,\mathscr{R},1)X\vdash\sigma_2$ 得$(a\Rightarrow b)<(a\to b)$，所以$\overline{a\to b}=\overline{a\Rightarrow b}$. 故

$$j(a\to b)=\overline{a\to b}=\overline{a\Rightarrow b}=\bar{a}\to\bar{b}=ja\to jb.$$

由定理的条件 ii)知$(A,\mathscr{R},a\otimes b)X\vdash(a\& b)$，由此得$j(a\otimes b)\leqslant ja\otimes jb$. 又由 $a\leqslant b\to(a\otimes b)$得 $ja\leqslant j(b\to(a\otimes b))=jb\to j(a\otimes b)$，所以 $ja\otimes jb\leqslant j(a\otimes b)$，从而 $j(a\otimes b)=ja\otimes jb$.

最后，$j(a\vee b)=ja\vee jb$ 是下面的更强结果的推论.

由$(A,\mathscr{R},1)X\vdash\sigma_3$ 得 $d(a_1,\cdots,a_n)=u_d(a_1,\cdots,a_n)$. 由此可得

$$\begin{aligned}j(d(a_1,\cdots,a_n))&=\overline{M_d(a_1,\cdots,a_n)}\\&=\bar{d}(\bar{a}_1,\cdots,\bar{a}_n)\\&=\bar{d}(ja_1,\cdots,ja_n).\end{aligned}$$

这就证明了$j$: $\mathscr{E}\to\mathscr{E}(X)$是 $\mathscr{E}$同态.

vii)设 $L$ 完备. $M\subset L$. 若 $M=\varnothing$，则 $\vee M=0$. 由 $j\,0=\bar{0}$ 知

$$j(\vee M)=j\,0=\bar{0}=\vee j(M),$$

即 $j$ 保空并. 设 $M\neq\varnothing$，若对每个 $a\in M$ 均有 $ja\leqslant\bar{\varphi}$，即当 $a\in M$ 时$(A,\mathscr{R},a)X\vdash\varphi$，则由

$$\begin{aligned}(\mathrm{Con}_{A,\mathscr{R}}X)\varphi&=\vee\{b\in L\mid(A,\mathscr{R},b)X\vdash\varphi\}\\&\geqslant\vee\{a\mid a\in M\}=\vee M\end{aligned}$$

知$(A,\mathscr{R},\vee M)X\vdash\varphi$. 由(7.4.21)式，即$\overline{\vee M}\leqslant\bar{\varphi}$，也即 $j(\vee M)\leqslant\bar{\varphi}$. 所以由 $\bar{\varphi}$ 的任意性知 $j(\vee M)\leqslant\vee\{ja\mid a\in M\}$. 相反的不等式显然成立，所以 $j(\vee M)=\vee\{ja\mid a\in M\}$. 这就证明了 $j$ 保任意并.

至此定理 7.4.16 全部证毕.

### 7.4.4 若干命题

**命题 7.4.17** 设定理 7.4.16 的条件成立，$\mathscr{E}(X)$不是蜕化的. 若

i)对每个 $a\in L$，$r_4a\in\mathscr{R}$，

或

ii)对每个 $a\in L\backslash\{1\}$，有 $n\in\boldsymbol{N}$，使 $a^n=0$，

则$j$: $\mathscr{E}\to\mathscr{E}(X)$是单射.

**证** 首先注意，若 $j$ 不是单射，则有 $c\in L$ 使 $c\neq1$ 且对任何 $T\in L^F$，

$$\text{当 } T\geqslant A\vee X \text{ 且 } T \text{ 关于 } \mathscr{R} \text{ 闭时}，\quad Tc=1. \tag{7.4.27}$$

事实上，由 $j$ 不是单射知有 $a$，$b\in L$，$a\neq b$ 且 $ja=jb$. 令 $c=a\leftrightarrow b$，则由 $a\neq b$ 知

$c\neq 1$. 由 $ja=jb$ 知 $jc=ja\leftrightarrow jb=\bar{1}$，即对每个 $T\in L^F$，当 $T\geqslant A\vee X$ 且 $T$ 关于 $\mathscr{R}$ 闭时 $Tc=1$. 故(7.4.27)式成立.

i) 设对每个 $a\in L$，$r_4a\in\mathscr{R}$. 若 $j$ 不是单射，则有 $c$ 使(7.4.27)式成立. 由 $r_4c\in\mathscr{R}$ 知

$$T0 = T(r_4c)'(c) \geqslant (r_4c)''(Tc) = 1$$

对每个 $T\geqslant A\vee X$ 且 $T$ 关于 $\mathscr{R}$ 闭时成立. 由此得 $(A,\mathscr{R},1)X\vdash 0$，从而由(7.4.21)式得 $\bar{1}\leqslant\bar{0}$. 可见，$\mathscr{E}(X)$ 是蜕化的.

ii) 设命题的条件 ii) 成立. 若 $j$ 不是单射，取 $c$ 如上所述，且设 $c^n=0$，则

$$\bar{1} = j1 = (j1)^n = (jc)^n = j(c^n) = j0 = \bar{0}.$$

所以仍得出 $\mathscr{E}(X)$ 蜕化的结论.

**命题 7.4.18**　设定理 7.4.16 的条件成立，则

i) 设 $\mathscr{F}$ 是 $F(X)$ 中的滤子，且 $\mathscr{F}$ 仅含 $j(L)$ 中的一个元 $j1$，即

$$\mathscr{F}\cap j(L) = \{j1\}, \tag{7.4.28}$$

则 $\mathscr{F}$ 可扩张为满足(7.4.28)式的极大滤子.

ii) 设 $j:\mathscr{E}\to\mathscr{E}(X)$ 是单射，$\mathscr{F}$ 是满足(7.4.28)式的极大滤子，则对任何 $x\in F(X)$（为简便计，$\bar{x}$ 上方的“－”被略去），$x\notin\mathscr{F}$ 当且仅当

$$\text{存在 } u\in\mathscr{F},\ a\in L,\ a<1 \text{ 和 } n\in N \text{ 使 } x^n\otimes u\leqslant ja. \tag{7.4.29}$$

**证**　i) 显然满足(7.4.28)式的滤子按包含序所成的链都有上界，且仍满足(7.4.28)式，所以由 Zorn 引理知论断 i) 成立.

ii) 设 $\mathscr{F}$ 是满足(7.4.28)式的极大滤子，$x\in F(X)$. 若条件(7.4.29)成立，则 $x\notin\mathscr{F}$. 事实上，若 $x\in\mathscr{F}$，则推出 $ja\in\mathscr{F}$. 因为 $j$ 是单射，由 $a<1$ 知 $ja\neq j1$. 这与(7.4.28)式相矛盾. 故 $x\notin\mathscr{F}$. 反之，设条件(7.4.29)不成立. 令

$$\mathscr{F}^* = \{y\in F(X)\mid x^n\otimes u \leqslant y \text{ 对某个 } u\in\mathscr{F} \text{ 与 } n\in N \text{ 成立}\},$$

则易证 $\mathscr{F}^*$ 是 $F(X)$ 中的滤子，且由条件(7.4.29)不成立知 $\mathscr{F}^*$ 满足(7.4.28)式（即 $\mathscr{F}^*\cap j(L)=\{j1\}$）. 由 $x\otimes u\leqslant x\otimes 1=x$ 知 $x\in\mathscr{F}^*$. 又设 $y\in\mathscr{F}$，则由 $x\otimes y\leqslant 1\otimes y=y$ 知 $y\in\mathscr{F}^*$. 所以 $\mathscr{F}^*\supset\mathscr{F}\cup\{x\}$. 从而由 $\mathscr{F}$ 的极大性得 $\mathscr{F}^*=\mathscr{F}$，故 $x\in\mathscr{F}$.

以下称满足(7.4.28)式的(极大)滤子为 ***j*-(极大)滤子**.

**命题 7.4.19**　设命题 7.4.17 的条件成立，$L$ 是链，且

$$(A,\mathscr{R},1)\varnothing\vdash\lambda_n(\varphi,\psi)=\begin{cases}(\varphi\vee\psi)^n\Rightarrow(\varphi^n\vee\psi^n), & n\geqslant 1,\\ (\varphi\Rightarrow\psi)\vee(\psi\Rightarrow\varphi), & n=0,\end{cases} \tag{7.4.30}$$

则

i) 对任二 $x,y\in F(X)$，

$$(x\to y)\vee(y\to x)=1,\quad (x\vee y)^n=x^n\vee y^n. \tag{7.4.31}$$

ii) $j$-极大滤子 $\mathscr{F}$ 是素滤子，即

$$\text{当}(x \vee y) \in \mathscr{F}\text{时}, \quad x \in \mathscr{F}\text{或} y \in \mathscr{F}. \tag{7.4.32}$$

**证** i) 由(7.4.30)式立即得出$(\varphi \Rightarrow \psi) \vee (\psi \Rightarrow \varphi) \sim 1$，故

$$(\bar{\varphi} \to \bar{\psi}) \vee (\bar{\psi} \to \bar{\varphi}) = \overline{(\varphi \Rightarrow \psi) \vee (\psi \Rightarrow \varphi)} = \bar{1}.$$

分别以$x$, $y$记$\bar{\varphi}$与$\bar{\psi}$并略去$\bar{1}$上的“ - ”即得(7.4.31)式.

ii) 设$x \notin \mathscr{F}$, $y \notin \mathscr{F}$, 则由条件(7.4.29)知有$u$, $v \in \mathscr{F}$, $a$, $b \in L \backslash \{1\}$与$m$, $n \in \boldsymbol{N}$使

$$x^m \otimes u \leqslant ja, \qquad y^n \otimes v \leqslant jb.$$

取$k$为$\max(m, n)$，注意$L$是链，$a \vee b < 1$，$j$为单射，从而$j(a \vee b) < j1$，则由推论7.2.11得

$$\begin{aligned}(x \vee y)^k \otimes (u \otimes v) &= (x^k \vee y^k) \otimes (u \otimes v) \\ &= (x^k \otimes u \otimes v) \vee (y^k \otimes u \otimes v) \\ &\leqslant (x^m \otimes u) \vee (y^n \otimes v) \\ &\leqslant ja \vee jb = j(a \vee b) < j1,\end{aligned}$$

即$x \vee y$满足条件(7.4.29). 所以$(x \vee y) \notin \mathscr{F}$.

### 7.4.5 完备性定理

在第4章中我们就系统$\mathscr{L}^*$证明了$[F]$-完备性定理4.1.15，其基本思想是：把赋值格取为公式代数$F$的某种商代数以使完备性定理成立. 在Pavelka的逻辑中，虽然情况要复杂许多，但完备性定理也是在赋值格$\mathscr{E}$与公式代数$\mathscr{E}(X)$的某种商代数同构的情况下得出的. 以下将给出两个完备性定理，其中格都是完备链. 这两个定理的条件与证明虽不尽相同，但其证明有颇多相似之处，其共同的思路如下：

第一步，先证明可靠性，即对任一$X \in L^F$和$\varphi_0 \in F$，证明

$$(\mathrm{Con}_{A,\,\mathscr{R}}X)\varphi_0 \leqslant (\mathrm{Con}_{\mathscr{S}}X)\varphi_0.$$

第二步，证明完备性，即证明相反的不等式

$$(\mathrm{Con}_{A,\,\mathscr{R}}X)\varphi_0 \geqslant (\mathrm{Con}_{\mathscr{S}}X)\varphi_0. \tag{7.4.33}$$

首先可排除$\mathscr{E}(X)$蜕化的情形，因为那时$\mathscr{E}(X) = \{\bar{1}\}$，从而$(\mathrm{Con}_{A,\,\mathscr{R}}X)\varphi = 1$恒成立. 故可设$\mathscr{E}(X)$非蜕化. 为证明(7.4.33)式不妨设

$$(\mathrm{Con}_{A,\,\mathscr{R}}X)\varphi_0 = a_0 < 1. \tag{7.4.34}$$

然后当$a_0$在$L$中有后继元时令$b = a_0$，而当$a_0$无后继元时令$b$为$L$中任一大于$a_0$的元. 那么为证(7.4.33)式只需在$\mathscr{S}(P, \mathscr{E})$中找出一个赋值$T$使$T \geqslant X$且

$$T\varphi_0 \leqslant b \tag{7.4.35}$$

即可. 具体步骤是：

1° 定义

$$\mathscr{F}=\{y\in F(X)\mid y\geqslant(\bar{\varphi}_0\to jb)^n\ \text{对某个}\ n\in N\ \text{成立}\}.\qquad(7.4.36)$$

证明 $\mathscr{F}$是 $j$-滤子. 从而由命题 7.4.19 得出包含 $\mathscr{F}$的 $j$-素滤子 $\mathscr{F}^*$

2° 利用 $\mathscr{F}^*$ 是素滤子证明对每个 $x\in F(X)$，有 $c\in L$ 使

$$(x\leftrightarrow jc)\in\mathscr{F}^*.\qquad(7.4.37)$$

这样就可得出满足 $T\geqslant X$ 以及(7.4.35)式的赋值 $T$，从而完成了对完备性的证明.

事实上，设

$$f:\quad \mathscr{E}(X)\to\mathscr{E}(X)/\mathscr{F}^*$$

是从 $\mathscr{E}(X)$ 到其关于 $\mathscr{F}^*$ 的商代数(见定理 7.2.29)上的射影映射. 令

$$f\circ j:\quad \mathscr{E}\to\mathscr{E}(X)\to\mathscr{E}(X)/\mathscr{F}^*$$

为 $f$ 与 $j$ 的复合映射，则 $f\circ j$ 是 $\mathscr{E}$同构. 这是因为 $f\circ j$ 作为 $\mathscr{E}$同态的复合是 $\mathscr{E}$同态. 其次，设 $a\neq b$，由 $j$ 为单射(用命题 7.4.17)知 $ja\neq jb$，这时 $(ja\leftrightarrow jb)\notin\mathscr{F}^*$，因为反之将有 $j(a\leftrightarrow b)\in\mathscr{F}^*$. 但 $(a\leftrightarrow b)<1$，这与 $\mathscr{F}^*$ 是 $j$-滤子相矛盾，所以 $(ja\leftrightarrow jb)\notin\mathscr{F}^*$，从而 $f\circ ja\neq f\circ jb$. 这表明了 $f\circ j$ 是单射. 又由(7.4.37)式知 $F(X)$ 中每个公式 $x$ 都与某 $jc$ 属于同一同余类，所以由 $j(L)\subset\mathscr{E}(X)$ 知 $f\circ j$ 是满射. 这就证明了 $f\circ j$ 是同构.

现在作 $T\in L^F$ 如下：

$$T=(f\circ j)^{-1}\circ f\circ g:F\to L.$$

这里

$$g(\varphi)=\bar{\varphi}\quad(\varphi\in F),\qquad \text{从而}\ g\mid\mathscr{E}=j.$$

$T$ 作为同态自然保各连接词. 又设 $c\in L$，则

$$T(c)=((f\circ j)^{-1}\circ f\circ g)(c)=((f\circ j)^{-1}\circ f\circ j)(c)=c,$$

所以 $T$ 是 $\mathscr{S}(P,\mathscr{E})$ 中的赋值映射.

其次，设 $\psi\in F$，则 $(A,\mathscr{R},X(\psi))X\vdash\psi$，即 $X(\psi)<\psi$ 或 $j(X(\psi))\leqslant\bar{\psi}$，所以

$$\begin{aligned}T(\psi)&=((f\circ j)^{-1}\circ f\circ g)(\psi)=((f\circ j)^{-1}\circ f)(\bar{\psi})\\&\geqslant((f\circ j)^{-1}\circ f\circ j)(X(\psi))=X(\psi).\end{aligned}$$

这表示 $T\geqslant X$.

最后，由(7.4.36)式知 $(\bar{\varphi}_0\to jb)\in\mathscr{F}\subset\mathscr{F}^*$. 故由(7.2.47)式得 $f(\bar{\varphi}_0)\leqslant fjb$，从而

$$\begin{aligned}T(\varphi_0)&=((f\circ j)^{-1}\circ f\circ g)(\varphi_0)\\&=((f\circ j)^{-1}\circ f)(\bar{\varphi}_0)\\&\leqslant((f\circ j)^{-1}\circ f\circ j)(b)=b.\end{aligned}$$

这就证明了 $T\geqslant X$ 且(7.4.35)式成立.

**定理 7.4.20**　设 $L=\langle C_{m+1},\otimes,\to\rangle$ 是 $m+1(m\geqslant1)$ 元剩余链，

$$C_{m+1}=\{b_0,b_1,\cdots,b_m\},\qquad 0=b_0<b_1<\cdots<b_m=1.$$

$P$ 非空，$\mathscr{E} = \langle\langle C_{m+1}, \otimes, \to\rangle, \mathscr{U}\rangle$是强剩余格，其全型为$\langle Ar, Ex\rangle$. 设

$$\Sigma = \{\sigma_i \mid i = 1, \cdots, 17\} \cup \{\lambda_n \mid n = 0, 1, \cdots\}$$
$$\cup \{\mu_t(\varphi) \mid 0 \leqslant t < m, \varphi \in F(P, \mathscr{E})\}.$$

这里

$$\mu_t(\varphi) = ((\varphi \Rightarrow b_t) \vee (b_{t+1} \Rightarrow \varphi)),$$

$$A(\varphi) = \begin{cases} a, & \varphi = a, \\ a \otimes b, & \varphi = a\&b, \\ a \to b, & \varphi = a \Rightarrow b, \\ 1, & \varphi \in \Sigma, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

$$\mathscr{R} = \{r_1{}^*\} \cup \{r_i a \mid i = 2, 3, 4, a \in C_{m+1}\},$$

则 $F(P, \mathscr{E})$上的 $C_{m+1}$-语法$\langle A, \mathscr{R}\rangle$关于 $C_{m+1}$-语义 $\mathscr{S}(P, \mathscr{E})$完备.

**证** 首先注意定理7.4.16 的条件都成立，所以商代数 $\mathscr{E}(X)$存在.

i)$\langle A, \mathscr{R}\rangle$关于$\mathscr{S}(P, \mathscr{E})$可靠. 事实上，因为$L$是有限链，所以$L$满足$(\overline{\mathrm{R}}_1)$. $L$按(7.4.16)式构成完备的对偶 Heyting 代数，所以由命题 7.4.10、命题 7.4.11、命题7.4.14 和命题7.4.15 知$\mathscr{S}(P, \mathscr{E})$中每个 $T$ 关于 $\mathscr{R}$ 中每个规则都是闭的. 由 $T$ 为同态知

$$Ta = a, \quad T(a\&b) = a \otimes b, \quad T(a \Rightarrow b) = a \to b.$$

又由定理7.3.9 知 $\sigma_i(i=1, \cdots, 17)$都是 $\mathscr{E}$重言式，由例 7.3.10i)知 $\lambda_n(n=0, 1, \cdots)$也都是 $\mathscr{E}$重言式. 所以 $T \geqslant A$ 成立，从而由定义 7.1.27 知$\langle A, \mathscr{R}\rangle$ 关于 $\mathscr{S}(P, \mathscr{E})$ 可靠.

ii)不妨设 $\mathscr{E}(X)$非蜕化. 设(7.4.34)式中的 $a_0 = b_k < b_m$，$\mathscr{F}$由(7.4.36)式定义，其中 $b = b_k$. 显然 $\mathscr{F}$是 $F(X)$中的滤子. 以下证明 $\mathscr{F}$是 $j$-滤子. 反设有 $c<1$ 使 $jc \in \mathscr{F}$，则有 $n \in N$ 使

$$(\bar{\varphi}_0 \to jb_k)^n \leqslant jc. \tag{7.4.38}$$

由 $A$ 的定义知$(A, \mathscr{R}, 1)X \vdash ((\varphi_0 \Rightarrow b_k) \vee (b_{k+1} \Rightarrow \varphi_0))$. 由此可得

$$(\bar{\varphi}_0 \to jb_k) \vee (jb_{k+1} \to \bar{\varphi}_0) = j1.$$

由 $A$ 与 $\mathscr{R}$ 的定义知命题7.4.19 的条件成立，所以由上式得

$$j1 = (j1)^n = (\bar{\varphi}_0 \to jb_k)^n \vee (jb_{k+1} \to \bar{\varphi}_0)^n$$
$$\leqslant jc \vee (jb_{k+1} \to \bar{\varphi}_0) = j(c \vee (b_{k+1} \Rightarrow \varphi_0)).$$

由此得

$$(A, \mathscr{R}, 1)X \vdash ((b_{k+1} \Rightarrow \varphi_0) \vee c).$$

所以若 $T \geqslant A \vee X$ 且 $T$ 关于 $\mathscr{R}$ 闭，则 $T((b_{k+1} \Rightarrow \varphi_0) \vee c) = 1$. 由$(L, c)$消去律 $r_3c$ 与(7.4.16)式得

$$T(b_{k+1} \Rightarrow \varphi_0) = T(r_3c)'((b_{k+1} \Rightarrow \varphi_0) \vee c)$$

$$\geqslant (r_3 c)''(T((b_{k+1} \Rightarrow \varphi_0) \vee c))$$
$$= (r_3 c)''1 = c \leftarrow 1 = 1,$$

即$(A, \mathscr{R}, 1)X \vdash (b_{k+1} \Rightarrow \varphi_0)$. 那么 $b_{k+1} < \varphi_0$, $(A, \mathscr{R}, b_{k+1})X \vdash \varphi_0$, ⊢从而由 $T$ 的任意性得

$$(\mathrm{Con}_{A, \mathscr{R}} X)\varphi_0 \geqslant b_{k+1} > b_k.$$

这与(7.4.34)式以及 $a_0 = b_k$ 相矛盾, 所以$\mathscr{F}$是$j$-滤子. 由命题7.4.19, 存在包含$\mathscr{F}$的$j$-素滤子$\mathscr{F}^*$. 由前面对完备性证明的分析知以下只需证对每个 $x \in F(X)$, 有 $c \in C_{m+1}$使(7.4.37)式成立.

令

$$D_x = \{c \in C_{m+1} \mid (jc \to x) \in \mathscr{F}^*\},$$
$$H_x = \{c \in C_{m+1} \mid (x \to jc) \in \mathscr{F}^*\}.$$

显然, $0 \in D_x$ 且 $D_x$ 为下集, $1 \in H_x$ 且 $H_x$ 为上集. 由$\mathscr{F}^*$为素滤子和 $\lambda_0 \in \Sigma$ 从而

$$(jc \to x) \vee (x \to jc) = j1 \in \mathscr{F}^*$$

知$(jc \to x) \in \mathscr{F}^*$或$(x \to jc) \in \mathscr{F}^*$. 所以 $D_x \cup H_x = C_{m+1}$. 若 $D_x \cap H_x = \varnothing$. 则由 $D_x$ 为下集且 $H_x$ 为上集知有 $t \leqslant m-1$ 使 $b_t$ 为 $D_x$ 的最大元且 $b_{t+1}$为 $H_x$ 的最小元. 设 $x = \bar{\psi}$. 由

$$(A, \mathscr{R}, 1)X \vdash \mu_t(\psi) = ((\psi \Rightarrow b_t) \vee (b_{t+1} \Rightarrow \psi))$$

得

$$(\bar{\psi} \to jb_t) \vee (jb_{t+1} \to \bar{\psi}) = j1 \in \mathscr{F}^*.$$

由$\mathscr{F}^*$为素滤子知$(\bar{\psi} \to jb_t) \in \mathscr{F}^*$或$(jb_{t+1} \to \bar{\psi}) \in \mathscr{F}^*$, 即 $b_t \in H_x$ 或 $b_{t+1} \in D_x$. 矛盾. 所以 $D_x \cap H_x \neq \varnothing$. 设 $c \in D_x \cap H_x$, 则

$$(jc \to x) \in \mathscr{F}^* \quad 且 \quad (x \to jc) \in \mathscr{F}^*.$$

所以(7.4.37)式成立.

**推论 7.4.21**　设定理 7.4.20 的条件成立, $X \in L^F$, $\varphi \in F$, 则有证明 $W$ 使

$$W^{\urcorner} = \varphi \quad 且 \quad (\mathrm{Con}_{\mathscr{S}} X)\varphi = \hat{W}X. \tag{7.4.39}$$

**证**　因为 $L$ 是对偶良序集, 由推论 7.1.22 知有以 $\varphi$ 为目标的证明 $W$ 使$(\mathrm{Con}_{A, \mathscr{R}} X)\varphi = \hat{W}X$. 由完备性定理 7.4.20 即得(7.4.39)式.

**定理 7.4.22**　设$L = [0, 1]$, $(\otimes, \to)$是 $L$ 上的 Łukasiewicz 伴随对, $P$ 非空, $\mathscr{E} = \langle\langle L, \otimes, \to\rangle, \mathscr{U}\rangle$是强剩余格, 其全型为$\langle Ar, Ex\rangle$. 设

$$\vartheta_1 = \{l_1(\varphi, a, b, a_1, b_1, n) \mid 0 \leqslant a_1 < a \leqslant 1,$$
$$0 \leqslant b < b_1 \leqslant 1, na + b \leqslant na_1 + b_1, \varphi \in F, n \in N\},$$
$$\vartheta_2 = \{l_2(\varphi, a, b, a_1, b_1, n) \mid 0 \leqslant a < a_1 \leqslant 1,$$
$$0 \leqslant b < b_1 \leqslant 1, na - b \geqslant na_1 - b_1, \varphi \in F, n \in N\},$$
$$\Sigma = \{\sigma_i \mid i = 1, \cdots, 17\} \cup \{\lambda_n \mid n = 0, 1, \cdots\} \cup \vartheta_1 \cup \vartheta_2,$$

$$A(\varphi)=\begin{cases}a, & \varphi=a,\\ a\otimes b, & \varphi=a\&b,\\ a\to b, & \varphi=a\Rightarrow b,\\ 1, & \varphi\in\Sigma,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

$$\mathscr{R}=\{r_1{}^*\}\cup\{r_2a\mid a\in L\},$$

则 $F(P,\mathscr{E})$ 上的 $L$-语法 $\langle A,\mathscr{R}\rangle$ 关于 $L$-语义 $\mathscr{S}(P,\mathscr{E})$ 完备.

**证** 仍考虑 $\mathscr{E}(X)$ 非蜕化的情形. 注意, 定理 7.4.16 的各条件均已满足, 从而商代数 $\mathscr{E}(X)$ 存在.

i) 因为 $\mathscr{R}$ 中各规则关于 $\mathscr{S}(P,\mathscr{E})$ 可靠, 且由 $A$ 的定义以及例 7.3.10iii) 知 $A\leqslant \mathrm{Con}_{\mathscr{S}}\varnothing$, 这里 $\mathscr{S}=\mathscr{S}(P,\mathscr{E})$. 所以由定义 7.1.27 知 $\langle A,\mathscr{R}\rangle$ 关于 $\mathscr{S}(P,\mathscr{E})$ 可靠.

ii) 为证完备性, 只需对任一 $X\in L^F$ 和 $\varphi_0\in F$ 证明 (7.4.33) 式成立. 不妨设 (7.4.34) 式成立. 取 $b$ 使 $a_0<b\leqslant 1$. 以下只需证由 (7.4.36) 式定义的 $\mathscr{F}$ 是 $j$-滤子且对每个 $x\in F(X)$, 有 $c\in L$ 使 (7.4.37) 式成立.

设有 $c\in[0,1)$ 使 $jc\in\mathscr{F}$ 成立, 则有 $n\in\boldsymbol{N}$ 使

$$(\bar{\varphi}_0\to jb)^n\leqslant jc,$$

从而由 $A$ 的定义与 (7.4.31) 式以及推论 7.2.11 得

$$\begin{aligned} j1&=(j1)^n=(j((\varphi_0\Rightarrow b)\vee(b\Rightarrow\varphi_0)))^n\\ &=(\bar{\varphi}_0\to jb)^n\vee(jb\to\bar{\varphi}_0)^n\\ &\leqslant jc\vee(jb\to\bar{\varphi}_0)^n\leqslant jc\vee(jb\to\bar{\varphi}_0). \end{aligned}$$

由 (7.2.21) 式知 $c$ 是 Łukasiewicz 区间 $[0,1]$ 中的幂零元, 即有 $m\in\boldsymbol{N}$ 使 $c^m=0$. 那么由上式得

$$\begin{aligned} j1&=(j1)^m\leqslant(jc)^m\vee(jb\to\bar{\varphi}_0)^m\\ &=j0\vee(jb\to\bar{\varphi}_0)^m\leqslant(jb\to\bar{\varphi}_0), \end{aligned}$$

从而 $jb\leqslant\bar{\varphi}_0$, 即 $b<\varphi_0$ 或 $(\mathrm{Con}_{A,\mathscr{R}}X)\varphi_0\geqslant b$. 这与 (7.4.34) 式相矛盾. 可见, $jc\notin\mathscr{F}$, 从而 $\mathscr{F}$ 为 $j$-滤子.

设 $x\in F(X)$. 定义

$$D_x=\{c\in[0,1]\mid(jc\to x)\in\mathscr{F}^*\},$$

$$H_x=\{c\in[0,1]\mid(x\to jc)\in\mathscr{F}^*\},$$

则 $0\in D_x$ 且 $D_x$ 为下集, $1\in H_x$ 且 $H_x$ 为上集. 由 $\mathscr{F}^*$ 为素滤子可得 $D_x\cup H_x=[0,1]$. 以下证明 $D_x$ 与 $H_x$ 都是 $[0,1]$ 中的闭集.

设 $a\notin D_x$, 由 $D_x$ 为下集知为证 $D_x$ 为闭集只需证存在 $a_1\in[0,a)$ 使 $a_1\notin D_x$ 即可. 由 $a\notin D_x$ 知 $(ja\to x)\notin\mathscr{F}^*$. 所以由条件 (7.4.29) 知有 $b<1$, $n\in\boldsymbol{N}$ 和

$u \in \mathscr{F}^*$ 使

$$(ja \to x)^n \otimes u \leqslant jb.$$

这时 $u \leqslant ((ja \to x)^n \to jb)$，所以 $((ja \to x)^n \to jb) \in \mathscr{F}^*$. 取 $b_1$ 使 $b < b_1 < 1$ 且使 $b_1 - b$ 充分小，使 $a_1 = a - (b_1 - b)/n \geqslant 0$. 设 $x = \bar{\psi}$，则由

$$0 \leqslant a_1 < a \leqslant 1, \ 0 \leqslant b < b_1 < 1 \quad 和 \quad na + b = na_1 + b_1$$

以及 $\underset{\cdot}{A}$ 的定义知

$$(A, \mathscr{R}, 1)X \vdash l_1(\psi, a, b, a_1, b_1, n)$$
$$= (((a \Rightarrow \psi)^n \Rightarrow b) \Rightarrow ((a_1 \Rightarrow \psi)^n \Rightarrow b_1)).$$

由此得

$$((ja \to x)^n \to jb) \leqslant ((ja_1 \to x)^n \to jb_1).$$

从而由上式左边属于 $\mathscr{F}^*$ 知 $((ja_1 \to x)^n \to jb_1) \in \mathscr{F}^*$. 若 $(ja_1 \to x) \in \mathscr{F}^*$，则 $(ja_1 \to x)^n \in \mathscr{F}^*$，从而由

$$(ja_1 \to x)^n \otimes ((ja_1 \to x)^n \to jb_1) \leqslant jb_1$$

知 $jb_1 \in \mathscr{F}^*$，这里 $b_1 < 1$，与 $\mathscr{F}^*$ 是 $j$-滤子相矛盾. 故 $(ja_1 \to x) \notin \mathscr{F}^*$，那么 $a_1 \notin D_x$. 所以 $D_x$ 是 $[0, 1]$ 中的闭集.

请读者利用 $(A, \mathscr{R}, 1)X \vdash l_2$ 证明 $H_x$ 也是闭集.

因为 $[0, 1]$ 连通且可表为二闭集 $D_x$ 与 $H_x$ 之并，所以 $D_x$ 与 $H_x$ 必相交. 故任取 $c \in D_x \cap H_x$，则(7.4.37)式成立.

**推论 7.4.23** 设定理 7.4.22 的条件成立，$X \in L^F$，$\varphi \in F$，则有以 $\varphi$ 为目标的证明序列 $W^{(1)}$，$W^{(2)}$，…使

$$\lim_{n \to \infty} \hat{W}^{(n)} X = (\mathrm{Con}_{\mathscr{S}} X)\varphi. \tag{7.4.40}$$

这里 $F = F(X)$，$\mathscr{S} = \mathscr{S}(P, \mathscr{E})$.

**证** 由定理 7.1.20 和定理 7.4.22 并注意 $L = [0, 1]$ 即得推论 7.4.23.

**注 7.4.24** 在注 7.1.31 中我们曾经说过，Pavelka 逻辑中的完备性是很强的完备性，加之其中不涉及非运算，所以从这里的不完备性定理推不出当公理集 $A$ 以及假设集 $X$ 都是分明集时相应的不完备性定理. 但是从这里的完备性定理当然可推出相应的分明情形的完备性定理. 比如，在完备性定理 7.4.20 中设 $m = 1$，即 $C_{m+1} = \{0, 1\}$，就得出经典命题演算的完备性定理. 事实上，这时的 Lukasiewicz 蕴涵算子已成为经典的蕴涵算子，伴随对 $(\otimes, \to)$ 已成为 $(\wedge, \to)$，证明 $W$ 的值非 1 即 0，且定理 7.1.20 已具有很简单的形式. 再取 $\Delta = \varnothing$，并令 $\neg a = a \to 0 \ (a = 0, 1)$. $\neg \varphi = \varphi \Rightarrow 0$ 即可验证以上论断，请读者完成其余的细节.

# 第 8 章 Fuzzy 推理的非 Fuzzy 形式

## 8.1 引　言

如我们在第 3 章开始时所说，Fuzzy 推理是 Fuzzy 控制技术的理论基础. 关于 Fuzzy 推理已有大量的研究成果(见文献[10])，但这些理论研究似乎尚没有一个可靠的逻辑基础. 在 4.2 节中我们建立了部分赋值重言式理论，基于此，我们于 4.5 节中把 Fuzzy 推理纳入 $\Sigma(\bar{E})$ 的语义框架中，这自然就在一定程度上为 Fuzzy 推理提供了逻辑依据(见文献[71]). 在本章中我们通过将 Fuzzy 推理形式化的方法而将其移植到经典逻辑学之中，进一步从语构和语义两个方面为 Fuzzy 推理奠定可靠的逻辑基础. 当然，这种新的理论虽然与 Fuzzy 推理完全相似，但已经不再具有任何 Fuzzy 的涵意了. 顺便指出，最近 Zadeh 在文献[73]中所提出的 Fuzzy 逻辑的机制完全不同于传统的多值逻辑系统的机制的看法是应该随本章理论的建立而作适当的修正了. 在下面将看到，在多值系统乃至在经典的二值逻辑系统中是存在着与 Fuzzy 逻辑完全相似的推理机制的.

首先回忆一下 Fuzzy 推理的最基本的形式：

$$\begin{array}{ll} \text{已知} & A(x) \longrightarrow B(y) \\ \text{且给定} & A^*(x) \\ \hline \text{求} & \qquad B^*(y). \end{array} \tag{8.1.1}$$

这里 $A$, $A^*$ 与 $B$, $B^*$ 分别是论域 $X$ 与 $Y$ 上的 Fuzzy 集. 在第四章中我们提出了求解(8.1.1)式的三 I 原则，并证明了 $R_0$ 型三 I FMP 算法如下：

$$B^*(y) = \sup_{x \in E_y}\{A^*(x) \wedge R_0(A(x), B(y))\}, \quad y \in Y, \tag{8.1.2}$$

这里

$$E_y = \{x \in X \mid (A^*(x))' < R_0(A(x), B(y))\}, \quad y \in Y. \tag{8.1.3}$$

可以通过使用[0, 1]上的一个新算子而将上述公式简化.

**定义 8.1.1**　设 $\rightarrow$: $[0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ 是 $R_0$ 蕴涵算子. 令

$$a \otimes b = \neg(a \rightarrow \neg b), \quad a, b \in [0, 1], \tag{8.1.4}$$

这里 $\forall x \in [0, 1]$, $\neg x = x' = 1 - x$, 则得一新的算子 $\otimes$: $[0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$, 称为[0, 1]上的**圈乘算子**.

其实，$\otimes$ 就是与 $R_0$ 互为伴随的算子，即下面的命题成立.

**命题 8.1.2**　$\otimes$: $[0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ 是单调算子，且

$$a \otimes b \leqslant c \quad \text{当且仅当} \quad a \leqslant b \rightarrow c, \quad a, b, c \in [0, 1]. \tag{8.1.5}$$

请读者自行证明命题 8.1.2 以及命题 8.1.3.

**命题 8.1.3**　设⊗是[0, 1]上的圈乘算子，则

$$a \otimes b = \begin{cases} a \wedge b, & a + b > 1, \\ 0, & a + b \leqslant 1. \end{cases} \tag{8.1.6}$$

从而一般说来 $a \otimes b$ 要比 $a \wedge b$ 小.

考虑(8.1.3)式，设 $x \in E_y$，则 $A^*(x) + R_0(A(x), B(y)) > 1$，从而由(8.1.6)式知

$$A^*(x) \wedge R_0(A(x), B(y)) = A^*(x) \otimes R_0(A(x), B(y)), \quad x \in E_y. \tag{8.1.7}$$

若 $x \notin E_y$，则 $A^*(x) + R_0(A(x), B(y)) \leqslant 1$，从而由(8.1.6)式知

$$A^*(x) \otimes R_0(A(x), B(y)) = 0, \quad x \notin E_y. \tag{8.1.8}$$

由(8.1.7)式和(8.1.8)式知(8.1.2)式可得以简化，我们已经看出下面的定理成立.

**定理 8.1.4**　FMP(1)的 $R_0$ 型三 I 解 $B^*$ 的算法如下：

$$B^*(y) = \sup_{x \in X}\{A^*(x) \otimes R_0(A(x), B(y))\}, \quad y \in Y. \tag{8.1.9}$$

对于算子 $R_0$ 而言，第 4 章中得出的 FMP 问题的 CRI 解(4.3.4)式为

$$B^*(y) = \sup_{x \in X}\{A^*(x) \wedge R_0(A(x), B(y))\}.$$

与(8.1.9)式相比较，由命题 8.1.3 再次看出三 I 解比 CRI 解小.

本章的以下部分是这样安排的：8.2 节在经典二值逻辑系统 $\mathscr{L}$ 中通过语构途径建立与 Fuzzy 推理相对应的理论，在 8.3 节中则将这一理论拓广到多值系统 $\mathscr{L}^*$ 中. 8.4 节在 $\mathscr{L}$ 中通过语义途径建立 Fuzzy 推理的非 Fuzzy 模式. 最后在 8.5 节中将 8.4 节的内容推广到 Łukasiewicz 三值系统中.

## 8.2　二值逻辑系统 $\mathscr{L}$ 中的广义与多重广义 MP 规则的语构理论

### 8.2.1　两个基本问题

我们在二值逻辑系统 $\mathscr{L}$ 中考虑如下两个问题：

**问题 8.2.1**(广义 MP 问题)

$$\begin{array}{ll} \text{已知} & A \longrightarrow B \\ \underline{\text{且给定}\quad A^*} & \\ \text{求} & B^* \end{array} \qquad A,\quad B, A^*, B^* \in F(S). \tag{8.2.1}$$

**问题 8.2.2**(多重广义 MP 问题)

$$\begin{array}{ll} \text{已知} & A_i \longrightarrow B \\ \underline{\text{且给定}\quad A_i^*} & \\ \text{求} & B^* \end{array} \qquad A_i,\quad B, A_i^*, B^* \in F(S) \quad (i=1, \cdots, n). \tag{8.2.2}$$

**注 8.2.3** i) 以上各大写字母均表示 $\mathscr{L}$ 中的公式, 即 $F(S)$ 中的元素, 在本节中 $F(S)$ 是由 $S=\{p_1, p_2, \cdots\}$ 生成的 $(\neg, \rightarrow)$ 型自由代数. 后面将要出现的连接词 $\vee$ 与 $\wedge$ 只是起简写的作用. $A\vee B$ 表示 $\neg A\rightarrow B$, $A\wedge B$ 表示 $\neg(A\rightarrow\neg B)$.

ii) 在以上两个问题中我们使用了"求 $B^*$"一词. 其实, 我们是问应当如何"定义 $B^*$"才能使相应的算法成为 Fuzzy 推理在 $\mathscr{L}$ 中的对应物. 在 (8.2.1) 式中如果 $A^*$ 就是 $A$, 那么广义 MP 问题就成为经典的 MP 问题, $B^*$ 自然就是 $B$ 了. 当 $A^*$ 不同于 $A$ 时也给出一种求 $B^*$ 的算法可以看成是一类实际问题在经典逻辑学中的反映. 请读者回顾本书前言中的问题 4 和问题 5 便可领悟广义 MP 问题的实际背景了. 以下就来讨论如何定义以及如何计算广义 MP 问题的解 $B^*$. 在此基础上可以进一步讨论多重广义 MP 问题, 正是这一问题的解, 其计算公式与 Fuzzy MP 问题的解的计算公式完全类似.

### 8.2.2 一组公式的根

**定义 8.2.4** 设 $A$, $B\in F(S)$, 规定

$$A < B \qquad \text{当且仅当 } \vdash(A\rightarrow B), \tag{8.2.3}$$

则 $F(S)$ 成为一预序集, 记作 $(F(S), <)$.

注意, $<$ 并不是 $F(S)$ 上的偏序, 因为反对称性不成立. 如令 $A$ 为 $p\rightarrow p$, $B$ 为 $q\rightarrow q$, 则 $A<B$ 且 $B<A$, 但 $A\neq B$.

**定义 8.2.5** 设 $\Gamma\subset F(S)$, 以 $D(\Gamma)$ 记全部 $\Gamma$-推论之集, 即

$$D(\Gamma) = \{A\in F(S) \mid \Gamma\vdash A\}. \tag{8.2.4}$$

如果 $D(\Gamma)$ 在 $(F(S), <)$ 中有最小元, 比如 $A$, 则称 $A$ 为 $\Gamma$ 的**根**.

**例 8.2.6** i) 设 $\Gamma$ 为空集, 则 $\Gamma$ 的根就是定理.

ii) 设 $\Gamma=F(S)$, 则 $\Gamma$ 的根就是矛盾式.

iii) 设 $\Gamma=S$, 则 $\Gamma$ 没有根. 先证明 $D(S)\neq F(S)$. 事实上, 若 $D(S)=F(S)$, 任取矛盾式 $A$, 则 $A\in D(S)$. 因为 $A$ 只含有限多个原子公式, 所以取 $n$ 充分大使有 $A\in D(\{p_1, \cdots, p_n\})$. 这时由演绎定理知

$$B = p_1\rightarrow(p_2\rightarrow(\cdots\rightarrow(p_n\rightarrow A)\cdots))$$

是一个定理, 从而是一个重言式. 取赋值 $v\in\Omega$ 使

$$v(p_i) = 1 \qquad (i=1, \cdots, n),$$

则由 $v(A)=0$ 知 $v(B)=0$. 矛盾. 可见 $D(S)\neq F(S)$. 由此易知 $D(S)$ 中不含矛盾式. 今设 $A=f(p_{i_1}, \cdots, p_{i_m})$ 且 $A$ 不是矛盾式, 故有 $v\in\Omega$ 使 $v(A)=1$. 不妨设对充

分大的 $n$ 有$v(p_n)=0$,则对此种 $p_n$，由 $v(A\to p_n)=0$ 知 $A\to p_n$ 不是定理，即 $A<p_n$ 不成立. 但$p_n\in D(S)$，所以 $A$ 不是 $D(S)$的最小元. 这就证明了 $S$ 没有根.

容易证明下面的命题.

**命题 8.2.7**　设 $\Gamma\subset F(S)$，$A$，$B\in F(S)$.

i)若 $A$ 与 $B$ 都是 $\Gamma$ 的根，则 $A\sim B$，即 $A$ 与 $B$ 可证等价.

ii) $A$ 是 $\Gamma$ 的根当且仅当 $D(\Gamma)=D(A)$，这里 $D(A)$是$D(\{A\})$的简写.　(8.2.5)

上述命题的证明留给读者. 由 i)看出，$\Gamma$ 如果有根，则在可证等价(或逻辑等价)的意义下根是唯一的.

**定理 8.2.8**　$F(S)$的每个有限子集都有根. 设 $A$ 是 $\Gamma=\{A_1,\cdots,A_n\}$ 的根，则

$$A\sim A_1\wedge\cdots\wedge A_n. \tag{8.2.6}$$

**证**　设 $P$，$Q$，$R\in F(S)$，则易证

$$(P\wedge Q\to R)\sim(P\to(Q\to R)), \tag{8.2.7}$$

由此用归纳法易证

$$\left(\bigwedge_{i=1}^{n}A_i\to B\right)\sim(A_1\to(A_2\to(\cdots\to(A_n\to B)\cdots). \tag{8.2.8}$$

设 $A$ 满足(8.2.6)式，先证明 $D(A)\subset D(\Gamma)$. 由(8.2.6)式与(8.2.8)式得

$$\vdash(A_1\to(A_2\to(\cdots\to(A_n\to A)\cdots). \tag{8.2.9}$$

使用 $n$ 次 MP 规则便得$\{A_1,\cdots,A_n\}\vdash A$，从而 $A\in D(\Gamma)$. 由此得 $D(A)\subset D(\Gamma)$. 其次，设 $B\in D(\Gamma)$，即$\{A_1,\cdots,A_n\}\vdash B$，则使用演绎定理 $n$ 次便得

$$\vdash(A_1\to(A_2\to(\cdots\to(A_n\to B)\cdots). \tag{8.2.10}$$

由此以及(8.2.8)式和(8.2.6)式就得到 $\vdash(A\to B)$. 这表明 $A\vdash B$，即 $B\in D(A)$. 由 $B$ 的任意性得 $D(\Gamma)\subset D(A)$. 这就证明了$D(\Gamma)=D(A)$，从而 $A$ 是 $\Gamma$ 的根.

**定义 8.2.9**　设 $\Gamma_k\subset F(S)(k=1,\cdots,m)$，则$\bigcap_{k=1}^{m}D(\Gamma_k)$中的元素叫 $\Gamma_1,\cdots,\Gamma_m$ 的**公共推论**，其中若存在最小者，则此最小者叫 $\Gamma_1,\cdots,\Gamma_m$ 的**公根**.

**定理 8.2.10**　设 $\Gamma_k\subset F(S)$且 $\Gamma_k$ 有根 $A_k(k=1,\cdots,m)$，则 $\Gamma_1,\cdots,\Gamma_m$ 有公根 $A$，且

i)$A\sim\bigvee_{k=1}^{m}A_k$.

ii)$\bigcap_{k=1}^{m}D(\Gamma_k)=D(A)$.

**证**　i)易证 $A_l<\bigvee_{k=1}^{m}A_k(l=1,\cdots,m)$. 注意，一旦某公式是 $\Gamma$-推论，则在$(F(S),<)$中比该公式大的公式也是 $\Gamma$-推论，所以$\bigvee_{k=1}^{m}A_k$ 是 $\Gamma_1,\cdots,\Gamma_m$ 的公共推论. 其次，设 $B$ 是 $\Gamma_1,\cdots,\Gamma_m$ 的任一公共推论，则由 $A_k$ 是 $\Gamma_k$ 的根知

$$\vdash(A_k\to B)\quad(k=1,\cdots,m), \tag{8.2.11}$$

从而

$$\vdash \bigwedge_{k=1}^{m}(A_k \to B). \tag{8.2.12}$$

由归纳法易证 $\bigwedge_{k=1}^{m}(A_k \to B) \sim (\bigvee_{k=1}^{m} A_k \to B)$. 故由(8.2.12)式得

$$\vdash(\bigvee_{k=1}^{m} A_k \to B), \quad 即 \bigvee_{k=1}^{m} A_k < B.$$

这就证明了 $\bigvee_{k=1}^{m} A_k$ 是 $\Gamma_1, \cdots, \Gamma_m$ 的最小公共推论，即公根.

ii)由 i)知 $A_k < A$, 从而

$$D(A) \subset D(A_k) = D(\Gamma_k) \quad (k = 1, \cdots, m).$$

由此得

$$D(A) \subset \bigcap_{k=1}^{m} D(\Gamma_k).$$

另一方面，$\forall B \in \bigcap_{k=1}^{m} D(\Gamma_k)$, $B$ 是 $\Gamma_1, \cdots, \Gamma_m$ 的公共推论从而大于 $A$, 故 $B \in D(A)$. 这又证明了

$$\bigcap_{k=1}^{m} D(\Gamma_k) \subset D(A).$$

这就证明了 ii).

### 8.2.3 广义与多重广义 MP 问题的解的定义与计算

**定义 8.2.11** 设 $A, A^*, B \in F(S)$. 在 $\mathscr{L}$ 中,

i)广义 MP 问题(8.2.1)的 CRI 解 $B^*$ 是 $\Gamma = \{A \to B, A^*\}$ 的根.

ii)广义 MP 问题(8.2.1)的三 I 解 $B^*$ 是$(F(S), <)$中使(8.2.13)式成立的最小公式 $B^*$:

$$\vdash((A \to B) \to (A^* \to B^*)). \tag{8.2.13}$$

**定理 8.2.12** 设 $A, A^*, B \in F(S)$. 在 $\mathscr{L}$ 中,

i)广义 MP 问题(8.2.1)式的 CRI 解与三 I 解都存在且彼此可证等价.

ii)设 $B^*$ 是(8.2.1)式的解，则

$$B^* \sim A^* \wedge (A \to B). \tag{8.2.14}$$

**证** 由定理 8.2.8 知(8.2.1)式的 CRI 解 $B^*$ 存在，且满足(8.2.14)式. 以下只需证 $B^*$ 是$(F(S), <)$中使(8.2.13)式成立的最小公式. 事实上，由(8.2.14)式得

$$\begin{aligned}&((A \to B) \to (A^* \to B^*))\\ \sim &((A \to B) \to (A^* \to A^*))\\ &\wedge ((A \to B) \to (A^* \to (A \to B))).\end{aligned}$$

显然，

$$\vdash((A \to B) \to (A^* \to A^*))$$

与

$$\vdash((A \to B) \to (A^* \to (A \to B)))$$

都成立，故(8.2.13)式成立. 其次设

$$\vdash((A \to B) \to (A^* \to C)),$$

则由

$$\begin{aligned} &((A \to B) \to (A^* \to C)) \\ \sim &(A^* \to ((A \to B) \to C)) \\ \sim &(A^* \wedge (A \to B) \to C) \end{aligned}$$

得

$$\vdash(A^* \wedge (A \to B) \to C),$$

即 $\vdash(B^* \to C)$ 成立，所以 $B^* < C$.

**注 8.2.13**　如果 $A^*$ 就是 $A$，则广义 MP 问题(8.2.1)式就成为熟知的 MP 问题，但这时的 CRI 解 $B^*$ 是 $A \wedge (A \to B)$ 而不是 $B$. 易见 $B^*$ 和 $B$ 都是 $\Gamma = \{A \to B, A\}$ 的推论，即都是 $D(\Gamma)$ 的成员，只不过 $B^*$ 是 $D(\Gamma)$ 中最小的成员，而 $B$ 则一般不是最小的. 从根的意义和(8.2.5)式看，只要知道了 $\Gamma$ 的最小推论，把比它大的公式都拿来就得出了 $\Gamma$ 的全部推论. 这是根比 MP 解 $B$ 好的地方. 但请注意，这并不是说以后可以用 $A \wedge (A \to B)$ 来取代 $B$ 作为 MP 的解. 因为 $B$ 虽然不是 $\{A \to B, B\}$ 的最小推论，但其形式远较最小推论 $A \wedge (A \to B)$ 简单，而这正是大量的逻辑演算所需要的. 不过如果 $A \to B$ 与 $A$ 都是定理(对每个证明序列中的某两项运用 MP 规则时的情形就是如此)，则容易证明 $A \wedge (A \to B)$ 与 $B$ 是可证等价的，因为它们都是定理.

**定义 8.2.14**　设 $A_i, A_i^*, B \in F(S)\ (i = 1, \cdots, n)$. 在 $\mathscr{L}$ 中，

i) 多重广义 MP 问题(8.2.2)的 CRI 解是 $\Gamma_1, \cdots, \Gamma_n$ 的公根. 这里 $\Gamma_i = \{A_i \to B, A_i^*\}\quad (i = 1, \cdots, n)$.

ii) 多重广义 MP 问题(8.2.2)的三 I 解是 $(F(S), \leq)$ 中满足以下条件的最小公式 $B^*$：

$$\vdash((A_i \to B) \to (A_i^* \to B^*)) \quad (i = 1, \cdots, n). \tag{8.2.15}$$

**定理 8.2.15**　设 $A_i, A_i^*, B \in F(S)\ (i = 1, \cdots, n)$. 在 $\mathscr{L}$ 中，

i) 多重广义 MP 问题(8.2.2)的 CRI 解与三 I 解都存在且彼此可证等价.

ii) 设 $B^*$ 是(8.2.2)式的解，则

$$B^* \sim \bigvee_{i=1}^{n} (A_i^* \wedge (A_i \to B)). \tag{8.2.16}$$

**证**　由定理 8.2.10、定理 8.2.12 和定义 8.2.14 知由(8.2.16)式给出的 $B^*$ 是多重广义 MP 问题(8.2.2)的 CRI 解. 以下只需证明这个 $B^*$ 是 $(F(S), <)$ 中使

(8.2.15)式成立的最小公式即可. 事实上, $B^*$ 满足(8.2.15)式可像证明定理 8.2.12 的 ii)那样去证明, 以下证明其最小性. 设公式 $C$ 满足

$$\vdash((A_i \to B) \to (A_i^* \to C)) \quad (i = 1, \cdots, n),$$

则由$(P\to(Q\to R)) \sim (P\wedge Q\to R)$得

$$\vdash(A_i^* \wedge (A_i \to B) \to C) \quad (i = 1, \cdots, n).$$

因为定理的交是定理, 由上式得

$$\vdash \bigwedge_{i=1}^{n} (A_i^* \wedge (A_i \to B) \to C).$$

但$\bigwedge_{i=1}^{n}(P_i\to Q) \sim (\bigvee_{i=1}^{n}P_i\to Q)$, 所以由上式得

$$\vdash(\bigvee_{i=1}^{n} (A_i^* \wedge (A_i \to B)) \to C).$$

由此即得 $B^* < C$. 这就证明了 $B^*$ 的最小性.

**注 8.2.16** 在形式系统 $\mathscr{L}$ 中考虑由(8.1.4)式定义的运算$\otimes$. 设 $A$, $B \in F(S)$, 由(8.1.4)式得

$$A \otimes B = \neg(A \to \neg B) = A \wedge B. \tag{8.2.17}$$

现在分析一下 FMP 的三 I 解 $B^*$. 在(8.1.9)式中, $B^*(y)$ 的表达式对于每个$y \in Y$都是一样的. 如果略去这个 $y$ 不写, 并把$R_0(u, v)$写成 $u\to v$, 则有

$$B^* = \sup_{x\in X}\{A^*(x) \otimes (A(x) \to B)\}. \tag{8.2.18}$$

再考虑形式系统 $\mathscr{L}$ 中多重广义 MP 问题(8.2.2)的解(8.2.16)式. 设 $X = \{1, \cdots, n\}$, 并把 $A_i$ 与 $A_i^*$ 分别写成 $A(x)$与 $A^*(x)$的形式, 把$\bigvee_{i=1}^{n}$写成$\sup_{x\in X}$, 再由(8.2.17)式, 把$\wedge$改写为$\otimes$, 则(8.2.16)式可写为

$$B^* \sim \sup_{x\in X}\{A^*(x) \otimes (A(x) \to B)\}, \tag{8.2.19}$$

这与 FMP 的表达式(8.2.18)完全相同. 又如(8.2.17)式所示, 由于在 $\mathscr{L}$ 中$\otimes$与$\wedge$是一致的, (8.2.18)式自然也表示 FMP 的 CRI 解. 由此看出, 在经典二值逻辑系统中多重广义 MP 问题的求解机制和 Fuzzy 推理中 MP 问题的三 I 解以及 CRI 解的求解机制完全相同. 这表明, 在经典二值逻辑系统中本来就存在着与 FMP 相对应的理论, 只不过以前没有被注意而已, 正是由于受到 FMP 问题的启示, 我们才发现了它的存在. 在下面我们还要进一步从语构上在多值系统 $\mathscr{L}^*$ 中给出 FMP 的非 Fuzzy 形式, 最后再从语义上于 $\mathscr{L}$ 中以及于 Łukasiewicz 三值系统 $L_3$ 中给出 FMP 的非 Fuzzy 形式.

## 8.3　多值逻辑系统 $\mathscr{L}^*$ 中的广义与多重广义 MP 规则的语构理论

现在回到我们在第 3 章中建立的多值逻辑系统 $\mathscr{L}^*$ 中. 注意，在 $\mathscr{L}^*$ 中演绎定理不成立. 这时，$F(S)$ 是由 $S=\{p_1, p_2, \cdots\}$ 生成的 $(\neg, \vee, \rightarrow)$ 型自由代数，逻辑连接词 $\neg$，$\vee$ 与 $\rightarrow$ 是相互独立的. 在 $F(S)$ 中仍引入预序 $<$. 这里 $A<B$ 指 $\vdash(A\rightarrow B)$. 在 $\mathscr{L}$ 中我们引入了根的概念，并证明了凡 $F(S)$ 的有限子集都有根. 这一理论在 $\mathscr{L}^*$ 中不再适用. 我们有下面的注.

**注 8.3.1**　在 $\mathscr{L}^*$ 中，设 $\Gamma=\{A, B\}$，则 $A\wedge B$ 不必是 $D(\Gamma)$ 的最小元.

事实上，在 $\mathscr{L}^*$ 中容易证明 $A\rightarrow(B\rightarrow A\wedge B)$ 是定理，由此可证 $A\wedge B\in D(\Gamma)$. 又 $(A\rightarrow\neg B)\rightarrow(A\rightarrow\neg B)$ 显然是定理. 由此出发分别使用可证等价定理 3.2.22 的 ix) 与 x) 依次得出

$$\vdash(A\rightarrow((A\rightarrow\neg B)\rightarrow\neg B))$$

与

$$\vdash(A\rightarrow(B\rightarrow\neg(A\rightarrow\neg B))). \tag{8.3.1}$$

由这最后一式便知 $\neg(A\rightarrow\neg B)\in D(\Gamma)$. 当有赋值 $v$ 使 $v(A)=v(B)=\frac{1}{2}$ 时(比如，当 $A$，$B$ 分别为原子公式 $p$ 与 $q$ 时这就是可能的)有 $v(A\wedge B)=\frac{1}{2}$，但 $v(\neg(A\rightarrow\neg B))=0$. 可见，$A\wedge B<\neg(A\rightarrow\neg B)$ 是不成立的，即 $A\wedge B$ 不是 $D(\Gamma)$ 中的最小元.

由注 8.3.1 知 $\mathscr{L}$ 中的定理 8.2.8 在 $\mathscr{L}^*$ 中不再成立. 在 8.2 节中给出的广义以及多重广义 MP 问题的 CRI 解理论在 $\mathscr{L}^*$ 中不再适用. 但那里关于广义与多重广义 MP 问题的三 I 解理论完全可以推广到系统 $\mathscr{L}^*$ 中来.

在 $\mathscr{L}$ 中成立的 (8.2.17) 式在 $\mathscr{L}^*$ 中也不再成立，即 $A\otimes B$ 与 $A\wedge B$ 不必是可证等价的.

**定理 8.3.2**　设 $A, B\in F(S)$，则 $(F(S), <)$ 中存在最小的公式 $C$ 满足条件

$$\vdash(A\rightarrow(B\rightarrow C)) \tag{8.3.2}$$

且

$$C\sim A\otimes B=\neg(A\rightarrow\neg B). \tag{8.3.3}$$

**证**　由 (8.3.1) 式立即看出由 (8.3.3) 式给出的 $C$ 满足 (8.3.2) 式，以下证明其最小性. 由可证等价定理 3.2.22 得

$$(A\otimes B\to A)=(\neg(A\to\neg B)\to A)\sim(\neg A\to(A\to\neg B))$$
$$\sim(A\to(\neg A\to\neg B))\sim(A\to(B\to A)).$$

上面最后一式为($L^*1$)，所以

$$\vdash(A\otimes B\to A).\tag{8.3.4}$$

同理可证

$$\vdash(A\otimes B\to B).\tag{8.3.5}$$

由(8.3.2)式，(8.3.4)式和(8.3.5)式出发运用 HS 即得 $\vdash(A\otimes B)\to C)$，即 $A\otimes B<C$. 这就证明了$A\otimes B$的最小性.

**定义 8.3.3**　设 $A, A^*, B\in F(S)$. 在 $\mathscr{L}^*$ 中，广义 MP 问题(8.2.1)式的三 I 解 $B^*$是$(F(S), <)$中使下式成立的最小 $B^*$：

$$\vdash((A\to B)\to(A^*\to B^*)).$$

由定理 8.3.2 与定义 8.3.3 立即得出.

**定理 8.3.4**　设 $A, A^*, B\in F(S)$，在 $\mathscr{L}^*$ 中，广义 MP 问题(8.2.1)的三 I 解 $B^*$存在，且

$$B^*\sim A^*\otimes(A\to B).\tag{8.3.6}$$

**定义 8.3.5**　设 $A_i, A_i^*, B\in F(S)(i=1, \cdots, n)$. 在 $\mathscr{L}^*$ 中，多重广义 MP 问题(8.2.2)的三 I 解 $B^*$是$(F(S), <)$中使下式成立的最小 $B^*$：

$$\vdash((A_i\to B)\to(A_i^*\to B^*))\quad(i=1, \cdots, n).\tag{8.3.7}$$

**定理 8.3.6**　设 $A_i, A_i^*, B\in F(S)(i=1, \cdots, n)$. 在 $\mathscr{L}^*$ 中，多重广义 MP 问题(8.2.2)的三 I 解 $B^*$存在，且

$$B^*\sim\bigvee_{i=1}^{n}(A_i^*\otimes(A_i\to B))$$
$$=\sup_{x\in X}\{A^*(x)\otimes(A(x)\to B)\}.\tag{8.3.8}$$

这里 $X=\{1, \cdots, n\}$且 $A^*(x)=A_x^*$, $A(x)=A_x$.

**证**　设 $B^*$如(8.3.8)式所示，则由定理 8.3.2 以及 $A_i^*\otimes(A_i\to B)<B^*(i=1, \cdots, n)$知 $B^*$满足(8.3.7)式. 以下证明其最小性. 设 $C\in F(S)$，且

$$\vdash((A_i\to B)\to(A_i^*\to C))\quad(i=1, \cdots, n).\tag{8.3.9}$$

不难证明

$$(P\to(Q\to R))\sim(Q\to(P\to R))\sim(P\otimes Q\to R).$$

所以由(8.3.9)式得

$$\vdash(A_i^*\otimes(A_i\to B)\to C)\quad(i=1, \cdots, n).$$

由此即得

$$\vdash\bigwedge_{i=1}^{n}(A_i^*\otimes(A_i\to B)\to C)$$

和

$$\vdash\left(\bigvee_{i=1}^{n}\left(A_i^* \otimes (A_i \to B)\right) \to C\right). \tag{8.3.10}$$

由(8.3.10)式得 $\vdash(B^* \to C)$，从而 $B^* < C$.

## 8.4 二值逻辑系统 $\mathscr{L}$ 中广义 MP 规则的语义理论

从语义的角度在 $\mathscr{L}$ 中寻求 Fuzzy 推理的非 Fuzzy 形式要更为直接与自然. 回忆 Fuzzy 推理的三 I 解的原始定义. 设 $A$, $A^*$ 与 $B$ 分别是 $X$ 与 $Y$ 上的 Fuzzy 集，那么 FMP (8.1.1)式的三 I 解 $B^*$ 是 $Y$ 上满足(8.4.1)式的最小 Fuzzy 集:

$$(A(x) \to B(y)) \to (A^*(x) \to B^*(y)) = 1, \quad x \in X;\ y \in Y. \tag{8.4.1}$$

设 $\Omega$ 是全体赋值 $v: F(S) \to \{0, 1\}$ 之集. 这里 $F(S)$ 是由 $S = \{p_1, p_2, \cdots\}$ 生成的 $(\neg, \to)$ 型自由代数，$\Delta$ 是 $\Omega$ 的非空子集. 设 $v \in \Delta$ 已取定，则 $v$ 是 $F(S)$ 上的二值函数，它作用于变元公式 $A$ 上的值过去总写成 $v(A)$. 但换一个观点，设 $A \in F(S)$ 已取定，则 $A$ 可以看成 $\Delta$ 上的二值函数，它作用于 $v$ 时的值自然应写成 $A(v)$，因为这时赋值 $v$ 反而成了变元. 本节中我们就把一个公式 $A$ 看成一个函数 $A: \Delta \to \{0, 1\}$，即 $A$ 自然导出的那个函数. 同样，把公式 $B$ 看成函数 $B: \Sigma \to \{0, 1\}$，等等.

**定义 8.4.1** 设 $A$, $A^*$, $B \in F(S)$, $\Delta$, $\Sigma$ 是 $\Omega$ 的非空子集. 在 $\mathscr{L}$ 中，广义 MP 问题(8.2.1)的**$(\Delta, \Sigma)$型三 I 解** $B^*$ 是 $F(S)$ 中满足以下条件的公式:

i) $\forall v \in \Delta$, $\forall u \in \Sigma$,

$$(A(v) \to B(u)) \to (A^*(v) \to B^*(u)) = 1. \tag{8.4.2}$$

ii) 如果有公式 $C \in F(S)$ 满足 $\forall v \in \Delta$, $\forall u \in \Sigma$,

$$(A(v) \to B(u)) \to (A^*(v) \to C(u)) = 1,$$

则

$$\forall u \in \Sigma, \quad B^*(u) \leqslant C(u). \tag{8.4.3}$$

以上蕴涵算子→为算子 $R_0$.

**注 8.4.2** i) 将(8.4.2)式与(8.4.1)式相比较可看出，在经典二值逻辑系统 $\mathscr{L}$ 中完全可以考虑与 FMP 同样的问题，只不过论域已由原来是任意的集合 $X$ 与 $Y$ 改变为 $\Omega$ 的非空子集 $\Delta$ 与 $\Sigma$ 了. 由于 $\Omega$ 的势为 $c$，这自然是一种限制.

ii) 原来在求 FMP 的三 I 解时，只需给出其计算公式(8.1.9)即可，这时无论算出的 $B^*(y)$ 的值如何，都确定 $Y$ 上的一个函数 $B^*: Y \to [0, 1]$，也就得出 $Y$ 上的一个 Fuzzy 集. 但现在的情形要复杂许多，因为对于 $\Sigma$ 上的任意函数 $B: \Sigma \to \{0, 1\}$，我们并不知道这个 $B$ 是否能由 $F(S)$ 中的一个公式所自然导出. 因为 $\Sigma$ 上的二值函数可多至 $2^c$ 个而 $F(S)$ 中的全部公式才不过可数多个.

iii) 在上述$(\Delta, \Sigma)$型三 I 解的条件中有两条，这是因为当这些条件满足时并不能肯定 $B^*$ 就比 $C$ 小. 因为从(8.4.3)式看出，$B^*$ 只是对于 $\Sigma$ 中的一部分赋值而

言比 $C$ 小，这不能保证 $B^*\to C$ 是重言式，更不能保证 $B^*\to C$ 是定理. 所以这里不再使用 $F(S)$ 上由语构意义下给出的预序 $<$.

**定理 8.4.3** 设 $A$, $A^*$, $B\in F(S)$, $\Delta$, $\Sigma$ 是 $\Omega$ 的非空子集，且 $\Sigma$ 有限，则在 $\mathscr{S}$ 中广义 MP 问题(8.2.1)的 $(\Delta, \Sigma)$ 型三 I 解存在. 设 $B^*$ 是这样一个解，则

$$B^*(u) = \sup_{v\in\Delta}\{A^*(v)\otimes(A(v)\to B(u))\},\quad u\in\Sigma. \tag{8.4.4}$$

为证此定理，我们需要两个引理.

**引理 8.4.4** 设 $\Sigma=\{u_1, \cdots, u_n\}\subset\Omega$, $(a_1, \cdots, a_n)$ 是一个 0 - 1 序列，则 $F(S)$ 中存在公式 $A$ 满足条件

$$u_i(A) = a_i\quad (i=1, \cdots, n). \tag{8.4.5}$$

**证** 我们用归纳法证明. 设 $n=1$. 令 $U_1=\{p\in S\mid u_1(p)=0\}$. 若 $U_1$ 非空，任取 $p\in U_1$，分别视 $a_1=0$ 或 $a_1=1$ 而令 $A$ 为 $p$ 或 $\neg p$，则 $u_1(A)=a_1$ 成立. 若 $U_1$ 为空集，任取 $p\in S$，分别视 $a_1=0$ 或 $a_1=1$ 而令 $A$ 为 $\neg p$ 或 $p$，则 $u_1(A)=a_1$ 仍成立.

设引理 1 对 $n=k$ 成立，以下只需证引理 1 当 $n=k+1$ 时也成立. 设 $n=k+1$，即 $\Sigma=\{u_1, \cdots, u_{k+1}\}$. 令

$$U_i=\{p\in S\mid u_i(p)=0\}\quad (i=1, \cdots, k+1). \tag{8.4.6}$$

因为 $u_1, \cdots, u_{k+1}$ 是仅取 0 与 1 两个值的不同的函数，所以 $U_1, \cdots, U_{k+1}$ 互不相等. 注意，这 $k+1$ 个集中必有一个集 $U^*$ 不包含任何其他集，因为反之则将得出互不相等且层层包含的无穷集合序列这一矛盾. 设 $U^*$ 就是 $U_1, \cdots, U_{k+1}$ 中不包含任何其他集的一个集，不失一般性，不妨设 $U^*=U_{k+1}$，设 $(a_1, \cdots, a_{k+1})$ 是给定的 0 - 1 序列，由归纳假设知存在公式 $A\in F(S)$ 满足关系

$$u_i(A) = a_i\quad (i=1, \cdots, k). \tag{8.4.7}$$

因为 $U_i-U^*\neq\varnothing(i=1, \cdots, k)$，故存在 $p_1, \cdots, p_k$ 满足

$$p_i\in S\cap(U_i-U^*)\quad (i=1, \cdots, k). \tag{8.4.8}$$

若 $a_{k+1}=1$，定义 $B$ 为 $A\vee(p_1\wedge\cdots\wedge p_k)$. 这时由(8.4.8)式与(8.4.6)式知 $u_i(p_1\wedge\cdots\wedge p_k)=0$，从而有

$$\begin{aligned} u_i(B) &= u_i(A)\vee u_i(p_1\wedge\cdots\wedge p_k)\\ &= u_i(A)\quad (i=1, \cdots, k). \end{aligned} \tag{8.4.9}$$

又由 $p_i\notin U^*=U_{k+1}$ 与(8.4.6)式知 $u_{k+1}(p_i)=1(i=1, \cdots, k)$. 所以

$$\begin{aligned} u_{k+1}(B) &= u_{k+1}(A)\vee u_{k+1}(p_1\wedge\cdots\wedge p_k)\\ &= u_{k+1}(A)\vee\min(u_{k+1}(p_1), \cdots, u_{k+1}(p_k))\\ &= u_{k+1}(A)\vee 1 = 1 = a_{k+1}. \end{aligned} \tag{8.4.10}$$

由(8.4.9)式与(8.4.10)式得

$$u_i(B) = a_i\quad (i=1, \cdots, k+1). \tag{8.4.11}$$

若 $a_{k+1}=0$，定义 $B$ 为 $A\wedge(\neg p_1\vee\cdots\vee\neg p_k)$. 这时由(8.4.8)式与(8.4.6)式知 $u_i(\neg p_1\vee\cdots\vee\neg p_k)=1$，从而有

$$u_i(B)=u_i(A)\wedge u_i(\neg p_1\vee\cdots\vee\neg p_k)$$
$$=u_i(A)\wedge 1=u_i(A)\quad(i=1,\cdots,k).\qquad(8.4.12)$$

又由 $p_i\notin U_{k+1}$ 和(8.4.6)知 $u_{k+1}(\neg p_i)=0(i=1,\cdots,k)$. 所以

$$u_{k+1}(B)=u_{k+1}(A)\wedge\max(u_{k+1}(\neg p_1),\cdots,u_{k+1}(\neg p_k))$$
$$=u_{k+1}(A)\wedge 0=0=a_{k+1}.\qquad(8.4.13)$$

由(8.4.12)式与(8.4.13)式仍得出(8.4.11)式，即引理1对 $n=k+1$ 成立. 这就证明了引理8.4.4.

**引理8.4.5**　设 $a, a^*, b, c\in[0,1]$，$\to$是 $R_0$ 算子，则

i) $(a\to b)\to(a^*\to a^*\otimes(a\to b))=1.$　　(8.4.14)

ii) 如果 $(a\to b)\to(a^*\to c)=1$，则

$$a^*\otimes(a\to b)\leqslant c.\qquad(8.4.15)$$

**证**　i) 如果

$$a^*+(a\to b)\leqslant 1,\qquad(8.4.16)$$

则由命题8.1.3知 $a^*\otimes(a\to b)=0$，从而由(8.4.16)式得

$$(a^*\to a^*\otimes(a\to b))=a^*\to 0=1-a^*\geqslant(a\to b),$$

故(8.4.14)式成立. 如果 $a^*+(a\to b)>1$，则由命题8.1.3知 $a^*\otimes(a\to b)=a^*\wedge(a\to b)$. 对于任意的 $x, y, z\in[0,1]$，易证

$$x\to y\wedge z=(x\to y)\wedge(x\to z),\quad x\to(y\to x)=1.$$

所以

$$\begin{aligned}&(a\to b)\to(a^*\to a^*\otimes(a\to b))\\=&(a\to b)\to(a^*\to a^*\wedge(a\to b))\\=&((a\to b)\to(a^*\to a^*))\\&\wedge((a\to b)\to(a^*\to(a\to b)))\\=&((a\to b)\to 1)\wedge 1=1.\end{aligned}$$

故(8.4.14)式仍成立. 这就证明了 i).

ii) 设 $(a\to b)\to(a^*\to c)=1$，则 $(a\to b)\leqslant(a^*\to c)$. 这时由命题8.1.2即得

$$a^*\otimes(a\to b)=(a\to b)\otimes a^*\leqslant c.$$

这就证明了 ii).

**定理8.4.3的证明**　先假设 $F(S)$ 中的确存在一个公式 $B^*$ 满足(8.4.4)式，则

$$B^*(u)\geqslant A^*(v)\otimes(A(v)\to B(u)),\quad v\in\Delta;\ u\in\Sigma,$$

从而由引理8.4.5知(8.4.2)式成立，即 $B^*$ 满足三I解的条件 i). 其次设 $C$ 满足

$$(A(v)\to B(u))\to(A^*(v)\to C(u))=1,\quad v\in\Delta;\ u\in\Sigma,$$

则由引理 8.4.5 知 $\forall v\in\Delta$

$$A^*(v)\otimes(A(v)\to B(u))\leqslant C(u).$$

从而由(8.4.4)式便知(8.4.3)式成立，即 $B^*$ 还满足三 I 解的条件 ii). 所以如果有公式 $B^*$ 满足(8.4.4)式，它就是所求的广义 MP 问题的($\Delta$, $\Sigma$)型三 I 解. 以下只需证明 $F(S)$ 中确有公式 $B^*$ 满足(8.4.4)式. 事实上，设 $\Sigma=\{u_1,\cdots,u_n\}$，令

$$a_i=\sup_{v\in\Delta}\{A^*(v)\otimes(A(v)\to B(u_i))\}\quad(i=1,\cdots,n),$$

则 $a_i\in\{0,1\}(i=1,\cdots,n)$,.从而 $a_1,\cdots,a_n$ 是一个 0－1 序列. 由引理 1，$F(S)$ 中有公式 $B^*$ 满足

$$u_i(B^*)=a_i\qquad(i=1,\cdots,n).\tag{8.4.17}$$

而(8.4.17)式正是(8.4.4)式.

## 8.5 Łukasiewicz 三值系统 $L_3$ 中广义 MP 规则的语义理论

首先注意，对于三值系统而言，Łukasiewicz 的蕴涵算子 $R_{\text{Łu}}$ 与 $R_0$ 相同. 其次，分析一下定理 8.4.3 的证明就会发现，这个定理是否成立取决于引理 8.4.4 与引理 8.4.5 是否仍然有效. 引理 8.4.5 显然对 $R_{\text{Łu}}$ 仍成立，因为如果限定那里的 $a$, $a^*$, $b$ 和 $c$ 仅取三值，0，$\frac{1}{2}$，1 的话，$R_{\text{Łu}}$ 等同于 $R_0$，所以定理 8.4.3 是否对 Łukasiewicz 三值系统仍成立就取决于引理 8.4.4 是否可以推广到三值系统中去. 但这一问题要稍稍复杂一些. 事实上，考虑下面的问题.

**问题 8.5.1** 设 $\Omega$ 是全体赋值 $v:F(S)\to L_3$ 之集. 这里 $L_3=\left\{0,\frac{1}{2},1\right\}$ 是 Łukasiewicz 三值系统，设 $\Sigma=\{u_1,\cdots,u_n\}\subset\Omega$，$(a_1,\cdots,a_n)$ 是取值于 $L_3$ 的序列. 问 $F(S)$ 中是否有公式 A 满足

$$u_i(A)=a_i\quad(i=1,\cdots,n).\tag{8.5.1}$$

(8.5.1)式与(8.4.5)式虽完全一样，但此处的 $a_i$ 是可以取 0 与 1 之外的 $\frac{1}{2}$ 这个值的.

**定义 8.5.2** 上述问题称为**赋值决定公式问题**，简称为 VDF 问题(valuationally decided formula question).

**注 8.5.3** VDF 问题在 $L_3$ 中一般不可解. 事实上，设 $\Sigma=\{u_1\}$，这里 $u_1$ 在每个原子公式 $p$ 处的值都为 0 或 1. 再设 $a_1=\frac{1}{2}$，则(8.5.1)式无法成立(这时 $n=1$)，因为 $\forall A\in F(S)$，$u_1(A)\in\{0,1\}$.

**定义 8.5.4**　$L_3$ 中的 VDF 问题叫做**合理的**，如果当 $a_i=\frac{1}{2}$ 时 $\frac{1}{2}\in u_i(S)$ 成立.

**引理 8.5.5**　$L_3$ 中的 VDF 问题是可解的当且仅当它是合理的.

**证**　只需证充分性. 设合理性条件已经成立. 令

$$U_i = \left\{ p \in S \mid u_i(p) = \frac{1}{2} \right\} \quad (i = 1, \cdots, n). \tag{8.5.2}$$

用归纳法证明 VDF 问题可解. 设 $n=1$. 若 $a_1=\frac{1}{2}$，则由合理性知有 $p_0\in S$ 使 $u_1(p_0)=\frac{1}{2}$，故令 $A$ 为 $p_0$ 即可. 若 $a_1=1$ 或 $a_1=0$，则任取 $p\in S$ 且相应地令 $A$ 为 $p\to p$ 或 $\neg(p\to p)$ 即可. 设 $n=k$ 时合理 VDF 问题的可解性已证明，令 $n=k+1$，$\Sigma=\{u_1, \cdots, u_{k+1}\}\subset\Omega$，$(a_1, \cdots, a_{k+1})$ 是 $L_3$ 中的序列. 考虑集族 $\mathscr{U}=\{U_1, \cdots, U_{k+1}\}$. 如果 $\mathscr{U}$ 中的集全是空集，则由引理 8.4.4 即得引理 8.5.5 中可解性的证明. 所以可设 $\mathscr{U}$ 中含有非空集. 在 $\mathscr{U}$ 中选一极大集，即不真包含于任何其他集的集，设为 $U_{i_1}$，这时 $\mathscr{U}$ 中可能包含与 $U_{i_1}$ 相等的集，设其全体为 $U_{i_1}, \cdots, U_{i_m}$，则

$$U_{i_1} = \cdots = U_{i_m} \neq \varnothing \quad 且 \quad U_{i_l} - U_j \neq \varnothing$$
$$(l = 1, \cdots, m; \quad j \notin \{i_1, \cdots, i_m\}).$$

为简便计且不失一般性可设 $i_l=l(l=1, \cdots, m)$，即 $U_1, \cdots, U_m$ 是 $\mathscr{U}$ 中一组满足下述条件的集：

$$U_1 = \cdots = U_m \neq \varnothing \quad 且 \quad U_i - U_j \neq \varnothing$$
$$(i = 1, \cdots, m; m < j \leqslant k+1). \tag{8.5.3}$$

令

$$W_i = \{p \in S \mid u_i(p) = 0\} \quad (i = 1, \cdots, m), \tag{8.5.4}$$

则 $\mathscr{W}=\{W_1, \cdots, W_m\}$ 中的集两两不相等，这是因为 $u_1, \cdots, u_m$ 是两两不同的赋值且已经有 $U_1=\cdots=U_m$ 成立. 所以，当 $m\geqslant 2$ 时，$\mathscr{W}$ 中至少含有一个非空集. 以下证明 $F(S)$ 中存在公式 $D$ 满足条件

$$u_i(D) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & i = 1, \\ 0, & i = 2, \cdots, k+1. \end{cases} \tag{8.5.5}$$

事实上，若 $m=1$，令

$$D = \wedge \{p \wedge \neg p \mid p \in U_1\},$$

则 $u_1(D)=\frac{1}{2}$，因为 $\forall p\in U_1$，$u_1(p)=\frac{1}{2}$. 又由(8.5.3)式知 $\forall j>m=1$ 有 $p_j\in U_1-U_j$，所以 $u_j(p_j)=1$ 或 $u_j(p_j)=0$，从而

$$u_j(D) \leqslant u_j(p_j \wedge \neg p_j) = 0 \quad (j = 2, \cdots, k+1).$$

所以(8.5.5)式成立. 以下设 $m\geqslant 2$. 在 $\mathscr{W}$ 中选取一个极小集，比如是 $W_1$，则 $W_1$

不会真包含任何其他集. 注意, $\mathscr{W}$中的集两两不等便得

$$W_i - W_1 \neq \varnothing \quad (i = 2, \cdots, m).$$

选取原子公式 $q_i$ 使

$$q_i \in S \cap (W_i - W_1) \quad (i = 2, \cdots, m),$$

则

$$u_i(q_i) = 0 \quad (i = 2, \cdots, m).$$

由 $U_1 = \cdots = U_m$ 及 $W_i$ 与 $U_j$ 的意义知

$$W_i \cap U_j = \varnothing \quad (i, j = 1, \cdots, m).$$

所以由 $q_i \in W_i$ 知 $q_i \notin U_1$, 又 $q_i \notin W_1$, 所以

$$u_1(q_i) = 1 \quad (i = 2, \cdots, m). \tag{8.5.6}$$

令

$$B \doteq \wedge \{p \wedge \neg p \mid p \in U_1\},$$

$$C = q_2 \wedge \cdots \wedge q_m,$$

$$D = \neg(C \to B) \wedge B, \tag{8.5.7}$$

则由(8.5.6)式知 $u_1(C) = 1$, 从而由 $u_1(B) = \frac{1}{2}$得 $u_1(D) = \frac{1}{2}$. 再设 $i$ 满足 $2 \leqslant i \leqslant m$,则由 $q_i \in W_i$ 知 $u_i(q_i) = 0$, 从而由(8.5.7)式得 $u_i(C) = 0$ 和 $u_i(D) = 0$. 最后设 $j$ 满足$m < j \leqslant k + 1$. 由(8.5.3)式, 可取 $p_j \in U_1 - U_j$, 这时 $u_j(p_j) \neq \frac{1}{2}$, 所以有

$$u_j(D) \leqslant u_j(B) \leqslant u_j(p_j \wedge \neg p_j) = 0,$$

从而 $u_j(D) = 0$. 这就证明了(8.5.5)式.

由归纳假设知 $F(S)$中有公式 $A^*$ 满足

$$u_i(A^*) = a_i \quad (i = 2, \cdots, k + 1). \tag{8.5.8}$$

设 $L_3$ 中一个新的值 $a_1$ 已给定, 以下证明 $F(S)$中有公式 $A$ 满足 $n = k + 1$ 时的(8.5.1)式.

i)设 $a_1 = 1$, 定义 $A$ 如下:

$$A = A^* \vee (\neg D \to D).$$

由(8.5.8)式和(8.5.5)式得

$$\begin{aligned} u_i(A) &= u_i(A^*) \vee u_i(\neg D \to D) \\ &= a_i \vee (u_i(\neg D) \to u_i(D)) \end{aligned}$$

$$= a_i \vee (1 \to 0) = a_i \quad (i = 2, \cdots, k + 1).$$

又由(8.5.5)式得

$$u_1(A) = u_1(A^*) \vee (u_1(\neg D) \to u_1(D))$$

$$= u_1(A^*) \vee (\frac{1}{2} \to \frac{1}{2}) = 1 = a_1.$$

所以 $A$ 满足 $n = k + 1$ 时的(8.5.1)式.

ii)设 $a_1 = 0$, 定义 $A$ 如下:

$$A = A^* \wedge (\neg(\neg D \to D)).$$

这时类似于 i)可证 $A$ 满足 $n = k + 1$ 时的(8.5.1)式.

iii)设 $a_1 = \frac{1}{2}$. 定义 $A$ 如下:

1°　当 $u_1(A^*) \geqslant \frac{1}{2}$ 时, 令

$$A = A^* \wedge \neg D,$$

则由(8.5.8)式和(8.5.5)式得

$$u_i(A) = u_i(A^*) \wedge u_i(\neg D) = a_i \wedge 1 = a_i \quad (i = 2, \cdots, k + 1),$$

且

$$u_1(A) = u_1(A^*) \wedge u_1(\neg D) = u_1(A^*) \wedge \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = a_1.$$

2°　当 $u_1(A^*) = 0$ 时, 令

$$A = A^* \vee D,$$

则由(8.5.8)式与(8.5.5)式得

$$u_i(A) = u_i(A^*) \vee u_i(D) = a_i \vee 0 = a_i \quad (i = 2, \cdots, k + 1),$$

且

$$u_1(A) = u_1(A^*) \vee u_1(D) = 0 \vee \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = a_1.$$

总之, 当 $a_1 = \frac{1}{2}$ 时仍有 $A$ 满足 $n = k + 1$ 时的(8.5.1)式.

至此引理 8.5.5 已证毕. 由引理 8.5.5 与引理 8.4.5 即可像证明定理8.4.3一样证明下面的定理.

**定理 8.5.6**　设 $A, A^*, B \in F(S)$, $\Delta$, $\Sigma$ 是 $\Omega$ 的非空子集, $\Sigma$ 有限, 且相应的 VDF 问题是合理的, 则在 Łukasiewicz 三值系统 $L_3$ 中广义 MP 问题(8.2.1)的($\Delta$, $\Sigma$)型三 I 解存在. 设 $B^*$ 是这样一个解, 则

$$B^*(u) = \sup_{v \in \Delta} \{A^*(v) \otimes (A(v) \to B(u))\}, \quad u \in \Sigma.$$

我们看到，广义 MP 问题的语义解理论与 Fuzzy 推理高度相似，只是其中对 $\Sigma$ 提出了有限性的要求，8.4 节和 8.5 节只是在经典的二值系统和 Łukasiewicz 三值系统中讨论了广义 MP 问题. 可见，沿此方向尚有大量的工作可做. 我们提出以下问题供读者考虑.

**问题 8.5.7** i) 如何在 4 值、$n$ 值乃至连续值系统中建立 VDF 问题的求解理论?

ii) 如何将 $(\Delta, \Sigma)$ 型三 I 解理论一般化? 关于 $\Sigma$ 有限性的要求可否删除?

# 第 9 章　模态逻辑、知识推理与描述逻辑

模态逻辑、知识推理与描述逻辑是在人工智能研究领域中颇受人们关注的理论. 这些理论超出了经典的数理逻辑理论的范围，自然可以纳入非经典数理逻辑的范畴中. 由于这些理论的主体部分只涉及命题逻辑的基本知识，所以只要读者熟悉了本书第 1 章的内容和经历过命题逻辑推理的基本训练就可以顺利地阅读本章内容. 由于篇幅所限，我们只能介绍以上三部分理论的初步知识，希望继续深入学习的读者可参见相关的文献.

## 9.1　模 态 逻 辑

### 9.1.1　什么是模态逻辑?

2001 年，由剑桥大学出版社出版的《Modal Logic》是系统讲述模态逻辑的一部内容丰富的好书(见文献[77])，该书的作者们在序言中的第一句话就是“Ask three modal logicians what modal logic is, and you are likely to get at least three different answers”(试问三位模态逻辑学家什么是模态逻辑，你将很可能得到至少三种不同的答案). 可见，究竟什么是模态逻辑是不容易定义的. 但文献[77]指出模态逻辑(主要指模态语言)有三个方面的特点:第一，模态语言是可以表述关系结构的简单语言;第二，模态语言是从内在的局部观点来表述关系结构的;第三，模态语言与其他形式系统有多方面的联系. 随着下文的学习，读者是可以逐渐看到这三个特点的. 其实，我们在注 2.3.3 中已经见过带有模态词□和◇的命题了，$\Box p$ 表示 $p$ 必然发生，$\Diamond p$ 表示 $p$ 可能发生. 可见，模态逻辑中考虑的对象是带有某种修饰词的命题，我们把这种修饰词称为模态词. 上面的□与◇都是模态词，它们都是一元模态词，一般还可以考虑二元、三元乃至 $n$ 元模态词. 所以从语构的观点来看，模态逻辑是不难定义的，即它只不过是在经典命题逻辑中的逻辑连接词$\neg$与$\to$之外又添加了一些模态连接词的逻辑系统而已. 添加不同的模态词或假定不同的公理集与推理规则集就得出不同的模态逻辑系统. 比较复杂的是模态逻辑的语义理论. 与经典命题逻辑的语义理论作比较就可以看出这种复杂性. 仍用 $F(S)$ 表示全体经典命题逻辑公式之集. 设 $\varphi \in F(S)$，则 $\Vdash \varphi$ 表示 $\varphi$ 是重言式，即对每个赋值 $v: F(S) \to \{0, 1\}$ 都有 $v(\varphi) = 1$. 但对模态逻辑公式而言，即使是带有一元模态词的原子公式$\Diamond p$，$\Vdash \Diamond p$ 的定义也很复杂. 首先，需要一个非空的可能情况

(state)之集 $W$($W$ 的元素也常被称为可能世界、点、时间或节点等),与一元模态词$\Diamond$相对应,$W$ 上有一个二元关系 $R$. 其次,为定义 $\Vdash\Diamond p$ 要先考虑局部情况,任取 $w\in W$,要先定义 $w\Vdash\Diamond p$. 以 $\Phi$ 表示有关的原子公式之集(在模态逻辑中通常不要求 $\Phi=S$,即可以只考虑一部分原子公式),所谓 $\Phi$ 的赋值是一个映射 $v$: $\Phi\to\mathscr{P}(W)$,即 $v$ 把 $\Phi$ 中的每个原子命题映射为 $W$ 的一个子集合. 这时定义 $w\Vdash p$ 为 $w\in v(p)$,而定义 $w\Vdash\Diamond p$ 为 $\exists u\in W$ 使得 $R(w,u)$ 且 $u\Vdash p$. 通俗地说,情况 $w$ 满足$\Diamond p$ 指 $w$ 有个"$R$-亲戚"$u$,$u$ 满足 $p$. 最后,对于全局(global)情形,$\Vdash\Diamond p$ 指$\forall w\in W$,均有 $w\Vdash\Diamond p$ 成立. 通过这个简单的例子我们已经看到了前面所讲的模态逻辑的前两个特征了,即具有关系结构和局部性特点.

### 9.1.2 模态语言

任何形式语言都由一些符号、连接词以及通过适当的方法用连接词将符号连接而得的公式所组成,模态语言也不例外.

**定义 9.1.1** 设 $\tau=(\boldsymbol{D},\rho)$,这里 $\boldsymbol{D}$ 是非空集,$\rho:\boldsymbol{D}\to\boldsymbol{N}$ 是映射. $\forall\Delta\in\boldsymbol{D}$,称 $\Delta$ 为**模态词**,或**模态算子**,称 $\rho(\Delta)$为 $\Delta$ 的**元数**,称 $\tau$ 为一个**模态类型**.

**定义 9.1.2** 设 $\tau=(\boldsymbol{D},\rho)$是一个模态类型,$\Phi$ 是若干原子命题之集,$\tau$ **型模态公式**的构成如下:

$$\varphi := p\,|\,\bot\,|\,\neg\varphi\,|\,\varphi_1\vee\varphi_2\,|\,\Delta(\varphi_1,\cdots,\varphi_{\rho(\Delta)}),\quad p\in\Phi. \tag{9.1.1}$$

(9.1.1)式的意义是

i) $\forall p\in\Phi$,$p$ 是 $\tau$ 型模态公式,$\bot$ 也是 $\tau$ 型模态公式,$\bot$ 表示矛盾式.

ii)若 $\varphi$,$\varphi_1$,$\varphi_2$ 是 $\tau$ 型模态公式,则$\neg\varphi$,$\varphi_1\vee\varphi_2$ 也是 $\tau$ 型模态公式.

iii)设$\rho(\Delta)=n$, 若 $\varphi_1,\cdots,\varphi_n$ 都是 $\tau$ 型模态公式,则 $\Delta(\varphi_1,\cdots,\varphi_n)$也是 $\tau$ 型模态公式. 当 $\Phi$ 给定时,以下用 Form$(\tau,\Phi)$记全体 $\tau$ 型模态公式之集,相应的模态语言记为 ML$(\tau,\Phi)$.

以 $\varphi\wedge\psi$ 记$\neg(\neg\varphi\vee\neg\psi)$,以 $\varphi\to\psi$ 记$\neg\varphi\vee\psi$.

设 $\Delta$ 是 $n$ 元模态算子,令

$$\nabla(\varphi_1,\cdots,\varphi_n)=\neg\Delta(\neg\varphi_1,\cdots,\neg\varphi_n). \tag{9.1.2}$$

称模态算子 $\nabla$ 为"那不拉"(nabla),它是与 $\Delta$ 对偶的模态算子.

**定义 9.1.3** 设 $\tau$ 中只含有一个一元模态词,记为$\Diamond$,这时的模态语言称为**基本模态语言**,其模态公式的构成如下:

$$\varphi := p\,|\,\bot\,|\,\neg\varphi\,|\,\varphi_1\vee\varphi_2\,|\,\Diamond\varphi,\qquad p\in\Phi. \tag{9.1.3}$$

$\Diamond$的对偶算子记为$\Box$,即

$$\Box\varphi=\neg\Diamond\neg\varphi. \tag{9.1.4}$$

**定义 9.1.4** 设 $\tau$ 中含有两个一元模态词$\Diamond_F$ 和$\Diamond_P$,分别简记为 $F$ 与 $P$,这

时的模态语言称为**基本时态语言**，因为 $F\varphi$ 表示在将来的某个时候 $\varphi$ 为真，$P\varphi$ 表示在过去的某个时候 $\varphi$ 为真. 分别用 $G$ 和 $H$ 表示 $F$ 和 $P$ 的对偶算子，即

$$G\varphi = \neg F \neg \varphi, \quad H\varphi = \neg P \neg \varphi. \tag{9.1.5}$$

可见，$G\varphi$ 表示"并非在将来的某个时候 $\varphi$ 不真"，也就是从现在算起，在将来的任何时刻 $\varphi$ 都是真的. 如果以天为单位，那么 $G\varphi$ 表示从明天起(包括明天)，$\varphi$ 天天都真. 如果以小时为单位，那么 $G\varphi$ 表示从下个小时起 $\varphi$ 每个小时都真. 当然，时间的计算不必是离散的，也可以连续计算，就看你怎么约定了. 作为练习，请读者对 $H\varphi$ 作出解释.

以下我们只着重讨论基本模态逻辑理论，即在由(9.1.3)式确定的模态公式集 Form($\Diamond$, $\Phi$)的基础上展开的逻辑语义理论和逻辑语构理论，这里 $\Phi$ 是一组非空的原子公式集，其成员的多少随需要而定，以下不再申明. 关于一般的 $\tau$ 型模态逻辑理论参见文献[77].

### 9.1.3 基本模态逻辑的语义理论

**定义 9.1.5** 基本模态逻辑的**模型**是一个三元组

$$\boldsymbol{M} = (W, R, V). \tag{9.1.6}$$

这里 $W$ 是非空集，$R \subset W \times W$，$V$ 是映射 $V: \Phi \to \mathscr{P}(W)$，称 $V$ 为**赋值**.

**注 9.1.6** i)请读者注意这里的"模型"概念与经典命题逻辑中定义 1.2.23 的区别，那里的模型是针对一个给定的公式 $A$ 而言的，而这里的模型只是为展开模态逻辑的语义理论所搭起的一个整体框架，以后才讨论对一个给定的模态公式 $\varphi$ 而言模型 $\boldsymbol{M}$ 是否满足 $\varphi$ 的问题.

ii) $W$ 的元素叫可能世界，或可能情况，还可叫做点、节点、时间等，随具体的应用场合而定. 比如，在讨论时态逻辑时就把 $W$ 的元素 $w$ 叫时间，在讨论与图论相关的问题时就把 $W$ 的元素 $w$ 叫节点，等等. 为方便起见，以下我们常称 $W$ 中的元素为点. 下面要讲的语义理论是基于点而展开的，这反映了前面说过的那种局部性.

iii) $R$ 通常是 $W$ 上的一个非空二元关系，它是与基本模态词 $\Diamond$ 相配套的，它反映了前面说过的那种关系结构.

**定义 9.1.7** 设 $\boldsymbol{M} = (W, R, V)$ 是基本模态逻辑的模型，$w \in W$，$\varphi \in$ Form($\Diamond$, $\Phi$)，$\varphi$ **在模型 $\boldsymbol{M}$ 中的点** $w$ **处为真**，或 $w$ **满足** $\varphi$，记作 $\boldsymbol{M}, w \Vdash \varphi$，可归纳地定义如下：

i) $\boldsymbol{M}, w \Vdash p$ 当且仅当 $w \in V(p)$，$p \in \Phi$.

ii) $\boldsymbol{M}, w \Vdash \bot$ 永远不成立.

iii) $\boldsymbol{M}, w \Vdash \neg \varphi$ 当且仅当 $\boldsymbol{M}, w \Vdash \varphi$ 不成立.

iv) $\boldsymbol{M}, w \Vdash \varphi \vee \psi$ 当且仅当 $\boldsymbol{M}, w \Vdash \varphi$ 或 $\boldsymbol{M}, w \Vdash \psi$.

v) $M, w \Vdash \Diamond\varphi$ 当且仅当 存在 $u\in W$, $Rwu$ 使 $M, u\Vdash\varphi$.

这时称 $\varphi$ 是**可满足**的. 设 $\Gamma\subset \mathrm{Form}(\Diamond, \Phi)$, 如果存在模型 $M$ 和点 $w$ 使得 $\forall\varphi\in\Gamma$ 均有 $M, w\Vdash\varphi$, 则称 $\Gamma$ **可满足**. 如果 $\forall w\in W$ 均有 $M, w\Vdash\varphi$, 则称 $\varphi$ 在 $M$ 中**全局真**(globally true), 记作 $M\Vdash\varphi$.

**注 9.1.8** i) 符号 $Rwu$ 表示 $(w, u)\in R$, 即序对 $(w, u)$ 满足关系 $R$. 这时如果通俗地称 $u$ 为 $w$ 的"亲戚", 则 $M, w\Vdash\Diamond\varphi$ 指 $w$ 有亲戚满足 $\varphi$.

ii) 这里并未要求 $R$ 具有自反性, 所以从 $M, w\Vdash\Diamond\varphi$ 推不出 $M, w\Vdash\varphi$, 这里也不要求 $R$ 具有对称性或传递性. 对 $R$ 提出不同的要求就得出不同的模态逻辑系统.

iii) 把 $\Diamond\varphi$ 解释为 $\varphi$ 可能为真, 只是一种解释. 从一般的观点看, 不一定非把 $\Diamond$ 解释为修饰词"可能", 这要由具体的应用背景以及与 $\Diamond$ 相应的 $W$ 上的二元关系 $R$ 的性质才能确定.

iv) 如果用 $\Box\varphi$ 表示 $\neg\Diamond\neg\varphi$, 请读者证明 $M, w\Vdash\Box\varphi$ 当且仅当 $w$ 的每个亲戚都满足 $\varphi$.

**例 9.1.9** 设 $\Phi=\{p, q, r\}$, $M=(W, R, V)$, 这里 $W=\{w_1, \cdots w_5\}$, $Rw_iw_j$ 当且仅当 $j=i+1$, $V(p)=\{w_2, w_3\}$, $V(q)=W$, $V(r)=\varnothing$, 则

i) $M, w_1\Vdash\Diamond\Box p$.

ii) $M, w_2\Vdash\Diamond(p\wedge\neg r)$.

iii) $M, w_1\Vdash q\wedge\Diamond(q\wedge\Diamond(q\wedge\Diamond(q\wedge\Diamond q)))$.

事实上, i) 是说 $M, w_2\Vdash\Box p$, 因为 $w_2$ 是 $w_1$ 的亲戚. 而 $M, w_2\Vdash\Box p$ 是说 $M, w_2\Vdash\Diamond\neg p$ 不成立, 即 $w_2$ 的亲戚 $w_3$ 不满足 $\neg p$, 也就是 $w_3$ 满足 $p$. 由 $V(p)=\{w_2, w_3\}$ 知 $w_3\in V(p)$, 即 $w_3$ 的确满足 $p$, 所以 i) 成立.

ii) 是说 $w_3$ 满足 $p$ 并且 $w_3$ 不满足 $r$, 由 $V(p)=\{w_2, w_3\}$ 和 $V(r)=\varnothing$ 知这是对的.

iii) 是说 $w_1$ 满足 $q$, $w_2$ 满足 $q$, $w_3$ 满足 $q$, $w_4$ 满足 $q$ 以及 $w_5$ 满足 $q$, 从 $V(q)=W$ 知这是对的.

以下把基本模态逻辑的模型简称为**基本模型**.

**命题 9.1.10** 设 $M=\Big(W, R, V\Big)$ 是基本模型, 令

$$V(\varphi)=\Big\{w\in W\Big|M, w\Vdash\varphi\Big\},\quad \varphi\in\mathrm{Form}(\Diamond, \Phi), \tag{9.1.7}$$

则

i) $V(\neg\varphi)=W-V(\varphi)$.

ii) $V(\varphi\vee\psi)=V(\varphi)\cup V(\psi)$.

iii) $V(\varphi\wedge\psi)=V(\varphi)\cap V(\psi)$.

iv) $V(\varphi\to\psi)=(W-V(\varphi))\cup V(\psi)$.

v) $V(\Diamond\varphi)=\Big\{w\in W\Big|R[w]\cap V(\varphi)\neq\varnothing\Big\}$.

这里 $R[w]=\{u\in W\mid Rwu\}$，即 $R[w]$ 是 $w$ 的全体 $R$-亲戚之集.

**证**　把 $\boldsymbol{M}, w\Vdash\varphi$ 简记为 $w\Vdash\varphi$.

i) $V(\neg\varphi)=\{w\mid w\Vdash\neg\varphi\}=\{w\mid w\Vdash\varphi\text{ 不成立}\}$.

$$=W-\{w\mid w\Vdash\varphi\}=W-V(\varphi).$$

ii) $V(\varphi\vee\psi)=\{w\mid w\Vdash\varphi\vee\psi\}=\{w\mid w\Vdash\varphi\text{ 或 }w\Vdash\psi\}$

$$=\{w\mid w\Vdash\varphi\}\cup\{w\mid w\Vdash\psi\}=V(\varphi)\cup V(\psi).$$

iii) 和 iv) 的证明是容易的，请读者自行验证.

v) 由(9.1.7)式知

$$V(\Diamond\varphi)=\{w\mid w\Vdash\Diamond\varphi\}.$$

而命题中的 v) 说

$$V(\Diamond\varphi)=\{w\mid R[w]\cap V(\varphi)\neq\varnothing\}.$$

所以只需证明

$$w\Vdash\Diamond\varphi\quad\text{当且仅当}\quad R[w]\cap V(\varphi)\neq\varnothing.\tag{9.1.8}$$

即

$$w\Vdash\Diamond\varphi\quad\text{当且仅当}\quad R[w]\cap\{u\mid u\Vdash\varphi\}\neq\varnothing.\tag{9.1.9}$$

由定义 9.1.7v) 和 $R[w]$ 的意义知(9.1.9)式显然成立. 这就证明了 v).

以后为方便计，对任二集合 $G$ 与 $H$ 也用 $G\to H$ 表示集合 $\neg G\cup H=(W-G)\cup H$，从而上面的 iv) 也可写为 $V(\varphi\to\psi)=V(\varphi)\to V(\psi)$.

**注 9.1.11**　按照定义 9.1.5，赋值 $V$ 只是把 $\Phi$ 中的原子命题映射为 $W$ 的子集，而(9.1.7)式则把 $V$ 的作用范围扩展到了 Form($\Diamond$, $\Phi$)，即 $V$ 可以把任一模态公式 $\varphi$ 都映射为 $W$ 的子集.

由(9.1.7)式成立即得出下面的推论.

**推论 9.1.12**　设 $\boldsymbol{M}=(W, R, V)$ 是基本模型，$w\in W$，$\varphi\in$ Form($\Diamond$, $\Phi$)，则

$$\text{i) } w\Vdash\varphi\quad\text{当且仅当}\quad w\in V(\varphi).\tag{9.1.10}$$

$$\text{ii) } \boldsymbol{M}\Vdash\varphi\quad\text{当且仅当}\quad V(\varphi)=W.\tag{9.1.11}$$

**定义 9.1.13**　设 $\varphi\in$ Form($\Diamond$, $\Phi$)，如果对每个基本模型 $\boldsymbol{M}=(W, R, V)$ 均有 $\boldsymbol{M}\Vdash\varphi$，则称 $\varphi$ 为**有效公式**，记作 $\Vdash\varphi$. 当 $\neg\varphi$ 有效时称 $\varphi$ 为**矛盾式**. 显然，$\neg\bot$ 是有效公式.

由定义 9.1.13 和(9.1.11)式立即得出下面的推论.

**推论 9.1.14** $\varphi$ 是有效公式当且仅当对每个基本模型 $\boldsymbol{M}=(W, R, V)$ 均有

$$V(\varphi)=W. \tag{9.1.12}$$

请读者注意，$\varphi$ 有效是比 $\varphi$ 可满足强得多的概念，前者要求对每个基本模型 $\boldsymbol{M}=(W, R, V)$ 和每个点 $w\in W$ 均有 $w\Vdash\varphi$，而后者只要求存在一个基本模型 $\boldsymbol{M}$ 和存在 $W$ 中的点 $w$ 使 $w\Vdash\varphi$ 就行.

**命题 9.1.15** 设 $\varphi, \varphi\to\psi\in\text{Form}(\Diamond, \Phi)$,

i)若 $\varphi$ 和 $\varphi\to\psi$ 都是有效公式，则 $\psi$ 也是有效公式，即 MP 保持公式的有效性.

ii)若 $\varphi$ 是有效公式，则 $\Box\varphi$ 也是有效公式，即模态算子 $\Box$ 保持公式的有效性.

**证** i)任取基本模型 $\boldsymbol{M}=(W, R, V)$，由 $\varphi$ 有效知 $V(\varphi)=W$，由 $\varphi\to\psi=\neg\varphi\vee\psi$ 有效知 $V(\neg\varphi\vee\psi)=(W-V(\varphi))\cup V(\psi)=W$，所以 $V(\psi)=W$. 由 $\boldsymbol{M}$ 的任意性知 $\psi$ 是有效公式.

ii)设 $\Vdash\varphi$，$\boldsymbol{M}=(W, R, V)$ 是任一基本模型，则 $\forall w\in W$ 和 $\forall u\in W$, $Rwu$，均有 $\boldsymbol{M}, u\Vdash\varphi$，所以 $\boldsymbol{M}, w\Vdash\Box\varphi$. 由 $\boldsymbol{M}$ 和 $w$ 的任意性即得 $\Vdash\Box\varphi$，即 $\Box\varphi$ 是有效公式.

设 $\boldsymbol{M}=(W, R, V)$ 是一个基本模型，$\varphi\in\text{Form}(\Diamond, \Phi)$. 在定义 9.1.7 中引入了 $\varphi$ 在 $\boldsymbol{M}$ 中全局真的概念，用 $\boldsymbol{M}\Vdash\varphi$ 表示. 这一概念还可以进一步加强，即允许赋值 $V$ 任意变化，或者干脆不让 $V$ 出现，我们有如下的定义.

**定义 9.1.16** 设 $F=(W, R)$，这里 $W$ 是非空集，$R$ 是 $W$ 上的二元关系，则称 $F$ 为一个**基本架构**. 设 $\varphi\in\text{Form}(\Diamond, \Phi)$，如果对每个赋值 $V:\Phi\to\mathscr{P}(W)$ 均有 $\boldsymbol{M}\Vdash\varphi$，这里 $\boldsymbol{M}=(W, R, V)$，则称 $\varphi$ **在 $F$ 中有效**，记为 $F\Vdash\varphi$. 设 $\mathscr{F}$ 是一类基本架构，如果 $\forall F\in\mathscr{F}$ 均有 $F\Vdash\varphi$，则称 $\varphi$ **在类 $\mathscr{F}$ 中有效**，记作 $\mathscr{F}\Vdash\varphi$. 在类 $\mathscr{F}$ 中有效的全体公式之集称为 **$\mathscr{F}$ 的逻辑**，记作 $\Lambda_{\mathscr{F}}(\Phi)$，或简记为 $\Lambda_{\mathscr{F}}$，即

$$\Lambda_{\mathscr{F}}(\Phi)=\{\varphi\in\text{Form}(\Diamond, \Phi)\mid\mathscr{F}\Vdash\varphi\}. \tag{9.1.13}$$

**例 9.1.17** 设 $\mathscr{F}=\{F=(W, R)\mid R\text{ 是 }W\text{ 上的传递关系}\}$，则

$$\mathscr{F}\Vdash\Diamond\Diamond p\to\Diamond p, \quad p\in\Phi. \tag{9.1.14}$$

**证** 由定义 9.1.16，只需证对任意的基本架构 $F=(W,R)\in\mathscr{F}$ 以及对任意的赋值 $V:\Phi\to\mathscr{F}(W)$ 均有 $\boldsymbol{M}\Vdash\Diamond\Diamond p\to\Diamond p$，这里 $\boldsymbol{M}=(W, R, V)$. 为此，任取 $w\in W$，只需证 $w\Vdash\Diamond\Diamond p\to\Diamond p$. 不妨设 $w\Vdash\Diamond\Diamond p$，这时有 $u\in W$ 且 $Rwu$，使得 $u\Vdash\Diamond p$，从而又有 $v\in W$ 且 $Ruv$，使 $v\Vdash p$. 由 $Rwu$ 和 $Ruv$ 以及 $R$ 的传递性得 $Rwv$，即 $v$ 有亲戚 $v$ 满足 $p$，所以 $w\Vdash\Diamond p$. 这便证得 $w\Vdash\Diamond\Diamond p\to\Diamond p$. 由 $w$, $M$, $F$ 的任意性知(9.1.14)式成立.

**定义 9.18** 设 $\sigma:\Phi\to\text{Form}(\Diamond, \Phi)$ 是一个映射，则 $\sigma$ 按如下方式诱导一个映射 $\sigma^*:\text{Form}(\Diamond, \Phi)\to\text{Form}(\Diamond, \Phi)$:

$$\sigma^*(\bot)=\bot,$$
$$\sigma^*(p)=\sigma(p),\qquad p\in\Phi,$$
$$\sigma^*(\neg\varphi)=\neg\sigma^*(\varphi),$$
$$\sigma^*(\varphi\vee\psi)=\sigma^*(\varphi)\vee\sigma^*(\psi),$$
$$\sigma^*(\Diamond\varphi)=\Diamond\sigma^*(\varphi).$$

称 $\sigma^*$ 为由 $\sigma$ 诱导的**一致代换**. 设 $\psi=\sigma^*(\varphi)$，则称 $\psi$ 为 $\varphi$ 的**代换实例**. 称经典命题逻辑中重言式(即定理)的代换实例为**模态重言式**.

**例 9.1.19**　$p\to p$，$p\to(q\to p)$，$\Diamond p\to(\Diamond q\to\Diamond p)$，$(\Diamond p\to q)\to(\neg q\to\neg\Diamond p)$ 和 $\varphi\to(\neg\varphi\to\psi)$ ($\varphi,\psi\in\mathrm{Form}(\Diamond,\Phi)$) 等都是模态重言式. 但 $\Diamond(p\to p)$ 不是模态重言式.

**命题 9.1.20**　设 $\varphi$ 是模态重言式，$\sigma^*$ 是由映射 $\sigma:\Phi\to\mathrm{Form}(\Diamond,\Phi)$ 诱导的一致代换，则 $\sigma^*(\varphi)$ 仍为模态重言式.

命题 9.1.20 表明了模态重言式关于一致代换的不变性.

**证**　设 $\varphi$ 是模态重言式，则有经典命题逻辑中的重言式 $A=f(p_1,\cdots,p_n,\bot)$ 和映射 $\delta:\Phi\to\mathrm{Form}(\Diamond,\Phi)$ 使 $\varphi=\delta^*(A)$，这里 $\delta^*$ 是 $\delta$ 诱导的一致代换. 由定义 9.1.18 知 $\delta^*$ 保运算 $\neg$，$\vee$ 和 $\Diamond$，且 $\delta^*(\bot)=\bot$，$\delta^*(p)=\delta(p)$ ($p\in\Phi$)，所以有

$$\varphi=\delta^*(A)=f(\delta(p_1),\cdots,\delta(p_n),\bot).$$

设 $\sigma^*$ 是由 $\sigma$ 诱导的一致代换，则

$$\begin{aligned}\sigma^*(\varphi)&=\sigma^*\delta^*(f(p_1,\cdots,p_n,\bot))\\&=\sigma^*f(\delta(p_1),\cdots,\delta(p_n),\bot)\\&=f(\sigma\delta(p_1),\cdots,\sigma\delta(p_n),\bot)\\&=(\sigma\delta)^*(A).\end{aligned}$$

所以 $\sigma^*(\varphi)$ 仍为模态重言式.

**命题 9.1.21**　模态重言式是有效公式.

**证**　经典命题逻辑中的重言式就是定理，是可以从下面的公理(L1)～(L3)运用 MP 规则在有限步之内推出的：

(L1) $A\to(B\to A)$.

(L2) $(A\to(B\to C))\to((A\to B)\to(A\to C))$.

(L3) $(\neg A\to\neg B)\to(B\to A)$.

以上 $A,B,C\in F(S)$. 设 $\sigma^*:\mathrm{Form}(\Diamond,\Phi)\to\mathrm{Form}(\Diamond,\Phi)$ 是 $\sigma:\Phi\to\mathrm{Form}(\Diamond,\Phi)$ 诱导的一致代换，把以上三条公理中的表达式分别记为 L1，L2，L3，并分别用 $A^*$，$B^*$，$C^*$ 记 $\sigma^*(A)$，$\sigma^*(B)$，$\sigma^*(C)$，则由定义 9.1.18 知

$\sigma^*(\mathrm{L1})=A^*\to(B^*\to A^*)$.

$\sigma^*(\mathrm{L2})=(A^*\to(B^*\to C^*))\to((A^*\to B^*)\to(A^*\to C^*))$.

$\sigma^*(L3)=(\neg A^*\to\neg B^*)\to(B^*\to A^*)$.

设 $\varphi$ 是模态重言式，则存在经典命题逻辑中的定理 $T$ 使得 $\varphi=\sigma^*(T)$. 因为 $T$ 可从 L1，L2，L3 出发运用有限次 MP 规则而得到，所以从 $\sigma^*$ 保运算 $\neg$ 和 $\to$ 知 $\varphi=\sigma^*(T)$ 可从 $\sigma^*(L1)$，$\sigma^*(L2)$，$\sigma^*(L3)$ 出发运用有限次 MP 规则得到. 因为 MP 规则保持公式的有效性，所以以下只需证明 $\sigma^*(L1)$，$\sigma^*(L2)$，$\sigma^*(L3)$ 都是有效公式即可. 以 $\sigma^*(L2)$ 为例进行证明. 设 $\boldsymbol{M}=(W, R, V)$ 是任一基本模型，则由命题 9.1.10 得

$$V(\sigma^*(L2))=(V(A^*)\to(V(B^*)\to V(C^*)))\to((V(A^*)\to V(B^*))\to(V(A^*)\to V(C^*))).$$

分别用 $G$, $H$, $K$ 表示集合 $V(A^*)$，$V(B^*)$，$V(C^*)$，并将 $W-E$ 简记为 $\neg E$, 则由上式得

$$\begin{aligned}V(\sigma^*(L2))&=(G\to(H\to K))\to((G\to H)\to(G\to K))\\&=\neg(\neg G\cup(\neg H\cup K))\cup(\neg(\neg G\cup H)\cup(\neg G\cup K))\\&=(G\cap H\cap\neg K)\cup((G\cap\neg H)\cup\neg G\cup K)\\&=(G\cap H\cap\neg K)\cup(\neg G\cup\neg H\cup K)\\&=(G\cap H\cap\neg K)\cup\neg(G\cap H\cap\neg K)=W.\end{aligned}$$

所以由 $\boldsymbol{M}$ 的任意性和推论 9.1.14 知 $\sigma^*(L2)$ 是有效公式. $\sigma^*(L1)$ 与 $\sigma^*(L3)$ 的有效性证明更简单一些，请读者自行验证.

**注 9.1.22** 有效公式不限于模态重言式，如 $\Box(p\to p)$ 是有效公式，但它不是模态重言式. 另一个例子是

$$(\mathrm{K})\quad \Box(p\to q)\to(\Box p\to\Box q). \tag{9.1.15}$$

以 $\varphi$ 记(K)中的公式，则 $\varphi$ 不是模态重言式，但 $\varphi$ 是有效公式，即任取 $\boldsymbol{M}=(W, R, V)$ 和 $w\in W$，均有 $w\Vdash\varphi$ 成立. 为此只需验证当 $w\Vdash\Box(p\to q)$ 且 $w\Vdash\Box p$ 时有 $w\Vdash\Box q$. 事实上，设 $u$ 是 $w$ 的任一 $R$ 亲戚，即 $Rwu$，则 $u\Vdash p\to q$ 且 $u\Vdash p$，所以 $u\Vdash q$. 由 $u$ 的任意性即得 $w\Vdash\Box q$.

命题 9.1.21 可以推广为下面的命题.

**命题 9.1.23** 有效公式的代换实例仍为有效公式.

为证明本命题，我们先引入一些记号如下：

设 $\boldsymbol{M}=(W, R, V)$ 是基本模型，

i) 把空集 $\varnothing$ 记为 $\perp$.

ii) 设 $G\subset W$，把 $W-G$ 记为 $\neg G$.

iii) 设 $G$, $H\subset W$，把 $G\cup H$ 记为 $G\vee H$.

iv) 设 $G\subset W$，令

$$\Diamond G = \{w \mid 有\ u \in W,\ Rwu\ 使\ u \in G\}$$
$$= \{w \mid R[w] \cap G \neq \varnothing\}. \quad (9.1.16)$$

这里

$$R[w] = \{u \in W \mid Rwu\}.$$

由(9.1.16)式和命题 9.1.10 中的 v)得

$$\Diamond V(\varphi) = V(\Diamond\varphi). \quad (9.1.17)$$

在这种符号约定下我们有下面的引理.

**引理 9.1.24**　设 $\varphi = f(p_1, \cdots, p_n, \bot) \in \text{Form}(\Diamond, \Phi)$, $p_1, \cdots, p_n \in \Phi$. 这里 $\varphi$ 是用连接词$\neg$, $\vee$, $\Diamond$将 $p_1, \cdots, p_n$, $\bot$连接而成的模态公式. 设 $\boldsymbol{M} = (W, R, V)$ 是任一基本模型, 则

$$V(\varphi) = f(V(p_1), \cdots, V(p_n), \bot). \quad (9.1.18)$$

**证**　设 $\varphi$ 不含连接词, 则 $\varphi = p_i$ 或 $\varphi = \bot$. 这时(9.1.18)式显然成立.

设 $\varphi$ 中连接词的个数不超过 $k$ 个时(9.1.18)式成立, 今 $\varphi$ 中含有 $k+1$ 个连接词, 则只有以下三种情况发生:

i) $\varphi = \neg\alpha$.

ii) $\varphi = \Diamond\beta$.

iii) $\varphi = \gamma \vee \delta$.

设 $\alpha = g(p_1, \cdots p_n, \bot)$, $\beta = h(p_1, \cdots p_n, \bot)$, $\gamma = s(p_1, \cdots p_n, \bot)$, $\delta = t(p_1, \cdots, p_n, \bot)$. 这时 $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ 中连接词的个数均不超过 $k$, 所以由归纳假设得

i) $V(\varphi) = \neg V(\alpha)$
$$= \neg g(V(p_1), \cdots, V(p_n), \bot)$$
$$= f(V(p_1), \cdots, V(p_n), \bot).$$

ii) $V(\varphi) = V(\Diamond\beta)$
$$= \Diamond V(\beta)$$
$$= \Diamond h(V(p_1), \cdots, V(p_n), \bot)$$
$$= f(V(p_1), \cdots, V(p_n), \bot).$$

iii) $V(\varphi) = V(\gamma) \vee V(\delta)$
$$= s(V(p_1), \cdots, V(p_n), \bot) \vee t(V(p_1), \cdots, V(p_n), \bot)$$
$$= f(V(p_1), \cdots, V(p_n), \bot).$$

这就证明了(9.1.18)式.

**命题 9.1.23 的证明**　设 $\varphi = f(p_1, \cdots, p_n, \bot) \in \text{Form}(\Diamond, \Phi)$, $p_1, \cdots, p_n \in \Phi$. $\sigma^*$ 是由 $\sigma: \Phi \to \text{Form}(\Diamond, \Phi)$ 诱导的一致代换, 且 $\varphi$ 是有效公式, 以下证明

$\sigma^*(\varphi)$也是有效公式. 由定义 9.1.18 知映射 $\sigma^*$ 是保持运算$\neg$, $\vee$和$\Diamond$的, 所以

$$\sigma^*(\varphi)=f(\sigma^*(p_1),\cdots,\sigma^*(p_n),\bot). \tag{9.1.19}$$

任取基本模型 $\boldsymbol{M}=(W,R,V)$, 只需证明 $V(\sigma^*(\varphi))=W$. 由引理9.1.24 和(9.1.19)式可以证明

$$V(\sigma^*(\varphi))=f(V(\sigma^*(p_1)),\cdots,V(\sigma^*(p_n)),\bot) \tag{9.1.20}$$

取赋值 $V':\Phi\to\mathscr{P}(W)$如下:

$$V'(p_1)=V(\sigma^*(p_1)),\cdots,V'(p_n)=V(\sigma^*(p_n)), \tag{9.1.21}$$

则由 $\varphi$ 为有效公式知 $V'(\varphi)=W$. 由引理 9.1.24 得

$$\begin{aligned}&f(V(\sigma^*(p_1)),\cdots,V(\sigma^*(p_n)),\bot)\\&=f(V'(p_1),\cdots,V'(p_n),\bot)=V'(\varphi)=W.\end{aligned}$$

这就证明了 $V(\sigma^*(\varphi))=W$.

**推论 9.1.25** 模态重言式是有效公式.

**证** 易证经典命题逻辑中不含模态词的重言式是有效公式, 所以由命题 9.1.23 知模态重言式是有效公式.

### 9.1.4 基本模态逻辑的语构理论

基本模态逻辑系统是系统 $\boldsymbol{K}$.

**定义 9.1.26** 系统 $\boldsymbol{K}$ 中的公理包括全体模态重言式、$\neg\bot$以及下面的公理

$$(\mathrm{K})\quad \Box(p\to q)\to(\Box p\to\Box q)$$

及其代换实例, 这里$\Box\varphi$ 是$\neg\Diamond\neg\varphi$ 的简写. 系统 $\boldsymbol{K}$ 中的推理规则有三条, 即

i) MP 规则.

ii) 推广规则: 由 $\varphi$ 可得$\Box\varphi$.

iii) 一致代换规则. 对每个映射 $\sigma:\Phi\to\mathrm{Form}(\Diamond,\Phi)$, 由 $\varphi$ 可得 $\sigma^*(\varphi)$, 这里 $\sigma^*$ 是 $\sigma$ 诱导的一致代换.

**命题 9.1.27** 在此定义中把公理(K)改为(K$^*$) $\Box(\varphi\to\psi)\to(\Box\varphi\to\Box\psi)$, $\varphi$, $\psi\in\mathrm{Form}(\Diamond,\Phi)$, 则第三条推理规则(即一致代换规则)可以略去.

**证** 因为 MP 规则和推广规则均不涉及原子公式的替换问题, 所以从模态重言式、$\neg\bot$以及(K$^*$)出发先使用 MP 规则进行推理后再使用一致代换规则进行推理也可改变为先对模态重言式和(K$^*$)进行一致代换后再进行 MP 推理或推广推理. 但由命题 9.1.20 知对模态重言式作一致代换仍得出模态重言式, 且类似可证对(K$^*$)作一致代换仍得出(K$^*$). 所以, 在定义 9.1.26 中只要用(K$^*$)取代(K), 就可以少用一条推理规则, 即不用一致代换规则.

**定义 9.1.28** ***K*-证明**是一个模态公式的有限序列 $\varphi_1,\cdots,\varphi_n$, 这里 $\forall i\leqslant n$, $\varphi_i$ 是系统 $\boldsymbol{K}$ 中的公理, 或者存在 $j<i$, 使 $\varphi_i$ 是由 $\varphi_j$ 运用推广规则或一致代换规则而得的公式, 或者存在 $j,k<i$ 使 $\varphi_i$ 是由 $\varphi_j$ 和 $\varphi_k$ 运用 MP 规则而得的公式. 这

里称 $\varphi_n$ 为 **$K$-定理**，记为 $\vdash_K \varphi_n$. 又，设 $\varphi, \psi \in \mathrm{Form}(\Diamond, \Phi)$，若 $\varphi \to \psi$ 与 $\psi \to \varphi$ 都是 $K$-定理，则称 $\varphi$ 与 $\psi$ **$K$-可证等价**，记为 $\varphi \sim_K \psi$，或简记为 $\varphi \sim \psi$.

**例 9.1.29** $(\Box\varphi \wedge \Box\psi) \leftrightarrow \Box(\varphi \wedge \psi)$ 是 $K$-定理.

**证** 以下只证明 $\vdash (\Box\varphi \wedge \Box\psi) \to \Box(\varphi \wedge \psi)$，另一半留给读者作为练习.

| | |
|---|---|
| (1) $p \to (q \to p \wedge q)$ | 重言式 |
| (2) $\Box(p \to (q \to p \wedge q))$ | (1)，Gen |
| (3) $\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$ | (K) |
| (4) $\Box(p \to (q \to p \wedge q)) \to (\Box p \to \Box(q \to p \wedge q))$ | (3)，一致代换 |
| (5) $\Box p \to \Box(q \to p \wedge q)$ | (2)，(4)，MP |
| (6) $\Box(q \to p \wedge q) \to (\Box q \to \Box(p \wedge q))$ | (3)，一致代换 |
| (7) $\Box p \to (\Box q \to \Box(p \wedge q))$ | (5)，(6)，HS |
| (8) $(\Box p \wedge \Box q) \to \Box(p \wedge q)$ | (7)，可证等价代换 |
| (9) $(\Box\varphi \wedge \Box\psi) \to \Box(\varphi \wedge \psi)$ | (8)，一致代换 |

注意，以上在 $K$-证明中 Gen 表示使用推广规则. HS 表示 Hypothetical Syllogism，即三段论规则，请读者参见定理 1.2.8 说明在上面证明中使用 HS 的合理性. 最后，请读者说明为什么在 $K$-证明过程中可以使用经典命题逻辑中的可证等价代换，在本例中为何可将(7)换为(8).

**定理 9.1.30**（系统 $K$ 的可靠性定理） 系统 $K$ 中的定理都是有效公式，即

$$\text{若} \vdash_K \varphi, \quad \text{则} \Vdash \varphi. \tag{9.1.22}$$

**证** 由命题 9.1.21 知模态重言式是有效公式，由注 9.1.22 知公理(K)是有效公式. 又由命题 9.1.15 和命题 9.1.23 知系统 $K$ 中的三条推理规则都保持公式的有效性，所以从定义 9.1.26 知系统 $K$ 中的定理都是有效公式. 以下在不致混淆时也将 $\vdash_K \varphi$ 简记为 $\vdash \varphi$.

系统 $K$ 还是完备的，即有效的模态公式 $\varphi$ 一定是 $K$ 中的定理. 像经典命题逻辑中的情形那样，系统 $K$ 的完备性证明要比它的可靠性证明复杂许多，下面先作一些准备.

**定义 9.1.31** i) 设 $\Gamma \subset \mathrm{Form}(\Diamond, \Phi)$，$\varphi \in \mathrm{Form}(\Diamond, \Phi)$，称 $\Gamma$ 为**理论**. 如果 $\Gamma$ 非空，且存在 $\psi_1, \cdots, \psi_n \in \Gamma$ 使 $\vdash \psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_n \to \varphi$，则称 **$\varphi$ 可由 $\Gamma$ 导出**或 **$\varphi$ 是 $\Gamma$ 结论**，记为 $\Gamma \vdash \varphi$.

ii) 设 $\Gamma$ 是理论，如果 $\Gamma \vdash \bot$，则称 **$\Gamma$ 不相容**（**或不和谐**），否则称 **$\Gamma$ 相容**（**或和谐**）.

iii) 设 $\boldsymbol{M} = (W, R, V)$ 是一个基本模型，$w \in W$. $\Gamma$ 是非空理论. 如果 $\forall \psi \in \Gamma$

均有 $M, w \Vdash \psi$，则称 $\Gamma$ 在模型 $M$ 中的点 $w$ 处可满足，简称为 $\Gamma$ **可满足**，记为 $M, w \Vdash \Gamma$. 如果对每个模型 $M$ 和每个点 $w$，当 $M, w \Vdash \Gamma$ 时有 $M, w \Vdash \varphi$，则称 $\Gamma$ **语义蕴涵** $\varphi$，记为 $\Gamma \Vdash \varphi$. 当 $\Gamma$ 为空集时，$\Gamma \Vdash \varphi$ 表示 $\Vdash \varphi$，即 $\varphi$ 为有效公式.

iv) 系统 $K$ 的**强完备性**是指对任意的 $\Gamma \cup \{\varphi\} \subset \mathrm{Form}(\Diamond, \Phi)$，

$$\text{若 } \Gamma \Vdash \varphi, \quad \text{则 } \Gamma \vdash \varphi. \tag{9.1.23}$$

**命题 9.1.32** 系统 $K$ 具有强完备性的充分条件是每个相容理论均可满足.

**证** 设相容理论均可满足. 首先注意，若 $\Gamma \vdash \varphi$ 不成立，则 $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ 是相容的. 事实上，若不然，则有 $\psi_1, \cdots, \psi_n \in \Gamma$，使 $\vdash (\psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_n) \wedge (\neg\varphi) \to \bot$. 易证 $(\psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_n) \wedge (\neg\varphi) \to \bot$ 依次与 $\neg\bot \to \neg(\psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_n) \vee \varphi$ 和 $\psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_n \to \varphi$ $K$-可证等价，所以有 $\vdash \psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_n \to \varphi$. 这与 $\Gamma \vdash \varphi$ 不成立相矛盾！可见，$\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ 是相容的，从而由命题中的条件知它是可满足的，即存在模型 $M = (W, R, V)$ 和 $w \in W$ 使 $M, w \Vdash \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$. 这里自然有 $M, w \Vdash \Gamma$. 如果 $\Gamma \Vdash \varphi$ 成立，则有 $M, w \Vdash \varphi$，这与 $M, w \Vdash \Gamma \cup \left\{\neg\varphi\right\}$ 相矛盾！可见，$\Gamma \Vdash \varphi$ 不成立. 这就证明了 (9.1.23) 式，即系统 $K$ 具有强完备性.

注意，命题 9.1.32 只给出了强完备性的一个刻画，并没有说系统 $K$ 就具有强完备性. 事实上，系统 $K$ 确实是强完备的，为证明这一事实我们还要作一些准备.

**引理 9.1.33** 每个相容理论都可扩张为一个极大相容理论.

**证** 设 $\Gamma$ 是相容理论，令

$$\mathscr{T} = \left\{\Sigma \,\middle|\, \Sigma \text{ 是相容理论，且 } \Gamma \subset \Sigma\right\}, \tag{9.1.24}$$

则 $\mathscr{T}$ 按包含序构成一个偏序集. 设 $\mathscr{T}_0$ 是 $\mathscr{T}$ 中的一个链，则易证将 $\mathscr{T}_0$ 中各相容理论并起来仍得到一个相容理论，它就是 $\mathscr{T}_0$ 的一个上界，所以由 Zorn 引理知 $\mathscr{T}$ 中存在极大元，它就是包含 $\Gamma$ 的极大相容理论.

**命题 9.1.34** 设 $\Gamma$ 是系统 $K$ 中的极大相容理论，则

i) 若 $\varphi$ 是 $K$-定理，则 $\varphi \in \Gamma$.

ii) 若 $\Gamma \vdash \varphi$，则 $\varphi \in \Gamma$.

iii) $\Gamma$ 关于 MP 运算封闭，即若 $\varphi \in \Gamma$，$\varphi \to \psi \in \Gamma$，则 $\psi \in \Gamma$.

iv) $\forall \varphi \in \mathrm{Form}(\Diamond, \Phi)$，$\varphi \in \Gamma$ 或 $\neg\varphi \in \Gamma$.

v) 若 $\varphi \vee \psi \in \Gamma$，则 $\varphi \in \Gamma$ 或 $\psi \in \Gamma$.

**证** i) 设 $\varphi$ 是 $K$-定理，则由 $\Gamma$ 相容易证 $\Gamma \cup \{\varphi\}$ 仍相容，所以由 $\Gamma$ 极大知 $\varphi \in \Gamma$.

ii) 设 $\Gamma \vdash \varphi$. 若 $\varphi \notin \Gamma$，则由 $\Gamma$ 极大相容知 $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \bot$，所以有 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \Gamma$ 使 $\vdash (\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n) \wedge \varphi \to \bot$. 又由 $\Gamma \vdash \varphi$ 知有 $\beta_1, \cdots, \beta_m \in \Gamma$ 使 $\vdash (\beta_1 \wedge \cdots \wedge \beta_m)$

$\to\varphi$. 这时$\vdash(\alpha_1\wedge\cdots\wedge\alpha_n)\wedge(\beta_1\wedge\cdots\wedge\beta_m)\to(\alpha_1\wedge\cdots\wedge\alpha_n)\wedge\varphi$，所以由 HS 规则得$\vdash(\alpha_1\wedge\cdots\wedge\alpha_n)\wedge(\beta_1\wedge\cdots\wedge\beta_m)\to\bot$. 这与 $\Gamma$ 的相容性相矛盾！所以 $\varphi\in\Gamma$.

iii) 由$\vdash\varphi\wedge(\varphi\to\psi)\to\psi$ 知 $\Gamma\vdash\psi$，所以由 ii) 知 $\psi\in\Gamma$.

iv) 若 $\varphi\notin\Gamma$，则 $\Gamma\cup\{\neg\varphi\}$ 相容，所以由 $\Gamma$ 极大知$\neg\varphi\in\Gamma$.

v) 设 $\varphi\vee\psi\in\Gamma$，即$\neg\varphi\to\psi\in\Gamma$. 若 $\varphi\notin\Gamma$，则由 iv) 知$\neg\varphi\in\Gamma$，所以由 iii) 知 $\psi\in\Gamma$.

**推论 9.1.35**　设 $\Gamma$ 是极大相容理论，则

i) 若 $\varphi\in\Gamma$，且 $\varphi\sim\psi$，则 $\psi\in\Gamma$.

ii) 若 $\varphi$，$\psi\in\Gamma$，则 $\varphi\wedge\psi\in\Gamma$.

**证**　i) 设 $\varphi\in\Gamma$，由 $\varphi\sim\psi$ 知 $\vdash\varphi\to\psi$，从而由命题 9.1.34i) 知 $\varphi\to\psi\in\Gamma$. 再由命题 9.1.34iii) 即得 $\psi\in\Gamma$.

ii) 由 $\varphi$，$\psi\in\Gamma$ 知 $\Gamma\vdash\varphi\wedge\psi$，所以由命题 9.1.34ii) 知 $\varphi\wedge\psi\in\Gamma$.

**注 9.1.36**　请读者注意，在定义 9.1.31 中，$\varphi$ 可由 $\Gamma$ 导出与经典命题逻辑中的定义一致，只使用了 MP 规则，而没有完全使用系统 $\boldsymbol{K}$ 中的三条推理规则. 比如，设 $\Gamma=\{p\}$，则 $\Gamma\vdash\Box p$ 不成立，因为这里推广规则不能使用，又 $\Gamma\vdash q$ 也不成立，因为这里一致代换规则也不能使用. 另一方面，如果 $\Gamma$ 是空集，则 $\Gamma\vdash\varphi$ 表示$\vdash\varphi$，即 $\varphi$ 是 $\boldsymbol{K}$-定理，这时由 $\boldsymbol{K}$-证明的定义知$\Box\varphi$ 和 $\alpha^*(\varphi)$ 都是 $\boldsymbol{K}$-定理，这里 $\alpha^*$ 是任一一致代换.

**定义 9.1.37**　定义模型　$\boldsymbol{M}^*=(W^*,R^*,V^*)$ 如下：

i) $W^*=\left\{\Gamma^*\,\middle|\,\Gamma^*\text{是极大相容理论}\right\}$.

ii) $R^*wu$　当且仅当　若 $\varphi\in u$，则$\Diamond\varphi\in w$.

iii) $V^*(p)=\left\{w\in W^*\,\middle|\,p\in w\right\}$，　$p\in\Phi$.

称 $\boldsymbol{M}^*$ 为系统 $\boldsymbol{K}$ 的**典型模型**.

**注 9.1.38**　上面定义中的 ii) 还可以等价地刻画如下：

$$R^*wu\quad\text{当且仅当}\quad\text{若}\Box\varphi\in w\text{，则}\ \varphi\in u.\tag{9.1.25}$$

请读者加以证明.

**引理 9.1.39**(存在引理)　设 $\boldsymbol{M}^*$ 是系统 $\boldsymbol{K}$ 的典型模型，$w\in W^*$. 如果$\Diamond\varphi\in w$，则存在 $u\in W^*$ 使 $R^*wu$ 且 $\varphi\in u$.

**证**　设$\Diamond\varphi\in w$，令 $v=\{\varphi\}\cup\{\psi\,|\,\Box\psi\in w\}$，则 $v$ 是相容理论. 事实上，若不然，则由 $v\vdash\bot$ 易证存在 $\psi_1,\cdots,\psi_n\in v$ 使 $\vdash\psi_1\wedge\cdots\psi_n\to\varphi$. 由推广规则得

$$\vdash\Box(\psi_1\wedge\cdots\wedge\psi_n\to\neg\varphi).$$

从而由公理(K$^*$)可得

$$\vdash\Box(\psi_1\wedge\cdots\wedge\psi_n)\to\Box\neg\varphi.\tag{9.1.26}$$

又由例 9.1.29 知

$$\vdash(\Box\psi_1\wedge\cdots\wedge\Box\psi_n)\to\Box(\psi_1\wedge\cdots\wedge\psi_n). \qquad (9.1.27)$$

所以由(9.1.26)式和(9.1.27)式得

$$\vdash\Box\psi_1\wedge\cdots\wedge\Box\psi_n\to\Box\neg\varphi.$$

再由$\Box\neg\varphi=\neg\Diamond\varphi$以及$\Box\psi_1\wedge\cdots\wedge\Box\psi_n\in w$(为什么?)得$\neg\Diamond\varphi\in w$. 这与$\Diamond\varphi\in w$相矛盾! 所以 $v$ 确为相容理论. 由引理 9.1.33 知有极大相容理论 $u\in W^*$ 使 $v\subset u$. 所以当$\Box\psi\in w$ 时有 $\psi\in v\subset u$. 那么由注 9.1.38 即得 $R^*wu$ 和 $\varphi\in v\subset u$.

**引理 9.1.40**(真值引理) 设 $\boldsymbol{M}^*$ 是系统 $\boldsymbol{K}$ 的典型模型, $\varphi\in\mathrm{Form}(\Diamond,\Phi)$, 则

$$\boldsymbol{M}^*, w\Vdash\varphi \quad 当且仅当 \quad \varphi\in w. \qquad (9.1.28)$$

**证** 按 $\varphi$ 的复杂程度进行归纳证明. 如果 $\varphi=p\in\Phi$, 则由定义 9.1.37iii)和定义 9.1.7i)知(9.1.28)式成立. 设(9.1.28)式对含有不超过 $k$ 个模态逻辑连接词的公式已成立, $\varphi$ 是含有 $k+1$ 个连接词的公式, 则只有以下几种情况可能发生:

i) $\varphi=\neg\psi$.

设 $\boldsymbol{M}^*, w\Vdash\neg\psi$, 则 $\boldsymbol{M}^*, w\Vdash\psi$ 不成立, 所以由归纳假设知 $\psi\notin w$. 这时由 $w$ 为极大相容理论和命题 9.1.34iv)知$\neg\psi\in w$.

反过来, $\neg\psi\in w$ 等价于 $\psi\notin w$, 从而由归纳假设知 $\boldsymbol{M}^*, w\Vdash\psi$ 不成立, 所以有 $\boldsymbol{M}^*, w\Vdash\neg\psi$.

ii) $\varphi=\psi_1\vee\psi_2$.

设 $\boldsymbol{M}^*, w\Vdash\psi_1\vee\psi_2$, 则由定义 9.1.7iv)知 $\boldsymbol{M}^*, w\Vdash\psi_1$ 或 $\boldsymbol{M}^*, w\Vdash\psi_2$, 从而由归纳假设知 $\psi_1\in w$ 或 $\psi_2\in w$. 在每个情形下都易推出 $\psi_1\vee\psi_2\in w$.

反过来, 设 $\psi_1\vee\psi_2\in w$, 则由 $w$ 极大相容和命题 9.1.34v)知 $\psi_1\in w$ 或 $\psi_2\in w$, 再由归纳假设即得 $\boldsymbol{M}^*, w\Vdash\psi_1\vee\psi_2$.

iii) $\varphi=\Diamond\psi$.

设 $\boldsymbol{M}^*, w\Vdash\Diamond\psi$, 则存在 $u\in W^*$, $R^*wu$ 使 $\boldsymbol{M}^*, u\Vdash\psi$ 成立. 由归纳假设知 $\psi\in u$, 从而由 $R^*wu$ 和定义 9.1.37ii)得$\Diamond\psi\in w$.

反过来, 设$\Diamond\psi\in w$. 由存在引理知有 $u\in W^*$, $R^*wu$ 使 $\psi\in u$. 由归纳假设得 $\boldsymbol{M}^*, u\Vdash\psi$, 所以 $\boldsymbol{M}^*, w\Vdash\Diamond\psi$.

**定理 9.1.41**(系统 $K$ 的强完备性定理) 对于系统 $\boldsymbol{K}$ 而言, $\Gamma\cup\{\varphi\}\subset\mathrm{Form}(\Diamond,\Phi)$, 则(9.1.23)式成立, 即

$$若\ \Gamma\Vdash\varphi, \quad 则\ \Gamma\vdash\varphi. \qquad (9.1.29)$$

**证** 由命题 9.1.32 知只需证明系统 $\boldsymbol{K}$ 中的每个相容理论均可满足. 事实上, 设 $\Gamma$ 是一个相容理论, 则由引理 9.1.33, 存在极大相容理论 $\Gamma^*$ 使 $\Gamma\subset\Gamma^*$.

令 $\boldsymbol{M}^*=(W^*, R^*, V^*)$ 为系统 $\boldsymbol{K}$ 的典型模型, 令 $w=\Gamma^*$, 则由 $\Gamma\subset\Gamma^*$ 知 $\forall\varphi\in\Gamma$, 均有 $\varphi\in w$, 所以由真值引理得 $\boldsymbol{M}^*, w\Vdash\varphi$. 因为 $\varphi$ 是 $\Gamma$ 中的任意公式, 所以有 $\boldsymbol{M}^*, w\Vdash\Gamma$, 即 $\Gamma$ 可满足.

**推论 9.1.42**　在系统 $\boldsymbol{K}$ 中，设 $\Gamma\cup\{\varphi\}\subset\mathrm{Form}(\Diamond,\Phi)$，则

$$\Gamma\vdash\varphi \quad 当且仅当 \quad \Gamma\Vdash\varphi, \quad \Gamma\neq\varnothing. \tag{9.1.30}$$

特别是当 $\Gamma$ 为空集时有

$$\vdash\varphi \quad 当且仅当 \quad \Vdash\varphi. \tag{9.1.31}$$

**证**　设 $\Gamma$ 非空，由(9.1.29)式知只需证当 $\Gamma\vdash\varphi$ 时有 $\Gamma\Vdash\varphi$. 事实上，由 $\Gamma\vdash\varphi$ 知有 $\psi_1,\cdots,\psi_n\in\Gamma$，使 $\vdash\psi_1\wedge\cdots\wedge\psi_n\to\varphi$. 由可靠性定理 9.1.30 知 $\Vdash\psi_1\wedge\cdots\wedge\psi_n\to\varphi$. 设 $\boldsymbol{M}=(W,R,V)$ 是任一模型，$w\in W$，则由 $\boldsymbol{M},w\Vdash\Gamma$ 得 $\boldsymbol{M},w\Vdash\psi_1\wedge\cdots\wedge\psi_n$，从而有 $\boldsymbol{M},w\Vdash\varphi$. 由 $\boldsymbol{M}$ 和 $w$ 的任意性和定义 9.1.31iii) 即得 $\Gamma\Vdash\varphi$. 这就证明了(9.1.30)式.

为证明(9.1.31)式，由系统 $\boldsymbol{K}$ 的可靠性定理 9.1.30 知只需证明当 $\Vdash\varphi$ 时有 $\vdash\varphi$. 为此任取 $\boldsymbol{K}$-定理 $\psi$，令 $\Gamma=\{\psi\}$，则 $\Gamma\Vdash\varphi$ 成立，从而由(9.1.30)式得 $\Gamma\vdash\varphi$. 由定义 9.1.31 i) 得 $\vdash\psi\to\varphi$. 再由 $\psi$ 定理(即 $\vdash\psi$ 成立)和 MP 规则即得 $\vdash\varphi$.

### 9.1.5　模态逻辑系统 *S4*

设 $\boldsymbol{M}=(W,R,V)$ 是一个基本模型，则 $R$ 是 $W$ 的任意二元关系. 如果对 $R$ 作适当的限制，就得出不同的模态逻辑的语义理论和相应的语构理论，当要求 $R$ 具有反身性和传递性时就得出模态逻辑系统 *S4*. 回忆定义 9.1.16，在那里取 $\mathscr{F}$ 为

$$\mathscr{F}4=\left\{F=(W,R)\,\middle|\,R\text{ 是 }W\text{ 上的自反和传递的二元关系}\right\}, \tag{9.1.32}$$

即 $\mathscr{F}4$ 由全部满足自反性和传递性的基本架构组成，则相应的有效公式的集合将扩大. 比如，由(9.1.14)式描述的公式 $\Diamond\Diamond p\to\Diamond p$ 就是在类 $\mathscr{F}4$ 中有效的公式，但它不是一般意义下由定义 9.1.13 所描述的有效公式. 容易验证公式 $p\to\Diamond p$ 也是在类 $\mathscr{F}4$ 中有效的公式. 请读者自行验证以上两个公式分别反映了二元关系 $R$ 的传递性和自反性.

**定义 9.1.43**　设 $F=(W,R)\in\mathscr{F}4$，$\boldsymbol{M}=(F,V)=(W,R,V)$ 是基本模型，$w\in W$，$\varphi\in\mathrm{Form}(\Diamond,\Phi)$. $\varphi$ 在 $\boldsymbol{M}$ 中的点 $w$ 处为真，记作 $\boldsymbol{M},w\Vdash\varphi$，可像定义 9.1.7 一样归纳地定义，即

i) $\boldsymbol{M},w\Vdash_{S4}p$　当且仅当　$w\in V(p)$，$p\in\Phi$.

ii) $\boldsymbol{M},w\Vdash_{S4}\bot$　永远不成立.

iii) $\boldsymbol{M},w\Vdash_{S4}\neg\varphi$　当且仅当　$\boldsymbol{M},w\Vdash_{S4}\varphi$ 不成立.

iv) $\boldsymbol{M},w\Vdash_{S4}\varphi\vee\psi$　当且仅当　$\boldsymbol{M},w\Vdash_{S4}\varphi$ 或 $\boldsymbol{M},w\Vdash_{S4}\psi$.

v) $\boldsymbol{M},w\Vdash_{S4}\Diamond\varphi$，　当且仅当　存在 $u\in W$，$Rwu$ 使 $\boldsymbol{M},u\Vdash_{S4}\varphi$.

这时称 $\varphi$ 是 **S4-可满足的**. 一组公式 $\Gamma$ 是 *S4*-可满足的指 $\Gamma$ 中每个公式都统一地在某 $\boldsymbol{M}$ 及 $w\in W$ 处为真. $\varphi$ 在 $\boldsymbol{M}$ 中全局真，记作 $\boldsymbol{M}\Vdash_{S4}\varphi$，是指 $\varphi$ 在 $\boldsymbol{M}$ 中每个点

$w$ 处均为真. 若 $\forall F=(W,R)\in\mathscr{F}4$, $\forall V:\Phi\to\mathscr{P}(W)$ 均有 $\boldsymbol{M}\Vdash_{S4}\varphi$, 这里 $\boldsymbol{M}=(W,R,V)$, 则称 $\varphi$ 是 **S4-有效的**. 显然, 有效公式都是 $S$4-有效的, 比如公理(K)就是这样. 如果仍用(9.1.7)式定义 $V(\varphi)$(将 $\Vdash$ 改为 $\Vdash_{S4}$), 则命题 9.1.10 对 $S4$ 系统的语义理论仍成立, 请读者自行证明.

**定义 9.1.44** 模态逻辑系统 $S4$ 的公理包括全体模态重言式、$\neg\bot$ 以及下面的公理:

(K*) $\Box(\varphi\to\psi)\to(\Box\varphi\to\Box\psi)$.

(4) $\Diamond\Diamond\varphi\to\Diamond\varphi$.

(T) $\varphi\to\Diamond\varphi$.

这里 $\varphi,\psi\in\text{Form}(\Diamond,\Phi)$, $\Box\varphi$ 是 $\neg\Diamond\neg\varphi$ 的简写. 以上三条公理称为**分配公理**、**传递公理**和**自反公理**. 系统 $S4$ 中的推理规则有两条, 即

i) MP 规则.

ii) 推广规则: 由 $\varphi$ 可得 $\Box\varphi$.

可以像定义 9.1.28 一样定义 **S4-证明**, **S4-定理**和两个公式 **S4-可证等价**, 相应的记号也是自明的, 如 $\vdash_{S4}\varphi$ 表示 $\varphi$ 是 $S4$-定理, $\varphi\sim_{S4}\psi$ 表示 $\varphi$ 与 $\psi$ 是 $S4$-可证等价的, 等等.

**例 9.1.45** 试证, 设 $\varphi\in\text{Form}(\Diamond,\Phi)$, 则公理(T)和(4)都是 $S4$-有效的, 即

i) $\Vdash_{S4}\varphi\to\Diamond\varphi$.

ii) $\Vdash_{S4}\Diamond\Diamond\varphi\to\Diamond\varphi$.

**证** i) 任取 $F=(W,R)\in\mathscr{F}4$, 设 $\boldsymbol{M}=(W,R,V)$, $w\in W$. 这里 $V:\Phi\to\mathscr{P}(W)$ 为赋值, 若 $\boldsymbol{M},w\Vdash_{S4}\varphi$, 则因 $R$ 是自反关系, 由 $Rww$ 即得 $M,w\Vdash_{S4}\Diamond\varphi$, 所以 $\boldsymbol{M},w\Vdash_{S4}\varphi\to\Diamond\varphi$. 由 $\boldsymbol{M}$ 和 $w$ 的任意性即得 $\Vdash_{S4}\varphi\to\Diamond\varphi$.

ii) 承上, 设 $\boldsymbol{M},w\Vdash_{S4}\Diamond\Diamond\varphi$, 则存在 $u$, $Rwu$ 使 $\boldsymbol{M},u\Vdash_{S4}\Diamond\varphi$, 存在 $v$, $Ruv$ 使 $\boldsymbol{M},v\Vdash_{S4}\varphi$. 因为 $R$ 是传递关系, 由 $Rwu$ 和 $Ruv$ 得 $Rwv$, 所以 $\boldsymbol{M},w\Vdash_{S4}\Diamond\varphi$. 由 $\boldsymbol{M}$ 和 $w$ 的任意性即得 $\Vdash_{S4}\Diamond\Diamond\varphi\to\Diamond\varphi$.

可像从前一样证明 MP 规则和推广规则都保持 $S4$-有效性, 所以由模态重言式、$\neg\bot$、(K*)、(4)和(T)都是 $S4$-有效公式知所有的 $S4$-定理都是 $S4$-有效的, 即下面的定理成立.

**定理 9.1.46**(系统 $S4$ 的可靠性定理) 系统 $S4$ 中的定理都是 $S4$-有效公式, 即

$$\text{若 }\vdash_{S4}\varphi,\quad\text{则 }\Vdash_{S4}\varphi. \tag{9.1.33}$$

**例 9.1.47** 设 $\varphi\in\text{Form}(\Diamond,\Phi)$, 则

i) $\Vdash_{S4}\Box\varphi\to\varphi$.

ii) $\Vdash_{S4}\Box\varphi\to\Box\Box\varphi$.

iii) $\vdash_{S4}\Box\varphi\to\varphi$.

iv) $\vdash_{S4}\Box\varphi\to\Box\Box\varphi$.

**证**　我们只以 i) 和 iv) 为例进行证明，ii) 和 iii) 的证明作练习留给读者.

i) 任取 $F=(W, R)\in\mathscr{F}4$，任取赋值 $V:\Phi\to\mathscr{P}(W)$，令 $\boldsymbol{M}=(W, R, V)$，$w\in W$. 设 $\boldsymbol{M}, w\Vdash\Box\varphi$，则 $\boldsymbol{M}, w\Vdash\Diamond\neg\varphi$ 不成立. 由 $Rww$ 知 $\boldsymbol{M}, w\Vdash\neg\varphi$ 不成立，所以有 $\boldsymbol{M}, w\Vdash\varphi$. 由 $\boldsymbol{M}$ 和 $w$ 的任意性即得 $\Vdash_{S4}\Box\varphi\to\varphi$.

iv) 注意 $\Box\varphi$ 是 $\neg\Diamond\neg\varphi$ 的简写，并注意 $\neg\neg\psi$ 与 $\psi$ 在系统 $S4$ 中等价，我们有

(1) $\Diamond\Diamond\psi\to\Diamond\psi$.　　　　公理(4)

(2) $\neg\Box\Box\neg\psi\to\neg\Box\neg\psi$　　　　等价代换

(3) $\Box\neg\psi\to\Box\Box\neg\psi$　　　　(2)，(L3)，HS

(4) $\Box\varphi\to\Box\Box\varphi$　　　　令 $\varphi=\neg\psi$.

这就证明了 $\vdash_{S4}\Box\varphi\to\Box\Box\varphi$.

注意，由系统 $S4$ 中的公理(T)和(4)知定义 9.1.37ii) 中定义的关系 $R^*$ 是自反的和传递的(请读者验证). 除此之外，读者可以逐条验证，从命题 9.1.32 到命题 9.1.42 的关于系统 $\boldsymbol{K}$ 的各论断对于系统 $S4$ 都成立，所以我们有如下定理.

**定理 9.1.48**(系统 $S4$ 的强完备性定理)　在系统 $S4$ 中，设 $\Gamma\cup\{\varphi\}\subset\mathrm{Form}(\Diamond, \Phi)$，则

$$\Gamma\vdash_{S4}\varphi\quad\text{当且仅当}\quad\Gamma\Vdash_{S4}\varphi,\quad\Gamma\neq\varnothing.\tag{9.1.34}$$

特别是当 $\Gamma$ 为空集时，有

$$\vdash_{S4}\varphi\quad\text{当且仅当}\quad\Vdash_{S4}\varphi.\tag{9.1.35}$$

### 9.1.6　系统 S4 的拓扑语义

除了基本模型以外，还可以建立关于 $S4$ 系统的拓扑模型. 早在 1944 年，Mckinsey 和 Tarski 就给出了拓扑模型的定义[78].

**定义 9.1.49**　设 $(W, \tau)$ 是一个拓扑空间，$V:\mathrm{Form}(\Diamond, \Phi)\to\mathscr{P}(W)$ 是满足以下条件的映射:

i) $V(p)\subset W$, $p\in\Phi$, $V(\bot)=\varnothing$.

ii) $V(\neg\varphi)=(V(\varphi))'=W-V(\varphi)$.

iii) $V(\varphi\vee\psi)=V(\varphi)\cup V(\psi)$.

iv) $V(\varphi\wedge\psi)=V(\varphi)\cap V(\psi)$.

v) $V(\varphi\to\psi)=V(\neg\varphi\vee\psi)$
$=(V(\varphi))'\cup V(\psi)$
$=(W-V(\varphi))\cup V(\psi)$.

vi) $V(\Box\varphi)=\mathrm{Int}(V(\varphi))$.

vii) $V(\Diamond\varphi)=\mathrm{Cl}(V(\varphi))$.

这时称三元组 $\boldsymbol{M}=(W, \tau, V)$ 为**拓扑模型**. 设 $\varphi\in\mathrm{Form}(\Diamond, \Phi)$，$\varphi$ 叫做在 $\boldsymbol{M}$ 中为

**真**,若 $V(\varphi)=W$. $\varphi$ 叫做**拓扑有效的**,若 $\varphi$ 在每个拓扑模型中都为真,记作 $\Vdash_T\varphi$.

**注 9.1.50** i)上面定义中的 7 个条件并不是相互独立的. 比如,条件 v)可以从条件 ii)和 iii)推出. 条件 vi)可以改为 $V(\neg\Diamond\neg\varphi)=\mathrm{Int}V(\varphi)$,由此可得

$$V(\Diamond\neg\varphi)=W-\mathrm{Int}V(\varphi)=\mathrm{Cl}(W-V(\varphi))=\mathrm{Cl}V(\neg\varphi),$$

用 $\psi$ 表示 $\neg\varphi$ 即得 $V(\Diamond\psi)=\mathrm{Cl}V(\psi)$. 这就是条件 vii). 类似可证从条件 vii)也可推出条件 vi).

ii)请读者注意,拓扑模型和前面讲过的基本模型不同,因为这里没有基本架构,没有 $W$ 上的二元关系 $R$.

iii)拓扑模型和基本模型的又一不同之处在于它在定义拓扑有效性时没有从局部做起,没有定义 $\boldsymbol{M},w\Vdash\varphi$,但这一点可以补救,从拓扑模型入手可以不引入二元关系 $R$ 而给出局部真的定义.

**定义 9.1.51** 设 $\boldsymbol{M}=(W,\tau,V)$ 是拓扑模型,$w\in W$,归纳地定义 $\boldsymbol{M},w\Vdash\varphi$(以下简写为 $w\Vdash\varphi$)如下:

i) $w\Vdash p$ 当且仅当 $w\in V(p)$,$p\in\Phi$,$w\Vdash\bot$ 永不成立.

ii) $w\Vdash\neg\varphi$ 当且仅当 $w\Vdash\varphi$ 不成立.

iii) $w\Vdash\varphi\vee\psi$ 当且仅当 $w\Vdash\varphi$ 或 $w\Vdash\psi$.

iv) $w\Vdash\Box\varphi$ 当且仅当 $w$ 有开邻域 $U$,$\forall u\in U$,$u\Vdash\varphi$.

v) $w\Vdash\Diamond\varphi$ 当且仅当 对 $w$ 的每个开邻域 $U$,存在 $u\in U$,使 $u\Vdash\varphi$.

以上 iv)和 v)是等价的,又 $w\Vdash\varphi\wedge\psi$ 当且仅当 $w\Vdash\varphi$ 且 $w\Vdash\psi$,请读者自行验证.

**注 9.1.52** i)请读者注意,虽然在拓扑模型 $(W,\tau,V)$ 中 $V$ 是定义在全体公式集 $\mathrm{Form}(\Diamond,\Phi)$ 之上的,但在定义 9.1.51 中 $V$ 只出现在条件 i)之中,即只用到 $V$ 在 $\Phi$ 上的限制 $V:\Phi\to\mathscr{P}(W)$. 一个自然的问题就是:如果 $(W,\tau)$ 是一个拓扑空间,$V:\Phi\to\mathscr{P}(W)$ 是映射,根据定义 9.1.51 定义

$$V(\varphi)=\{w\in W\mid w\Vdash\varphi\},\quad \varphi\in\mathrm{Form}(\Diamond,\Phi),\tag{9.1.36}$$

则 $V$ 是否满足定义 9.1.49 中 7 个条件呢? 回答是肯定的. 事实上,以下只需证明条件 vi)和 vii):

$$\begin{aligned}V(\Box\varphi)&=\{w\mid w\Vdash\Box\varphi\}=\{w\mid w\text{ 有开邻域 }U\text{ 使 }\forall u\in U\text{ 均有 }u\Vdash\varphi\}\\&=\{w\mid w\text{ 有开邻域 }U,\ \forall u\in U,\ u\in V(\varphi)\}\\&=\{w\mid w\text{ 是 }V(\varphi)\text{ 的内点}\}=\mathrm{Int}V(\varphi).\end{aligned}$$

$$V(\Diamond\varphi)=\{w\mid w\text{ 的每个开邻域 }U\text{ 都含有点 }u\in V(\varphi)\}$$

$= \mathrm{Cl}V(\varphi)$.

ii)有了局部化的定义 9.1.51，就可以像定义 9.1.31 那样定义一个理论 $\Gamma$ 在拓扑模型中点 $w$ 处可满足(记作 $w \Vdash_T \Gamma$，简称 **$\Gamma$ 拓扑可满足**)以及 **$\Gamma$ 拓扑语义蕴含** $\varphi$(记作 $\Gamma \Vdash_T \varphi$)等概念. 比如，$\Gamma \Vdash_T \varphi$ 指对每个拓扑模型$(W, \tau, V)$和每个点 $w \in W$，如果 $w \Vdash_T \Gamma$，则 $w \Vdash_T \varphi$.

**定理 9.1.53**(系统 $S4$ 的拓扑语义可靠性定理)　系统 $S4$ 中的定理都是拓扑有效公式，即

$$若\ \vdash_{S4}\varphi，则\ \Vdash_T\varphi, \qquad \varphi \in \mathrm{Form}(\Diamond, \Phi).$$

**证**　容易证明 MP 规则和推广规则都保持公式的拓扑有效性，所以以下只需证明模态重言式、$(K^*)$、(4)和(T)都是拓扑有效的. 我们只写出$(K^*)$是拓扑有效公式的证明，其余部分留给读者作为练习.

$$\begin{aligned}
&V(\Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi))\\
&= (W - V(\Box(\varphi \to \psi))) \cup V(\Box\varphi \to \Box\psi)\\
&= (W - \mathrm{Int}(V(\varphi \to \psi))) \cup (W - \mathrm{Int}V(\varphi)) \cup \mathrm{Int}V(\psi)\\
&= (W - \mathrm{Int}(((W - V(\varphi)) \cup V(\psi)) \cap V(\varphi))) \cup \mathrm{Int}V(\psi)\\
&= (W - \mathrm{Int}(V(\varphi) \cap V(\psi))) \cup \mathrm{Int}V(\psi) = W.
\end{aligned}$$

所以$(K^*)$是拓扑有效公式.

可以像证明命题 9.1.32 那样证明下面的命题.

**命题 9.1.54**　系统 $S4$ 具有强拓扑完备性，即

$$若\ \Gamma \Vdash_T \varphi, \quad 则\ \Gamma \vdash_{S4} \varphi \tag{9.1.37}$$

的充分条件是 $S4$ 中每个相容理论都是拓扑可满足的.

**定义 9.1.55**　设$(W^*, \tau^*)$是按如下方式定义的拓扑空间:

$$W^* = \{\Gamma^* \mid \Gamma^* 是\ S4\ 中的极大相容理论\},$$

$$B^* = \{f(\Box\varphi) \mid \varphi \in \mathrm{Form}(\Diamond, \Phi)\}.$$

这里

$$f(\Box\varphi) = \{\Gamma^* \in W^* \mid \Box\varphi \in \Gamma^*\},$$

$\tau^*$ 是以 $B^*$ 为拓扑基生成的拓扑，又 $V^*: \Phi \to \mathscr{P}(W)$ 是映射，$\forall p \in \Phi$，$V^*(p) = \{\Gamma^* \mid p \in \Gamma^*\}$，则$(W^*, \tau^*, V^*)$是一个拓扑模型，叫做**典型拓扑模型**.

**注 9.1.56**　在上面定义中，$B^*$ 确实构成一个拓扑基. 这是因为当取 $\varphi$ 为定理时 $\Box\varphi$ 也是定理，从而 $\Box\varphi \in \Gamma^*$ 对每个极大相容理论都成立，所以 $W^* \in B^*$. 其次，由例 9.1.29 知 $\Box\varphi \wedge \Box\psi$ 与 $\Box(\varphi \wedge \psi)$ 在系统 $\boldsymbol{K}$ 中可证等价，从而也在系统 $S4$ 中可证等价，所以

$$f(\Box\varphi)\cap f(\Box\psi)=\left\{\Gamma^*\in W^*\,\middle|\,\Box\varphi\in\Gamma^*\text{且}\Box\psi\in\Gamma^*\right\}$$
$$=\left\{\Gamma^*\in W^*\,\middle|\,\Box\varphi\wedge\Box\psi\in\Gamma^*\right\}$$
$$=\left\{\Gamma^*\in W^*\,\middle|\,\Box(\varphi\wedge\psi)\in\Gamma^*\right\}$$
$$=f(\Box(\varphi\wedge\psi))\in B^*,$$

即 $B^*$ 关于有限交运算封闭，所以 $B^*$ 是一个拓扑基.

**命题 9.1.57**（拓扑真值引理） 设 $\Gamma^*\in W^*$，$\varphi\in\mathrm{Form}(\Diamond,\Phi)$，则

$$\Gamma^*\Vdash\varphi\quad\text{当且仅当}\quad\varphi\in\Gamma^*.\tag{9.1.38}$$

**证** 按公式 $\varphi$ 的复杂程度进行归纳证明. 如果 $\varphi=p\in\Phi$ 或者 $\varphi=\bot$，则(9.1.38)式显然成立. 假设 $\varphi$ 含有 $k$ 个连接词已成立，现假设 $\varphi$ 有 $k+1$ 个连接词. 关于 $\neg$ 与 $\vee$ 的归纳验证是容易的，以下只证明加运算 $\Box$ 的情形. 设已证(9.1.38)式对公式 $\varphi$ 成立.

设 $\Box\varphi\in\Gamma^*$，即 $\Gamma^*\in f(\Box\varphi)$，可见 $f(\Box\varphi)$ 是点 $\Gamma^*$ 的一个开邻域. 由例 9.1.47 iii)知 $f(\Box\varphi)\subset f(\varphi)$，这里 $f(\varphi)=\left\{\Gamma^*\,\middle|\,\varphi\in\Gamma^*\right\}$. 所以 $\forall\,\Gamma_1^*\in f(\Box\varphi)$ 均有 $\Gamma_1^*\in f(\varphi)$，即 $\varphi\in\Gamma_1^*$. 由归纳假设得 $\Gamma_1^*\Vdash\varphi$，所以由定义 9.1.51 iv)得 $\Gamma^*\Vdash\Box\varphi$.

反过来，设 $\Gamma^*\Vdash\Box\varphi$，则 $\Gamma^*$ 有一个开邻域 $f(\Box\psi)$，$\forall\,\Gamma_1^*\in f(\Box\psi)$ 均有 $\Gamma_1^*\Vdash\varphi$. 由归纳假设得 $\varphi\in\Gamma_1^*$，所以 $f(\Box\psi)\subset f(\varphi)$. 这时可以证明 $\vdash_{S4}\Box\psi\to\varphi$. 事实上，若不然，则有 $\Gamma\in W^*$，使 $\neg(\Box\psi\to\varphi)\in\Gamma$（为什么?），即 $\Box\psi\wedge\neg\varphi\in\Gamma$，从而由 $\Gamma$ 是极大相容理论知 $\Box\psi$，$\neg\varphi\in\Gamma$. 那么 $\varphi\notin\Gamma$. 但由 $f(\Box\psi)\subset f(\varphi)$ 知当 $\Box\psi\in\Gamma$ 时必有 $\varphi\in\Gamma$. 矛盾！所以 $\vdash_{S4}(\Box\psi\to\varphi)$. 由此运用推广规则得 $\vdash_{S4}\Box(\Box\psi\to\varphi)$. 再由公理($\mathrm{K}^*$)并运用 MP 可得 $\vdash_{S4}\Box\Box\psi\to\Box\varphi$. 又由公理(4)的等价形式，即例 9.1.47 iv)有 $\vdash_{S4}\Box\psi\to\Box\Box\psi$，所以由 HS 规则得 $\vdash_{S4}\Box\psi\to\Box\varphi$. 那么 $f(\Box\psi)\subset f(\Box\varphi)$（为什么?），所以由 $\Gamma^*\in f(\Box\psi)$ 得 $\Gamma^*\in f(\Box\varphi)$，从而有 $\Box\varphi\in\Gamma^*$.

**定理 9.1.58**（系统 $S4$ 的拓扑强完备性定理） 设 $\varphi\in\mathrm{Form}(\Diamond,\Phi)$，$\Gamma\subset\mathrm{Form}(\Diamond,\Phi)$，

$$\text{若}\ \Gamma\Vdash_T\varphi,\quad\text{则}\ \Gamma\vdash_{S4}\varphi.\tag{9.1.39}$$

**证** 由命题 9.1.54 知只需证明在系统 $S4$ 中每个相容理论都是拓扑可满足的. 事实上，设 $\Sigma$ 是一个相容理论，则 $\Sigma$ 可扩张为一个极大相容理论 $\Gamma^*$. 考虑典型拓扑模型. 设 $\varphi\in\Sigma$，则 $\varphi\in\Gamma^*$，由拓扑真值引理得 $\Gamma^*\Vdash\varphi$. 由 $\varphi$ 的任意性得 $\Gamma^*\Vdash\Sigma$. 可见，$\Sigma$ 在典型拓扑模型中的点 $\Gamma^*$ 处被满足.

**注 9.1.59** 上面研究的拓扑模型不同于基本模型，虽然我们在定义 9.1.51 中对拓扑模型做了局部化处理，但并未给出 $W$ 上的二元关系 $R$，所以仍未得出基本模型. 下面给出一种从拓扑模型构建基本模型的方法.

**命题 9.1.60**　设$(W, \tau, V)$是拓扑模型，在 $W$ 上定义二元关系 $R$ 如下：

$$Rwu \quad 当且仅当 \quad w \in \mathrm{Cl}\{u\}, \quad w, u \in W, \tag{9.1.40}$$

则 $R$ 是 $W$ 上的预序，即 $R$ 是自反的和传递的二元关系.

**证**　$R$ 具有自反性是明显的，因为 $w \in \mathrm{Cl}\{w\}$ 恒成立. 现在设 $Rwu$ 且 $Ruv$，则 $w \in \mathrm{Cl}\{u\}$，$u \in \mathrm{Cl}\{v\}$，从而 $\mathrm{Cl}\{u\} \subset \mathrm{Cl}(\mathrm{Cl}\{v\}) = \mathrm{Cl}\{v\}$. 由此得 $w \in \mathrm{Cl}\{v\}$，即 $Rwv$，所以 $R$ 具有传递性.

如果我们把由(9.1.40)式定义的 $R$ 记为 $R(\tau)$，并把 $V$ 限制在 $\Phi$ 上考虑，则由一个拓扑模型$(W, \tau, V)$可得出一个基本模型$(W, R(\tau), V)$，且其中 $R(\tau)$具有自反性和传递性. 反过来，假定我们先有一个基本模型$(W, R, V)$，那么是否可以由此出发导出一个拓扑模型呢？回答是肯定的，因为局部映射 $V: \Phi \to \mathscr{P}(W)$容易通过(9.1.7)式而全局化，同时从二元关系 $R$ 出发可以在 $W$ 上导出一个拓扑. 事实上，我们有如下的命题.

**命题 9.1.61**　设$(W, R, V)$是基本模型，$A \subset W$. 称 $A$ 为 $R$-封闭集，若 $A$ 在含有点 $w$ 时也含有 $w$ 的 $R$-亲戚，即若 $w \in A$ 且 $Rwu$，则 $u \in A$. 令

$$\tau = \left\{ A \subset W \middle| A \text{ 是 } R\text{-封闭集} \right\}, \tag{9.1.41}$$

则 $\tau$ 是 $W$ 上的拓扑，且此拓扑对任意交运算封闭.

**证**　i) $\varnothing$和 $W$ 显然是 $R$-封闭集，所以$\varnothing$，$W \in \tau$.

ii) 设 $A_i \in \tau (i \in I)$，$A = \cap \left\{ A_i \middle| i \in I \right\}$. 设 $w \in A$ 且 $Rwu$，则因 $\forall i \in I$，均有 $w \in A_i$ 且 $A_i$ 是 $R$-封闭集，所以 $u \in A_i$，从而 $u \in A$. 这表明 $A$ 是 $R$-封闭集，从而 $A \in \tau$.

iii) 设 $A_i \in \tau (i \in I)$，$B = \cup \left\{ A_i \middle| i \in I \right\}$. 设 $w \in B$ 且 $Rwu$，则有 $i_0 \in I$ 使 $w \in A_{i_0}$ 且 $Rwu$. 由 $A_{i_0}$为 $R$-封闭集知 $u \in A_{i_0}$，从而 $u \in B$. 这表明 $B$ 是 $R$-封闭集，从而 $B \in \tau$.

以下用 $\tau(R)$记由(9.1.41)式定义的拓扑 $\tau$.

**注 9.1.62**　i) 拓扑 $\tau(R)$具有对任意交封闭的特性，称这种拓扑为 Alexandrov 拓扑. 设$(W, \tau)$是 Alexandrov 拓扑空间，则 $\forall w \in W$，$w$ 有一个最小的开邻域，即全部包含 $w$ 的开集的交.

ii) 设$(W, \tau, V)$是一个拓扑模型，这里 $\tau$ 自然不必是 Alexandrov 拓扑. 按命题 9.1.60，从 $\tau$ 可以导出 $W$ 上的一个二元关系 $R(\tau)$，且 $R(\tau)$是自反的和传递的. 再由命题 9.1.61，从 $R(\tau)$出发又可根据(9.1.41)式导出一个拓扑 $\tau(R(\tau))$. 值得注意的是，$\tau(R(\tau))$是 Alexandrov 拓扑，而最初的拓扑 $\tau$ 则不必是 Alexandrov 拓扑，所以 $\tau(R(\tau)) = \tau$ 不必成立. 一个自然的问题是，在什么条件下 $\tau(R(\tau)) = \tau$ 成立？下面的命题回答了这个问题.

**命题 9.1.63**　设$(W, \tau)$是 Alexandrov 拓扑空间，则

$$\tau(R(\tau)) = \tau. \tag{9.1.42}$$

**证** 设$A\in\tau$，则$A$是$R(\tau)$-封闭集. 事实上，设$w\in A$，$R(\tau)wu$，则由$R(\tau)$的定义(9.1.40)式知$w\in \mathrm{Cl}\{u\}$，那么每个包含$w$的$\tau$-开集都包含$u$，所以$u\in A$. 所以$A$确为$R(\tau)$-封闭集，即$A\in\tau(R(\tau))$. 这证明了$\tau\subset\tau(R(\tau))$，即$\tau$比$\tau(R(\tau))$粗.

反过来，设$A\in\tau(R(\tau))$，即$A$为$R(\tau)$-封闭集，只需证明$A$是$\tau$-开集，或$B=W-A$是$\tau$-闭集，也即$\mathrm{Cl}B\subset B$. 事实上，若不然，则有$w\in \mathrm{Cl}B-B$. 这时$w\in A$，因为$\tau$是 Alexandrov 拓扑，$w$有一最小开邻域$U(w)$. 由$w\in\mathrm{Cl}B$知有$u\in B\cap U(w)$. 这表明，$w\in\mathrm{Cl}\{u\}$(为什么?)，那么$R(\tau)wu$成立. 再由$A$为$R(\tau)$-封闭集得$u\in A$. 这与$u\in B$相矛盾！这就证明了$A$是$\tau$-开集，从而$\tau(R(\tau))\subset\tau$. 所以(9.1.42)式成立.

以上是从 Alexandrov 拓扑出发，通过

$$\text{拓扑 }\tau\text{—— 二元关系 }R(\tau)\text{—— 拓扑 }\tau(R(\tau))=\tau$$

的步骤而完成了一个还原性循环. 以下证明，如果$R$是$W$上的预序，即如果$R$是$W$上的自反的和传递的二元关系，则有另一个还原性循环：

$$\text{二元关系 }R\text{—— 拓扑 }\tau(R)\text{—— 二元关系 }R(\tau(R))=R.$$

确切地说，我们有如下的命题.

**命题 9.1.64** 设$R$是$W$上的自反的和传递的二元关系，则

$$R(\tau(R))=R. \tag{9.1.43}$$

**证** 设$R$是$W$上的自反的传递的二元关系，令

$$U(w)=\{v\in W\mid Rwv\},\quad w\in W, \tag{9.1.44}$$

则由$R$具有自反性知$w\in U(w)$. 由$R$具有传递性知$U(w)$是$R$-封闭集，所以$U(w)$是拓扑空间$(W,\tau(R))$中包含$w$的开集，从而是包含$w$的最小开邻域(为什么最小?)所以有

$$
\begin{aligned}
Rwu\quad &\text{当且仅当}\quad u\in U(w) &&(\text{在拓扑空间}(W,\tau(R))\text{中})\\
&\text{当且仅当}\quad w\in\mathrm{Cl}\{u\} &&(\text{由 }U(w)\text{ 的最小性})\\
&\text{当且仅当}\quad R(\tau(R))wu &&(\text{由(9.1.40)式})
\end{aligned}
$$

这就证明了$R(\tau(R))=R$.

**注 9.1.65** i)设$R$是$W$上的预序，则可称$(W,R)$为一个 Kripke 架构(见文献[79]). 由命题 9.1.63 和命题 9.1.64 看出，在一定意义下，Kripke 架构和 Alexandrov 拓扑空间是同一码事的不同表现形式而已:前者是代数方式的表现而后者是拓扑方式的表现.

ii)前面曾说过，系统 $S4$ 中的公理(4)和(T)分别反映了二元关系$R$的传递性和自反性，即与系统 $S4$ 相应的基本模型$\boldsymbol{M}=(W,R,V)$中的$R$是$W$上的预序关

系. 那么由 i) 所说, 从拓扑语义的角度看, 系统 $S4$ 应当与 Alexandrov 拓扑空间密切相关. 我们有如下的问题.

**问题 9.1.66**　设 $\varphi \in \mathrm{Form}(\Diamond, \Phi)$, 如果 $\varphi$ 在每个 Alexandrov 拓扑模型 $\boldsymbol{M} = (W, \tau, V)$ 中都为真, 问 $\vdash_{S4}\varphi$ 是否成立?

### 9.1.7　模态逻辑系统 S5

随着模态逻辑系统中公理的增加, 其证明能力也会增强. 前面已经说过, 公式 $\psi = \Diamond\Diamond p \to \Diamond p$ 在系统 $\boldsymbol{K}$ 中不可证明(因为它不是有效公式), 但 $\psi$ 在 $S4$ 中就成为可以证明的了(因为它就是公理之一). 系统 $S4$ 的证明能力比 $\boldsymbol{K}$ 强许多, 但也有在系统 $S4$ 中不能证明的公式, 比如, 令

$$\varphi = \Diamond p \to \Box\Diamond p, \quad p \in \Phi, \tag{9.1.45}$$

则 $\varphi$ 不是 $S4$ 中的定理. 事实上, 由系统 $S4$ 的可靠性定理知只需给出一个模型 $\boldsymbol{M} = (W, R, V)$, 其中 $R$ 是 $W$ 上的预序, 使 $\varphi$ 在 $\boldsymbol{M}$ 中不是全局真的即可. 为此令 $W = [0, 1]$, $R$ 为"$\leqslant$", $\Phi = \{p\}$, $V(p) = [0.5, 0.6]$. 取 $w = 0.3$, 则 $0.3 \Vdash \Diamond p$ 成立, 因为存在 $0.5 \geqslant 0.3$, 使 $0.5 \Vdash p$. 又 $0.3 \Vdash \Box\Diamond p$ 不成立, 因为取 $0.7 \geqslant 0.3$, 则 $0.7 \Vdash \Diamond p$ 不成立. 由此可知 $0.3 \Vdash \varphi$ 不成立, 这里 $\varphi$ 由(9.1.45)式定义, 即 $\varphi$ 在模型 $\boldsymbol{M}$ 中的点 0.3 处不真, 自然不在 $\boldsymbol{M}$ 中全局真.

另一方面, 如果 $R$ 是 $W$ 上的等价关系, 则 $\varphi$ 在 $\boldsymbol{M} = (W, R, V)$ 中全局真. 事实上, 任取 $w \in W$, 设 $w \Vdash \Diamond p$, 则有 $u \in [w]$ 使 $u \Vdash p$, 这里 $[w]$ 表示 $w$ 所在的 $R$-等价类. 这时有 $w \Vdash \Box\Diamond p$. 事实上, 任取 $v \in [w]$, 则由 $u \Vdash p$ 以及 $w \in [w] = [v]$ 知 $v \Vdash \Diamond p$. 这表明 $w \Vdash \Box\Diamond p$ 成立. 所以 $w \Vdash \varphi$. 由 $w$ 的任意性即得 $\boldsymbol{M} \Vdash \varphi$. 令

$$\mathscr{F}5 = \left\{F = (W, R) \,\middle|\, R \text{ 是 } W \text{ 上的等价关系}\right\}, \tag{9.1.46}$$

则 $\varphi$ 是类 $\mathscr{F}5$ 中的有效公式. 在系统 $S4$ 的基础上再把 $\varphi$ 的一般形式添加为新公理就得到模态逻辑系统 $S5$.

**定义 9.1.67**　模态逻辑系统 $S5$ 的公理包括全体模态重言式、$\neg\bot$ 以及下面的公理:

(K$^*$) $\Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$.

(4) $\Diamond\Diamond\varphi \to \Diamond\varphi$.

(T) $\varphi \to \Diamond\varphi$.

(5) $\Diamond\varphi \to \Box\Diamond\varphi$.

系统 $S5$ 中的推理规则有两条, 即

i) MP 规则.

ii) 推广规则: 由 $\varphi$ 可得 $\Box\varphi$.

一些术语和符号，如 S5-证明，$\Vdash_{S5}\varphi$，$\varphi\sim_{S5}\psi$ 和 $\Gamma\Vdash_{S5}\varphi$ 等，都是可顾名而思义的，不再一一赘述. 显然，系统 S4 中的定理都是系统 S5 中的定理，若 $\varphi\sim_{S4}\psi$，则 $\varphi\sim_{S5}\psi$.

**例 9.1.68** 试证

i) $\Diamond\Diamond\varphi\sim_{S5}\Diamond\varphi$.

ii) $\Box\Box\varphi\sim_{S5}\Box\varphi$.

iii) $\Box\Diamond\varphi\sim_{S5}\Diamond\varphi$.

iv) $\Diamond\Box\varphi\sim_{S5}\Box\varphi$.

**证** i) 只证 $\Diamond\Diamond\varphi$ 与 $\Diamond\varphi$ 在 S4 系统中就已经是可证等价的了. 事实上，

(1) $\Diamond\Diamond\varphi\to\Diamond\varphi$ 公理(4)

(2) $\psi\to\Diamond\psi$ 公理(T)

(3) $\Diamond\varphi\to\Diamond\Diamond\varphi$ (2)，取 $\psi=\Diamond\varphi$

(4) $\Diamond\Diamond\varphi\sim_{S4}\Diamond\varphi$ (1)，(3)

所以 $\Diamond\Diamond\varphi\sim_{S5}\Diamond\varphi$.

ii) 类似可证，请读者完成其证明.

iii) 如前所述 $\Box\Diamond\varphi$ 与 $\Diamond\varphi$ 在系统 S4 中并不是可证等价的，但它们在系统 S5 中是可证等价的.

(1) $\Diamond\varphi\to\Box\Diamond\varphi$ 公理(5)

(2) $\Box\Diamond\varphi\to\Diamond\varphi$ S4 中的定理(例 9.1.47 iii))

(3) $\Box\Diamond\varphi\sim_{S5}\Diamond\varphi$ (1)，(2)

最后 iv) 也只在系统 S5 中成立，其证明作为练习留给读者.

**注 9.1.69** 以上 i) ~ iv) 表明：在系统 S5 中，一旦一个公式 $\varphi$ 前面有了一个模态连接词，那么你就可以在它前面任意添加模态词 $\Diamond$ 或 $\Box$，且所得公式与原公式可证等价，如

$$\Diamond\varphi\sim_{S5}\Diamond\Diamond\varphi\sim_{S5}\Box\Diamond\Diamond\varphi\sim_{S5}\Box\Box\Diamond\Diamond\varphi$$

等. 反过来，如果一个模态公式前有一连串的模态词，那么可以从前面开始去掉几个模态词，但至少保留最后一个模态词，这样得到的公式与原公式可证等价. 这暗示在系统 S5 中模态公式将会有一种简化形式，我们在定理 9.1.78 中给出这种简化的具体表述.

**注 9.1.70** 在典型模型的定义 9.1.37 ii) 中规定

$$R^*wu \quad 当且仅当 \quad 若\ \varphi\in u，则 \Diamond\varphi\in w. \tag{9.1.47}$$

我们在例 9.1.47 后面已经指出，若公理(T)和公理(4)成立，则上面定义的 $R^*$ 是一个自反的和传递的二元关系. 如果还有公理(5)成立，则可证明 $R^*$ 是一个等价关系. 事实上，为此只需证明 $R^*$ 还具有对称性.

设 $R^*wu$ 成立，这里 $w,u\in W^*$，即 $w$ 和 $u$ 都是极大和谐理论. 为证明 $R^*uw$

成立，由(9.1.47)式知只需证明当 $\varphi\in w$ 时有 $\Diamond\varphi\in u$ 成立. 因为

$$\vdash_{S5}\varphi\rightarrow\Diamond\varphi,\quad \Diamond\varphi\sim_{S5}\Box\Diamond\varphi,$$

所以由 $w$ 是系统 $S5$ 中的极大和谐理论得 $\Box\Diamond\varphi\in w$. 如果 $\Diamond\varphi\in u$ 不成立，则由 $u$ 为极大和谐理论知 $\neg\Diamond\varphi\in u$. 那么由 $R^*wu$ 和(9.1.47)式得 $\Diamond\neg\Diamond\varphi\in w$，从而 $\neg\Diamond\neg\Diamond\varphi\notin w$，即 $\Box\Diamond\varphi\notin w$，矛盾！所以 $\Diamond\varphi\in u$，从而证明了 $R^*uw$，即 $R^*$ 具有对称性.

既然对系统 $S5$ 而言，典型模型中的基本架构 $(W^*, R^*)\in\mathscr{F}5$，所以可以像证明系统 $\boldsymbol{K}$ 和系统 $S4$ 的强完备性那样证明下面的定理.

**定理 9.1.71**（系统 $S5$ 的强完备性定理）　在系统 $S5$ 中，设 $\Gamma\cup\{\varphi\}\subset \mathrm{Form}(\Diamond, \Phi)$，则

$$\Gamma\vdash_{S5}\varphi \quad \text{当且仅当} \quad \Gamma\Vdash_{S5}\varphi. \tag{9.1.48}$$

特别是当 $\Gamma$ 为空集时有

$$\vdash_{S5}\varphi \quad \text{当且仅当} \quad \Vdash_{S5}\varphi. \tag{9.1.49}$$

让我们比较一下公式 $\alpha$ 和 $\beta$：

$$\alpha=\Box(\neg p\wedge\Diamond(q\vee\Box r)), \tag{9.1.50}$$

$$\beta=\Box\neg p\wedge(\Diamond q\vee\Box r). \tag{9.1.51}$$

我们看到在 $\alpha$ 和 $\beta$ 中都各含有三个模态连接词，但 $\beta$ 要比 $\alpha$ 简单. 比如，对原子公式 $r$ 而言，在 $\alpha$ 中它要经过三次模态词的作用，依次为 $\Box$，$\Diamond$ 和 $\Box$. 但在 $\beta$ 中 $r$ 却只经过一个模态词的作用，即 $\Box$. 可见，公式 $\alpha$ 比公式 $\beta$ 复杂. 公式复杂程度的定义如下.

**定义 9.1.72**　归纳地定义映射 $\deg:\mathrm{Form}(\Diamond, \Phi)\rightarrow\boldsymbol{N}$ 如下：

$$\deg(p)=0,\quad p\in\Phi.$$

$$\deg(\bot)=0.$$

$$\deg(\neg\varphi)=\deg(\varphi).$$

$$\deg(\varphi\vee\psi)=\max\{\deg(\varphi), \deg(\psi)\}.$$

$$\deg(\Diamond\varphi)=1+\deg(\varphi).$$

称 $\deg(\varphi)$ 为模态公式 $\varphi$ 的**深度**. 若 $\deg(\varphi)=k$，则称 $\varphi$ 为 $k$ **度公式**. 当 $\deg(\varphi)>\deg(\psi)$ 时，称模态公式 $\varphi$ 比 $\psi$ **复杂**.

**例 9.1.73**　i) 设 $\alpha$, $\beta$ 分别由(9.1.50)式和(9.1.51)式定义，则 $\deg(\alpha)=3$，$\deg(\beta)=1$，所以 $\alpha$ 比 $\beta$ 复杂.

ii) 请读者验证 $\deg(\Box\varphi)=\deg(\Diamond\varphi)=1+\deg(\varphi)$.

系统 $S5$ 有一个优点，即任一模态公式都可证等价于一个深度至多为 1 的模态公式，或简单地说，任一模态公式都可化为深度 $\leqslant 1$ 的公式. 为证明这一点，我们需要一个如下引理.

**引理 9.1.74**　设 $\varphi, \psi\in\mathrm{Form}(\Diamond, \Phi)$，则

i) $\Box(\varphi\vee\Box\psi)\sim_{S5}\Box\varphi\vee\Box\psi$.

ii) $\Diamond(\varphi\wedge\Diamond\psi)\sim_{S5}\Diamond\varphi\wedge\Diamond\psi$.

iii) $\Box(\varphi\wedge\psi)\sim_{S5}\Box\varphi\wedge\Box\psi$.

iv) $\Diamond(\varphi\vee\psi)\sim_{S5}\Diamond\varphi\vee\Diamond\psi$.

**证** 由例 9.1.29 知 iii) 中的等价性在系统 $\boldsymbol{K}$ 中已成立，自然在系统 $S5$ 中也成立. 而 iv) 可以通过 De Morgan 律而转换成 iii)，ii) 的证明也可通过 De Morgan 律转化为 i)，所以以下只证明 i)，其余部分留给读者作为练习.

| | |
|---|---|
| (1) $\Box(\neg\chi\to\varphi)\to(\Box\neg\chi\to\Box\varphi)$ | 公理($\mathrm{K}^*$) |
| (2) $\Box(\varphi\vee\chi)\to(\Box\varphi\vee\Diamond\chi)$ | (1)，简写，交换 $\vee$ 顺序 |
| (3) $\Box(\varphi\vee\Box\psi)\to(\Box\varphi\vee\Box\psi)$ | (2)，取 $\chi$ 为 $\Box\psi$ |
| (4) $\Box(\varphi\to\varphi\vee\chi)$ | 定理，推广规则 |
| (5) $\Box\varphi\to\Box(\varphi\vee\chi)$ | (4)，($\mathrm{K}^*$)，MP |
| (6) $\Box(\chi\to\varphi\vee\chi)$ | 定理，推广规则 |
| (7) $\Box\chi\to\Box(\varphi\vee\chi)$ | (6)，($\mathrm{K}^*$)，MP |
| (8) $\Box\varphi\vee\Box\chi\to\Box(\varphi\vee\chi)$ | (5)，(7)，命题逻辑定理 |
| (9) $\Box\varphi\vee\Box\Box\psi\to\Box(\varphi\vee\Box\psi)$ | (8)，取 $\chi$ 为 $\Box\psi$ |
| (10) $\Box\varphi\vee\Box\psi\to\Box(\varphi\vee\Box\psi)$ | (9)，等价代换 |
| (11) $\Box(\varphi\vee\Box\psi)\sim_{S5}\Box\varphi\vee\Box\psi$ | (3)，(10)，简写 |

**定义 9.1.75** i) 设 $\xi=\Box\varphi$ 或 $\xi=\Diamond\psi$. (9.1.52)

这里 $\varphi$ 和 $\psi$ 为不含模态连接词的公式，则称 $\xi$ 为**最简 1 度模态公式**. 称有限多个最简 1 度模态公式或 0 度公式的合取为**简单合取式**，称有限多个最简 1 度模态公式或 0 度公式的析取为**简单析取式**.

ii) 设

$$\alpha=(\xi_{11}\wedge\cdots\wedge\xi_{1i(1)})\vee\cdots\vee(\xi_{n1}\wedge\cdots\wedge\xi_{ni(n)}). \tag{9.1.53}$$

这里 $\xi_{kj}$ 为最简 1 度模态公式或为 0 度模态公式($k=1,\cdots,n;j=1,\cdots,i(k)$)，则称 $\alpha$ 为**模态析取范式**或 *MDNF*. 又若将(9.1.53)式中的 $\wedge$ 与 $\vee$ 互换，则所得公式称为**模态合取范式**，或 *MCNF*.

显然，*MDNF* 和 *MCNF* 都是深度至多为 1 的模态公式.

比如，由(9.1.51)式定义的 $\beta$ 就是一个 *MCNF*，但由(9.1.50)式定义的 $\alpha$ 既不是 *MCNF*，也不是 *MDNF*，因为它的深度等于 3.

**引理 9.1.76** 在系统 $S5$ 中，设 $\varphi$ 是简单合取式，则 $\Diamond\varphi$ 也可证等价于一个简单合取式.

**证** 设 $\varphi$ 是简单合取式，则 $\varphi=\xi_1\wedge\cdots\wedge\xi_n$. 这里 $\xi_i(1\leqslant i\leqslant n)$ 是最简 1 度模态公式或 0 度公式. 如果各 $\xi_i(1\leqslant i\leqslant n)$ 全是 0 度公式，则 $\varphi$ 自身也是 0 度公式，

从而$\Diamond\varphi$是最简 1 度模态公式，当然是简单合取式. 所以可设有 $i\leqslant n$ 使 $\xi_i$ 为最简 1 度模态公式，对这种 $\xi_i$，由注 9.1.69 知可在其前面增添一个模态词$\Diamond$. 由于$\wedge$在可证等价的意义下是可交换的，所以为方便计，可设 $\varphi$ 的前 $k(k<n)$ 个合取项为 0 度公式. 那么由引理 9.1.74ii) 知$\Diamond\varphi\sim\Diamond(\xi_1\wedge\cdots\wedge\xi_k)\wedge\Diamond\xi_{k+1}\wedge\cdots\wedge\Diamond\xi_n$. 上式右端的合取项中可能有两个模态词接连排列在前方，再由注 9.1.69 知可只保留其中的第二个模态词，最终得到$\Diamond\varphi=\eta_1\wedge\cdots\wedge\eta_{n-k+1}$. 这里 $\eta_i$ 是最简 1 度模态公式，所以$\Diamond\varphi$是简单合取式.

**例 9.1.77** 设 $\varphi=p\wedge\Box q\wedge\Box r\quad(p,q,r\in\Phi)$，则 $\varphi$ 是简单合取式. 这时由引理 9.1.74 ii) 得

$$\begin{aligned}\Diamond\varphi&\sim\Diamond(p\wedge\Box q\wedge\Diamond\Box r)\\&\sim\Diamond(p\wedge\Box q)\wedge\Diamond\Box r\\&\sim\Diamond(p\wedge\Diamond\Box q)\wedge\Box r\\&\sim\Diamond p\wedge\Diamond\Box q\wedge\Box r\\&\sim\Diamond p\wedge\Box q\wedge\Box r.\end{aligned}$$

所以$\Diamond\varphi$可证等价于一个简单合取式.

请读者证明，在系统 $S5$ 中，如果 $\varphi$ 是一个简单析取式，则$\Box\varphi$可证等价于一个简单析取式.

以下当 $\varphi\sim_{S5}\psi$ 时称 $\varphi$ 可化为 $\psi$，且为书写简便，我们不区分可证等价的公式.

**定理 9.1.78** 在系统 $S5$ 中，每个模态公式都可化为模态析取范式，也都可化为模态合取范式.

**证** 设 $\varphi\in\mathrm{Form}(\Diamond,\Phi)$. 以下按 $\varphi$ 的复杂程度归纳地证明 $\varphi$ 可化为 *MDNF*. 讨论中关于 $\varphi$ 的复杂程度只用到 $p$，$\bot$，$\neg$，$\vee$ 和$\Diamond$，不用$\wedge$、$\to$与$\Box$.

i) 设 $\varphi=p$ 或 $\varphi=\bot\ (p\in\Phi)$，则 $\varphi$ 可证等价于一个 *MDNF*.

ii) 设 $\varphi$ 可化为 *MDNF*，设

$$\varphi\sim\bigvee_{k=1}^{n}\bigwedge_{j=1}^{i(k)}\xi_{kj}.$$

这里 $\xi_{kj}$ 为最简 1 度模态公式或 0 度公式，则由 De Morgan 律得

$$\neg\varphi\sim\bigwedge_{k=1}^{n}\bigvee_{j=1}^{i(k)}\neg\xi_{kj}=\bigwedge_{k=1}^{n}\bigvee_{j=1}^{i(k)}\eta_{kj}.\tag{9.1.54}$$

这里当 $\xi_{kj}=\Box\beta$ 时 $\eta_{kj}=\Diamond\neg\beta$；当 $\xi_{kj}=\Diamond\beta$ 时，$\eta_{kj}=\Box\neg\beta$；当 $\deg(\xi_{kj})=0$ 时，$\eta_{kj}=\neg\xi_{kj}$. 因为$\wedge$运算关于$\vee$是分配的，由 (9.1.54) 式得

$$\neg\varphi\sim\bigvee\left\{\eta_{1f(1)}\wedge\cdots\wedge\eta_{nf(n)}\,\middle|\,f\in\{1,\cdots,i(1)\}\times\cdots\times\{1,\cdots,i(n)\}\right\},$$

所以$\neg\varphi$ 仍为 *MDNF*.

iii) 设 $\varphi=\varphi_1\vee\varphi_2$，$\varphi_1$ 与 $\varphi_2$ 都可化为 *MDNF*，则 $\varphi$ 显然也可化为 *MDNF*.

iv) 设 $\varphi=\Diamond\psi$，$\psi$ 可化为 *MDNF*，设

$$\psi = \bigvee_{k=1}^{n} \bigwedge_{j=1}^{i(k)} \xi_{kj},$$

则由引理9.1.74iv)得

$$\diamond\psi = \bigvee_{k=1}^{n} \diamond(\bigwedge_{j=1}^{i(k)} \xi_{kj}).$$

上式中$\forall k \leqslant n$，$\bigwedge_{j=1}^{i(k)} \xi_{kj}$是简单合取式，由引理9.1.76知$\diamond\left(\bigwedge_{j=1}^{i(k)} \xi_{kj}\right)$可化为一个简单合取式$\bigwedge_{j=1}^{i(k)} \eta_{kj}$. 那么

$$\diamond\psi = \bigvee_{k=1}^{n} \bigwedge_{j=1}^{i(k)} \eta_{kj}.$$

所以$\diamond\psi$仍可化为*MDNF*.

请读者证明在系统*S*5中每个模态公式都可化为*MCNF*.

**例9.1.79** 在系统*S*5中有

$$\square(p \rightarrow \square p) \sim_{S5} \square p \vee \square \neg p. \tag{9.1.55}$$

**证** 由引理9.1.74 i)得

$$\square(p \rightarrow \square p) \sim_{S5} \square(\neg p \vee \square p) \sim_{S5} \square \neg p \vee \square\square p.$$

再由例9.1.68即得(9.1.55)式.

关于模态逻辑的进一步论述可见文献[77]，还可以见文献[80].

## 9.2 知 识 推 理

知识一词是不容易精确描述的，但可以把知识进行分解而找出构成知识的一个个简单命题来. 比如，说某人很有天文学知识，那么他知道地球围绕太阳公转的周期约为365.24天，他知道冥王星不再算是太阳系的大行星之一，他知道有种天体叫双星，他知道在银河系之外还有河外星云等. 可见，知识可以用一族简单命题(及其复合命题)组成. 在本节中讲知识推理时我们就假定有一个简单命题的集合$\Phi$，其中有原子命题$p$，$q$，$r$，…，用它们来表示各知识单元.

考虑下面的句子：

王林知道如果星期三晚上李涛不来上自习，那他一定是去语音实验室练习英语去了.

王林知道如果星期六晚上李涛不来上自习，那他一定是去看电影了，或者是回家了.

以上两个句子中王林知道的事自然算是王林的知识. 这里值得注意的是，在不同情况下王林的知识内容不同. 以下将要看到，区分不同情况下的知识是知识推理理论的一个特点. 在知识推理中常用$S = \{s, t, \cdots\}$表示全体可能情况(possible state)之集($S$中的元也叫可能状态或可能世界). $\Phi$中的一个命题$p$是否成立，要看是在情况$s$还是在情况$t$下. 比如，用$s$表示“星期三晚上李涛不来上自习”，用

$t$ 表示"星期六晚上李涛不来上自习"，用 $p$ 表示"李涛去练习英语了"，用 $q$ 表示"李涛回家了"，分别用 $\pi(s)$ 和 $\pi(t)$ 表示对命题真假的判定函数，则 $\pi(s)(p)=$ 真，$\pi(t)(p)=$ 假，$\pi(s)(q)=$ 假，但 $\pi(t)(q)$ 尚不能确定.

进一步，请注意以上的讨论是针对王林这个主体而言的，如果换一个人，那么在情况 $s$ 下李洁是不是知道命题 $p$ 呢？在情况 $t$ 下刘蕙是不是知道命题 $q$ 呢？这些都不得而知. 知识推理理论的又一特点是要区分当事人(agent)，一般设有有限个当事人，分别简单地用 1，2，…，$n$ 表示. 设 $\varphi$ 是一个命题，用 $K_i\varphi$ 表示第 $i$ 个当事人知道 $\varphi$.

再进一步，在知识推理理论中，每个当事人 $i$ 都有一个情况集 $S$ 上的二元关系 $R_i$，当 $(s, t)\in R_i$ 时当事人 $i$ 就认为在情况 $s$ 下情况 $t$ 可能发生. 注意，这时另一个当事人 $j$ 未必认为 $t$ 可能发生，因为 $(s, t)\in R_j$ 未必成立.

综上所述可见，在知识推理理论中要区分不同情况、区分不同当事人并且要考虑针对各当事人而言不同情况之间的关系，所以初看起来知识推理理论要比 9.1 节所讲的模态逻辑理论复杂许多. 另一方面，在下面将看到，知识推理理论又是与模态逻辑理论密切相关的，并且可看成是基本模态逻辑理论的一种推广，同时也可以纳入某种 $\tau$ 型模态逻辑理论中(见注 9.2.14). 为了进一步说明知识推理的实际背景，我们从一个著名的例子，即泥孩难题(muddy children puzzle)讲起. 关于知识推理的系统表述见文献[81].

### 9.2.1　泥孩难题

(1) *什么是泥孩难题*

人常说："话说三遍淡如水". 其实不一定如此. 请看下面的例子.

一位父亲向一群在地上玩耍的孩子们说："你们有人的脑门上有泥了". 为了确定起见，我们假定有 7 个孩子，编号分别为 1，2，…，7，其中 4 号、5 号和 6 号三个孩子脑门上有泥，并且假定：

i) 每个孩子都看不见自己的脑门上有没有泥；但可以看见别的孩子脑门上有没有泥.

ii) 孩子们都说真话.

iii) 孩子们都很聪明，都有健全的推理能力.

现在父亲第一次发问："知道自己脑门上有泥的孩子请举手". 结果无人举手. 父亲又第二次发问，问题同上，仍然没有人举手. 父亲又重复地第三次发问："知道自己脑门上有泥的孩子请举手". 结果 4 号、5 号和 6 号都举手了，为什么？这就是我们要分析的泥孩难题.

(2) *泥孩难题的解答*

为了便于读者理解，我们先考虑一个简单情形，即只有 6 号一个孩子脑门上

有泥(以下简称“有泥”)的情形. 这时父亲第一次发问后6号就会举手. 为什么呢? 因为父亲已经当众宣布过7个孩子中有人有泥了，6号看见其他孩子都没有泥，那当然是自己有泥了，所以就举了手. 同样，如果有泥的那个孩子是5号而不是6号，则父亲第一次发问后5号就会举手.

现在考虑有两个孩子有泥的情形. 比如，5号和6号有泥，则父亲第一次发问后无人举手(为什么?). 但当父亲第二次发问后5号和6号都会举手. 以5号为例，他想:如果自己没有泥，那就仅剩6号1人有泥了，那么父亲第一次发问后6号就会举手，但6号没举手，可见自己(5号)有泥. 基于同样的道理，6号也就举了手(请读者想一想，这时1号孩子知道不知道自己有没有泥呢?). 总之，如果恰有2个孩子有泥，那么当父亲第二次发问后那2个孩子就会举手.

现在就可以明白当初的问题了，设4号、5号和6号3个孩子有泥，由于父亲问了两次都无人举手，4号就明白自己一定是有泥的，所以就举了手. 同理，5号和6号也举了手. 在这个例子中“话问3遍并不淡如水”，而且非问3遍不可.

依此类推，如果 $n$ 个小孩中有 $k$ 个有泥，则当父亲第 $k$ 次发问后才有人举手，而且举手的就是那有泥的 $k$ 个孩子.

(3) 关于有泥知识的分析

以下称父亲所宣布的事为命题 $p$，即 $p$ = 你们有人的脑门上有泥了. 用7维向量 $(x_1, \cdots, x_7)$ 表示孩子们有泥的情况. 这里 $x_i=1$ 表示第 $i$ 个小孩有泥，$x_j=0$ 表示第 $j$ 个小孩没泥. 设有泥情况为 $t=(0,0,0,1,1,1,0)$，即4号、5号和6号小孩有泥，其余人没泥. 在这种情况下，4号小孩的知识有:

i) $p$;

ii) 5号和6号有泥，1~3号和7号没有泥;

这是明显可以看出来的4号的知识. 但4号的知识远不止这些，4号还有下面的知识

iii) $p_1$ =4号知道5号知道 $p$;

iv) $p_2$ =4号知道5号知道6号知道 $p$;

v) $p_3$ =4号、5号知道6号知道7号知道 $p$.

……

还有，比如

vi) $p_4$ = 如果父亲发问两次都没人举手，则自己有泥.

$p_1 \sim p_3$ 成立是因为父亲当众宣布了 $p$. 但在情况 $t$ 下，即使父亲不宣布 $p$，每个小孩也都可通过观察而获悉命题 $p$. 我们问:在情况 $t$ 下，是否可以取消父亲的宣布? 即如果父亲不当众宣布 $p$，那么他在发问3次之后是否有人举手? 回答是否定的，即如果没有当众宣布的前提，那么不论父亲问多少次也不会有人举手了. 因为这时4号虽然仍有上面列举的 i) ~ iii)各项的知识，但他失去了 iv) ~ vi)各项知识.

事实上，因为4号并不知道自己有泥，所以对4号来讲，他误以为情况 $s=(0, 0, 0, 0, 1, 1, 0)$ 是可能的，这时他站在5号的角度去想，由于5号也不知道自己有泥，所以5号不知道6号知道 $p$(尽管这时6号确实知道 $p$). 由于 $p_2$ 和 $p_3$ 对4号已不再成立，上面(2)中关于泥孩难题的求解链条遭到了破坏. 可见，在情况 $t$ 下尽管人人都知道 $p$，但其力量远不如父亲当众宣布 $p$ 强. 下面我们称这种当众宣布的知识为**公共知识**(common knowledge)，而人人都知道的知识为**全知知识**(every knows kmowledge). 上例表明，不可用全知知识去取代公共知识.

我们再考虑以下各问题.

问题1:如果父亲不是当众宣布 $p$，而是把孩子们一个一个地叫到密室中去宣布 $p$，问在情况 $t=(0, 0, 0, 1, 1, 1, 0)$ 下，父亲发问了3次后有没有人举手?

答:没有人举手，以4号为例，这时**他不知道5号是不是知道 $p$**(即命题 $p_1$ 不成立)，所以原推理链条破裂.

问题2:父亲仍是把孩子们一个一个地叫到密室中去宣布 $p$. 但每个孩子都悄悄地在别的孩子身上安装了窃听器，问在情况 $t$ 下，父亲发问了3次后有没有人举手?

答:没有人举手，以4号为例，这时他不知道5号是不是知道6号知道 $p$，因为他不知道5号是否给6号安装了窃听器，即命题 $p_2$ 不成立，所以原推理链条仍破裂.

由此可见，关于知识的理论是十分微妙的，只有在严格的数学框架下才可以展开正确无误的知识推理理论.

作为练习，请读者分析在情况 $s$ 下，如果父亲不当众宣布 $p$，那么当父亲发问2次之后5号和6号会不会举手? 为什么?

### 9.2.2　知识推理的语言

要展开严格的知识推理理论，就需要精确的语言，也就是形式语言了. 形式语言是符号化的语言. 由以上讨论知在知识推理理论中需要用到以下各符号:

i) 简单命题集 $\Phi$;

ii) 可能情况集 $S$;

iii) 当事人集 $\{1, \cdots, n\}$;

iv) $K_i (i=1, \cdots, n)$;

v) $R_i \subset S\times S (i=1, \cdots, n)$;

vi) $\mathrm{Form}_n\Phi$. 由 $\Phi$ 生成的 $(\neg, \vee, K_1, \cdots, K_n)$ 型自由代数.

设 $\varphi\in\mathrm{Form}_n\Phi$，则称 $\varphi$ 为公式，如 $p$, $\neg K_2(p_1\to K_1 q)$ 和 $K_1\neg K_2K_3p$ 等都是公式，这里 $\varphi\to\psi$ 是 $\neg\varphi\vee\varphi$ 的简写.

又设 $\varphi\in\mathrm{Form}_n\Phi$, $G\subset\{1, \cdots, n\}$. 我们用到的语言中还有

vii) $E_G\varphi$. 表示 $\varphi$ 是 $G$ 中人人都知道的知识;

viii) $C_G\varphi$. 表示 $\varphi$ 是 $G$ 中当事人的公共知识;

ix) $D_G\varphi$. 表示 $\varphi$ 是 $G$ 中当事人的**分布式知识**(distributed knowledge),即 $G$ 中当事人获取的信息合起来时可得出的知识.

**例 9.2.1** 设 $G=\left\{\text{王林, 李蕙}\right\}$, $t$ 表示星期六晚上李涛没有去上自习这一情况. 王林在情况 $t$ 下的知识是:李涛去看电影了,或者是回家了. 李蕙的知识是:李涛告诉他当晚不去看那个已经看过的电影了. 令 $\varphi$ 为:李涛回家了,则 $D_G\varphi$ 成立,即 $\varphi$ 是分布于王林和李蕙中的知识.

**注 9.2.2** 每个当事人 $i$ 都对应一个 $S$ 上的二元关系 $R_i$,当 $(s, t)\in R_i$ 时当事人 $i$ 认为:在情况 $s$ 下,情况 $t$ 是可能的. 比如,在泥孩问题中,关于有没有泥的情况共有 $2^7=128$ 种,在情况 $t=(0,0,0,1,1,1,0)$ 下,4 号小孩认为情况 $t$ 和情况 $s=(0,0,0,0,1,1,0)$ 都是可能的,所以 $(t, t)\in R_4$,$(t, s)\in R_4$. 当然,$R_4$ 中并非只含有这两个情况有序对,如令 $u=(0,1,1,1,1,0,0)$,$v=(0,1,1,0,1,0,0)$,则 $(u, u)$,$(u, v)$,$(v, v)$,$(v, u)$ 都属于 $R_4$.

**例 9.2.3** 仍考虑泥孩问题,以 $t\models\varphi$ 表示在情况 $t$ 下命题 $\varphi$ 成立,令 $t=(0,0,0,1,1,1,0)$,用"泥(i)"表示第 $i$ 个小孩有泥,则

$t\models K_4$ 泥$(5)$,

$t\models K_4K_5$ 泥$(6)$.

又用"举$(m, i)$"表示父亲第 $m$ 次发问后 $i$ 号小孩就举手,则在父亲当众宣布了命题 $p$ 时有

$t\models K_4(\neg$泥$(4)\rightarrow$举$(2,5))$,

$t\models K_4(\neg$举$(2,5)\wedge\neg$举$(2,6)\rightarrow$泥$(4))$.

### 9.2.3 Kripke 知识结构

有了以上的各种准备,现在可以给出 Kripke 知识结构的严格定义.

**定义 9.2.4** **Kripke 知识结构**是一个 $2n+3$ 元组

$$\boldsymbol{M}=(S, \pi, K_1, R_1, \cdots, K_n, R_n, \Phi). \tag{9.2.1}$$

这里 $S$ 是可能情况之集(不必有限),$\Phi$ 是经典命题之集,$K_i$ 是当事人 $i$ 对应的模态词,$R_i(\subset S\times S)$ 是当事人 $i$ 对应的情况集 $S$ 上的二元关系,$\forall s\in S$,$\pi(s):\Phi\rightarrow\left\{\text{True, False}\right\}$ 是映射. 规定

$$(\boldsymbol{M}, s)\models p \quad \text{当且仅当} \quad \pi(s)(p)=\text{True}. \tag{9.2.2}$$

$$(\boldsymbol{M}, s)\models\varphi\vee\psi \quad \text{当且仅当} \quad (\boldsymbol{M}, s)\models\varphi \text{ 或 } (\boldsymbol{M}, s)\models\psi. \tag{9.2.3}$$

$$(\boldsymbol{M}, s)\models\neg\varphi \quad \text{当且仅当} \quad (\boldsymbol{M}, s)\models\varphi \text{ 不成立}. \tag{9.2.4}$$

$$(\boldsymbol{M}, s) \models K_i\varphi \quad \text{当且仅当} \quad \text{当}(s, t) \in R_i \text{时}(\boldsymbol{M}, t) \models \varphi. \qquad (9.2.5)$$

又规定

$$\boldsymbol{M} \models \varphi \quad \text{当且仅当} \quad \forall s \in S, (\boldsymbol{M}, s) \models \varphi. \qquad (9.2.6)$$

当$(\boldsymbol{M}, s) \models \varphi$成立时，称$\varphi$在结构$\boldsymbol{M}$中的情况$s$下可满足；简称$\varphi$**可满足**.

**命题 9.2.5**　设$\varphi, \psi \in \mathrm{Form}_n\Phi$，则

i)若$\boldsymbol{M} \models \varphi$且$\boldsymbol{M} \models \varphi \to \psi$，则$\boldsymbol{M} \models \psi$.

ii)若$\boldsymbol{M} \models \varphi$，则$\boldsymbol{M} \models K_i\varphi (i = 1, \cdots, n)$.

iii)$\boldsymbol{M} \models K_i(\varphi \to \psi) \to (K_i\varphi \to K_i\psi) (i = 1, \cdots, n)$.

**证**　i) $\forall s \in S$，由$\boldsymbol{M} \models \varphi \to \psi$知$(\boldsymbol{M}, s) \models \varphi \to \psi$，即，$(\boldsymbol{M}, s) \models \neg\varphi \vee \psi$. 由(9.2.3)式知$(\boldsymbol{M}, s) \models \neg\varphi$或$(\boldsymbol{M}, s) \models \psi$. 但由$\boldsymbol{M} \models \varphi$得$(\boldsymbol{M}, s) \models \varphi$，所以$(\boldsymbol{M}, s) \models \neg\varphi$不成立，从而$(\boldsymbol{M}, s) \models \psi$. 由$s$的任意性得$\boldsymbol{M} \models \psi$.

ii)为证$\boldsymbol{M} \models K_i\varphi$，只需证$\forall s \in S$，$(\boldsymbol{M}, s) \models K_i\varphi$. 任取$t \in S$，设$(s, t) \in R_i$，则由$\boldsymbol{M} \models \varphi$知$(\boldsymbol{M}, t) \models \varphi$成立，所以$(\boldsymbol{M}, s) \models K_i\varphi$.

iii)由 i)知只需证明$\forall s \in S$，当$(\boldsymbol{M}, s) \models k_i(\varphi \to \psi)$且$(\boldsymbol{M}, s) \models K_i\varphi$时有$(\boldsymbol{M}, s) \models K_i\varphi$. 这是容易验证的，作为练习留给读者.

**命题 9.2.6**　设$\varphi, \psi, \chi \in \mathrm{Form}_n\Phi$，令

$(\mathrm{L1})^* = \varphi \to (\psi \to \varphi)$.

$(\mathrm{L2})^* = (\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$.

$(\mathrm{L3})^* = (\neg\varphi \to \neg\psi) \to (\psi \to \varphi)$,

则

$$\boldsymbol{M} \models (\mathrm{L1})^*, \quad \boldsymbol{M} \models (\mathrm{L2})^*, \quad \boldsymbol{M} \models (\mathrm{L3})^*.$$

**证**　我们只证明$\boldsymbol{M} \models (\mathrm{L2})^*$. 任取$s \in S$，只需证$(\boldsymbol{M}, s) \models (\mathrm{L2})^*$. 为此，不妨设$(\boldsymbol{M}, s) \models \varphi \to (\psi \to \chi)$，$(\boldsymbol{M}, s) \models \varphi \to \psi$且$(\boldsymbol{M}, s) \models \varphi$. 则由(9.2.3)式知$(\boldsymbol{M}, s) \models \psi$，$(\boldsymbol{M}, s) \models \psi \to \chi$. 从而$(\boldsymbol{M}, s) \models \chi$. 由$s$的任意性知$\boldsymbol{M} \models (\mathrm{L2})^*$.

设$\varphi = f(p_1, \cdots, p_m)$是经典命题逻辑中的重言式(即定理)，$\sigma: \Phi \to \mathrm{Form}_n\Phi$是映射，像在定义 9.1.18 中那样，称$\varphi^* = f(\sigma(p_1), \cdots, \sigma(p_m))$为模态重言式，请读者验证下面的推论.

**推论 9.2.7**　设$\varphi \in \mathrm{Form}_n\Phi$，如果$\varphi$是模态重言式，则$\boldsymbol{M} \models \varphi$成立.

**推论 9.2.8**　设$\varphi, \psi \in \mathrm{Form}_n\Phi$，且$\varphi \sim \psi$，则

$$\boldsymbol{M} \models \varphi \quad \text{当且仅当} \quad \boldsymbol{M} \models \psi.$$

这里$\varphi \sim \psi$指$\psi \to \varphi$与$\varphi \to \psi$都是模态重言式.

以下令

$$\mathscr{M}_n = \left\{ \boldsymbol{M} \middle| \boldsymbol{M} \text{是} 2n+3 \text{元 Kripke 知识结构} \right\}.$$

**定义 9.2.9** 设 $\varphi \in \mathrm{Form}_n \Phi$, 如果 $\forall \boldsymbol{M} \in \mathscr{M}_n$ 恒有 $\boldsymbol{M} \models \varphi$, 则称 $\varphi$ 为 $\mathscr{M}_n$-有效公式, 记为$\models \varphi$, 在不致混淆时也简称 $\varphi$ 为**有效公式**.

由命题 9.2.5 和推论 9.2.7 得如下命题.

**命题 9.2.10** 设 $\varphi, \psi \in \mathrm{Form}_n \Phi$,

i) 若 $\varphi$ 和 $\varphi \to \psi$ 都是有效公式, 则 $\psi$ 也是有效公式.

ii) 若 $\varphi$ 是有效公式, 则 $K_i\varphi$ ($i = 1, \cdots, n$)也是有效公式.

iii) $K_i(\varphi \to \psi) \to (K_i\varphi \to K_i\psi)$是有效公式.

iv) 模态重言式是有效公式.

**注 9.2.11** 有效公式不限于模态重言式. 比如, iii)中的公式是有效公式, 它并不是模态重言式.

**定义 9.2.12** 设 $\boldsymbol{K}_n$ 是形式系统, $\boldsymbol{K}_n$ 中的公理包括

i) 模态重言式.

ii) 分配公理:

$$K_i(\varphi \to \psi) \to (K_i\varphi \to K_i\psi) \quad (i = 1, \cdots, n).$$

系统 $\boldsymbol{K}_n$ 中包括两条推理规则, 即

i) 分离规则 MP.

ii) 推广规则: 从 $\varphi$ 可得 $K_i\varphi (i = 1, \cdots, n)$.

又 $\boldsymbol{K}_n$-证明, $\boldsymbol{K}_n$-定理, $\boldsymbol{K}_n$-可证等价, $\Gamma$-结论, $\vdash_{K_n}\varphi$, $\varphi \sim_{K_n} \psi$, $\Gamma \vdash_{K_n} \varphi$ 以及 $\boldsymbol{K}_n$-极大相容理论等可顾其名而得其义, 我们不再细述.

**定理 9.2.13**(系统 $K_n$ 的可靠性定理) 系统 $\boldsymbol{K}_n$ 中的定理都是有效公式, 即

$$\text{若} \vdash_{K_n} \varphi, \text{则} \models \varphi, \quad \varphi \in \mathrm{Form}_n \Phi. \tag{9.2.7}$$

**证** 由命题 9.2.10 的 iii) 和 iv) 知系统 $\boldsymbol{K}_n$ 中的公理都是有效的, 又由命题 9.2.10 的 i) 和 ii) 知 $\boldsymbol{K}_n$ 中的推理规则保持公式的有效性, 所以系统 $\boldsymbol{K}_n$ 是可靠的.

**注 9.2.14** 细心的读者会发现, 在定义 9.2.12 中, 如果取 $n = 1$, 并且用$\Box$去表示 $K_1$, 则系统 $\boldsymbol{K}_1$ 就是基本模态逻辑系统. 不仅如此, 在配套的语义理论方面二者也是一致的. 事实上, 与系统 $\boldsymbol{K}_1$ 相应的是 Kripke 结构 $\boldsymbol{M}_1 = (S, \pi, K_1, R_1)$, 与系统 $\boldsymbol{K}$ 相应的是基本模态结构 $\boldsymbol{M} = (W, R, V)$. 在 $\boldsymbol{M}$ 中把 $W$ 记为 $S$, 并定义

$$\pi(s)(p) = \mathrm{True} \quad \text{当且仅当} \quad s \in V(p), s \in S, p \in \Phi, \tag{9.2.8}$$

则从 $\boldsymbol{M}$ 就得出只含 1 个当事人的 Kripke 结构 $\boldsymbol{M}_1 = (S, \pi, \Box, R)$. 可见, Kripke 知识结构是基本模态结构的推广.

另一方面, 让我们回顾一下定义 9.1.1 和定义 9.1.2, 那里有一个模

态类型 $\tau=(\boldsymbol{D},\rho)$，其中 $\rho:\boldsymbol{D}\to\boldsymbol{N}$ 是映射，$\forall\Delta\in\boldsymbol{D}$，称 $\Delta$ 为模态词，称 $\rho(\Delta)$ 为 $\Delta$ 的元数. 如果令 $\boldsymbol{D}=\{K_1,\cdots,K_n\}$，且 $\rho(K_i)=1(i=1,\cdots,n)$，那么 $\mathrm{Form}(\tau,\Phi)$ 就是本节中的 $\mathrm{Form}_n\Phi$. 由此可以看出，可以把 Kripke 知识结构理论看成是一种特殊的 $\tau$ 型模态逻辑理论. 所以下面关于系统 $\boldsymbol{K}_n$ 的完备性的证明除了要多考虑几个模态词之外和系统 $\boldsymbol{K}$ 的完备性证明在本质上是一样的.

**定理 9.2.15**（系统 $K_n$ 的完备性定理） 系统 $\boldsymbol{K}_n$ 相对于 Kripke 知识结构的类 $\mathscr{M}_n$ 是完备的，即

$$\vdash_{K_n}\varphi \quad 当且仅当 \quad \models\varphi,\quad \varphi\in\mathrm{Form}_n\Phi. \tag{9.2.9}$$

**证** 只需证明当 $\models\varphi$ 时有 $\vdash_{K_n}\varphi$ 成立. 制做一个典型的 Kripke 结构如下：

$$\boldsymbol{M}^*=(S^*,\pi,K_1,R_1,\cdots,K_n,R_n). \tag{9.2.10}$$

这里 $S^*=\{t^*\mid t^*是系统\ \boldsymbol{K}_n\ 中的极大相容理论\}$.

$$\pi(t^*)(p)=\mathrm{True} \quad 当且仅当 \quad p\in t^*,\ p\in\Phi,\ t^*\in S^*. \tag{9.2.11}$$

$(s^*,t^*)\in R_i$ 当且仅当若 $K_i\varphi\in s^*$，则 $\varphi\in t^*$，且 $s^*,t^*\in S^*$，$\varphi\in\mathrm{Form}_n\Phi$，$i=1,\cdots,n$. (9.2.12)

我们先证明下面的论断

$$(\boldsymbol{M}^*,s^*)\models\varphi \quad 当且仅当 \quad \varphi\in s^*,\ \varphi\in\mathrm{Form}_n\Phi,\ s^*\in S^*. \tag{9.2.13}$$

按 $\varphi$ 的复杂程度作归纳证明

i）当 $\varphi=p$ 时，由(9.2.11)式知(9.2.13)式成立.

ii）设 $\varphi=\neg\psi$，(9.2.13)式对 $\psi$ 成立，则由归纳假设知

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{M}^*,s^*)\models\varphi \quad &当且仅当 \quad (\boldsymbol{M}^*,s^*)\models\psi\ 不成立\\ &当且仅当 \quad \psi\notin s^*\\ &当且仅当 \quad \neg\psi\in s^*，即\ \varphi\in s^*.\end{aligned}$$

以上最后一步成立是因为 $s^*$ 是极大相容理论.

iii）设 $\varphi=\varphi_1\vee\varphi_2$，且(9.2.13)式对 $\varphi_1$ 与 $\varphi_2$ 均成立，则由 $s^*$ 为极大相容理论得

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{M}^*,s^*)\models\varphi_1\vee\varphi_2 \quad &当且仅当 \quad (\boldsymbol{M}^*,s^*)\models\varphi_1\ 或(\boldsymbol{M}^*,s^*)\models\varphi_2\\ &当且仅当 \quad \varphi_1\in s^*\ 或\ \varphi_2\in s^*\\ &当且仅当 \quad \varphi_1\vee\varphi_2\in s^*，即\ \varphi\in s^*.\end{aligned}$$

iv）设 $\varphi=K_i\psi$.

如果 $\varphi\in s^*$，即 $K_i\psi\in s^*$，则当 $(s^*,t^*)\in R_i$ 时由(9.2.12)式知 $\psi\in t^*$. 由归纳假设知这等价于 $(\boldsymbol{M}^*,t^*)\models\psi$，所以 $(\boldsymbol{M}^*,s^*)\models K_i\psi$ 成立.

反过来，设 $(\boldsymbol{M}^*,s^*)\models K_i\psi$ 成立，以下证 $K_i\psi\in s^*$. 令

$$s^*/K_i=\{\beta\in\mathrm{Form}_n\Phi\mid K_i\beta\in s^*\}, \tag{9.2.14}$$

则

$$s^*/K_i \subset t^* \quad \text{当且仅当} \quad \text{若 } K_i\beta \in s^*, \text{则 } \beta \in t^*.$$

所以由(9.2.12)式知$(s^*, t^*) \in R_i$ 也可等价地表述如下：

$$(s^*, t^*) \in R_i \quad \text{当且仅当} \quad s^*/K_i \subset t^*. \tag{9.2.15}$$

可以证明$s^*/K_i \cup \{\neg\psi\}$是不相容理论，因为否则它将可以扩充为一个极大相容理论$t^*$，从而由(9.2.15)式知$(s^*, t^*) \in R_i$. 又由$\neg\psi \in t^*$和归纳假设知$(\boldsymbol{M}^*, t^*) \models \neg\psi$，这与$(\boldsymbol{M}^*, s^*) \models K_i\psi$ 相矛盾！所以$s^*/K_i \cup \{\neg\psi\}$不相容，那么有$\beta_1, \cdots, \beta_m \in s^*/K_i$ 使

$$\vdash_{K_n} \neg((\beta_1 \wedge \cdots \wedge \beta_m) \wedge (\neg\psi)),$$

即

$$\vdash_{K_n} \beta_1 \wedge \cdots \wedge \beta_m \to \psi.$$

也即

$$\vdash_{K_n} \beta_1 \to (\beta_2 \to \cdots \to (\beta_m \to \psi) \cdots).$$

由推广规则和分配公理运用 MP 规则可得

$$\vdash_{K_n} K_i\beta_1 \to (K_i\beta_2 \to \cdots \to (K_i\beta_m \to K_i\psi) \cdots).$$

由$s^*$为极大相容理论从而对 MP 运算封闭以及$K_i\beta_1, \cdots, K_i\beta_m \in s^*$ 即得$K_i\psi \in s^*$. 这就证明了(9.2.13)式.

现在设$\models \varphi$. 如果$\vdash_{K_n}\varphi$ 不成立，则$\{\neg\varphi\}$是系统$\boldsymbol{K}_n$ 中的相容理论，从而可以扩充为$\boldsymbol{K}_n$ 中的一个极大相容理论$s^*$. 由$\neg\varphi \in s^*$得$(\boldsymbol{M}^*, s^*) \models \neg\varphi$，这与$\models \varphi$相矛盾！所以$\vdash_{K_n}\varphi$ 成立.

### 9.2.4 全知知识、公共知识和分布式知识

各种知识可以精确地定义如下：

**定义 9.2.16** 设$\boldsymbol{M} = (S, \pi, K_1, R_1, \cdots, K_n, R_n)$是 Kripke 知识结构，$\varphi \in \text{Form}_n\Phi$，$G \subset \{1, \cdots, n\}$，$s \in S$.

i) $\varphi$ 叫做在情况$s$下，$G$中当事人**全知知识**，记作$(\boldsymbol{M}, s) \models E_G\varphi$，若

$$\forall i \in G, (\boldsymbol{M}, s) \models K_i\varphi \text{ 成立}.$$

ii) $\varphi$ 叫做在情况$s$下，$G$中当事人的**公共知识**，记作$(\boldsymbol{M}, s) \models C_G\varphi$，若

$$(\boldsymbol{M}, s) \models E_G{}^k\varphi \quad (k = 1, 2, \cdots). \tag{9.2.16}$$

这里

$$E_G^1\varphi = E_G\varphi, \quad E_G^{k+1}\varphi = E_GE_G^k\varphi \quad (k = 1, 2, \cdots). \tag{9.2.17}$$

iii) $\varphi$ 叫做在情况$s$下，$G$中当事人的**分布式知识**，记作$(\boldsymbol{M}, s) \models D_G\varphi$，若$\forall t \in S$，当$(s, t) \in \bigcap_{i \in G} R_i$ 时，$(\boldsymbol{M}, t) \models \varphi$ 成立.

**例 9.2.17** 考虑泥孩问题，设$n = 7$，则情况集由 128 个 7 维 0－1 向量组成，

设 $t=(0, 0, 0, 1, 1, 1, 0)$，$G=\{4, 5, 6\}$，$p$ 代表命题“有的孩子脑门上有泥了”，但父亲未宣布 $p$. 这时有

i) $(\boldsymbol{M}, t)\models E_G p$ 成立.

ii) $(\boldsymbol{M}, t)\models E_G^2 p$ 成立.

iii) $(\boldsymbol{M}, t)\models E_G^3 p$ 不成立. 因为如 $4\in G$，但小孩 4 不知道小孩 5 是否知道小孩 6 知道 $p$.

又令 $G'=\{1, 2, 3, 7\}$，则有

iv) $(\boldsymbol{M}, t)\models C_{G'}p$. 比如 $1\in G'$，小孩 1 知道小孩 2 知道小孩 3 知道小孩 7 知道 $p$.

**定义 9.2.18**　设 $\boldsymbol{M}=(S, \pi, K_1, R_1, \cdots, K_n, R_n)$ 是 Kripke 知识结构，$G\subset\{1, \cdots, n\}$. $s, t\in S$. 若存在情况 $s_0, s_1, \cdots, s_k\in S$ 使得

$$s_0=s,\ s_k=t \text{ 且} (s_j, s_{j+1})\in R_i \quad (i\in G, j=0, 1, \cdots, k-1),$$

则称情况 $t$ 从情况 **$s$ $G$-$k$ 步可达**. 又 $t$ 叫做从 **$s$ $G$-可达**，若存在 $k\in \boldsymbol{N}$ 使 $t$ 从 $s$ $G$-$k$ 步可达.

**命题 9.2.19**　设 $\boldsymbol{M}=(S, \pi, K_1, R_1, \cdots, K_n, R_n)$ 是 Kripke 知识结构，$G\subset\{1, \cdots, n\}$，$s, t\in S$，$\varphi\in \mathrm{Form}_n\Phi$，则

i) $(\boldsymbol{M}, s)\models E_G^k\varphi$　当且仅当　$t$ 从 $s$ $G$-$k$ 步可达时 $(\boldsymbol{M}, t)\models\varphi$.

ii) $(\boldsymbol{M}, s)\models C_G\varphi$　当且仅当　$t$ 从 $s$ $G$-可达时 $(\boldsymbol{M}, t)\models\varphi$.

**证**　i) 关于 $k$ 归纳证明. 设 $(\boldsymbol{M}, s)\models E_G^1\varphi$，则由定义 9.2.16 i) 知这等价于说 $\forall i\in G$ 若 $(s, t)\in R_i$，则 $(\boldsymbol{M}, t)\models\varphi$. 由定义 9.2.18，这又等价于说，当 $t$ 从 $s$ $G$-1 步可达时有 $(\boldsymbol{M}, t)\models\varphi$. 所以当 $k=1$ 时 i) 成立，设 i) 对某个 $k$ 已成立，则由此归纳假设知

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{M}, s)\models E_G^{k+1}\varphi\quad &\text{当且仅当}\quad (\boldsymbol{M}, s)\models E_G E_G^k\varphi,\\ &\text{当且仅当}\quad t \text{ 从 } s\ G\text{-1 步可达时} (\boldsymbol{M}, t)\models E_G^k\varphi,\\ &\text{当且仅当}\quad t \text{ 从 } s\ G\text{-1 步可达且 } u \text{ 从 } t\ G-k \text{ 步可达时}\\ &\qquad\qquad\quad (\boldsymbol{M}, u)\models\varphi,\\ &\text{当且仅当}\quad u \text{ 从 } s\ G\text{-}(k+1) \text{ 步可达时} (\boldsymbol{M}, u)\models\varphi.\end{aligned}$$

这就完成了对 i) 的归纳证明.

ii) 由已证明的 i) 知

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{M}, s)\models C_G\varphi\quad &\text{当且仅当}\quad (\boldsymbol{M}, s)\models E_G^k\varphi\quad (k=1, 2, \cdots),\\ &\text{当且仅当}\quad t \text{ 从 } s\ G-k \text{ 步可达时} (\boldsymbol{M}, t)\models\varphi\quad (k=1, 2, \cdots),\\ &\text{当且仅当}\quad t \text{ 从 } s\ G-\text{可达时} (\boldsymbol{M}, t)\models\varphi.\end{aligned}$$

所以 ii) 成立.

**命题 9.2.20**　下列公式 i) 和 ii) 都是 $\mathscr{M}_n$ 中有效的公式：

i) $E_G\varphi \leftrightarrow \bigwedge_{i\in G} K_i\varphi$.

ii) $C_G\varphi \leftrightarrow E_G(\varphi \wedge C_G\varphi)$.

又，

iii) 若 $M \models \varphi \to E_G(\varphi \wedge \psi)$，则 $M \models \varphi \to C_G\psi$.

**证** i) 任取 $M \in \mathscr{M}_n$，设 $M=(S, \pi, K_1, R_1, \cdots, K_n, R_n)$，任取 $s \in S$. 只需证明 $(M, s) \models E_G\varphi$ 当且仅当 $(M, s) \models \bigwedge_{i\in G} K_i\varphi$. 而由定义 9.2.16 i)，这显然成立.

ii) 承上，设 $(M, s) \models C_G\varphi$，情况 $u$ 从 $s$ $G$-1 步可达，则由命题 9.2.19 知 $(M, u) \models \varphi$. 再设 $t$ 从 $u$ $G$-可达，则 $t$ 也从 $s$ $G$-可达，所以由 $(M, s) \models C_G\varphi$ 得 $(M, t) \models \varphi$，即当 $t$ 从 $u$ $G$-可达时有 $(M, t) \models \varphi$. 所以由命题 9.2.19 ii) 知 $(M, u) \models C_G\varphi$. 那么 $(M, u) \models \varphi \wedge C_G\varphi$. 因为 $u$ 从 $s$ $G$-1 步可达，所以 $(M, s) \models E_G(\varphi \wedge C_G\varphi)$.

反过来，设 $(M, s) \models E_G(\varphi \wedge C_G\varphi)$，$t$ 从 $s$ $G$-可达，且第一步从 $s$ 到达了 $s'$，则 $(M, s') \models \varphi \wedge C_G\varphi$. 如果 $t=s'$，则 $(M, t) \models \varphi$；如果 $t \neq s'$，则 $t$ 从 $s'$ $G$-可达，从而由 $(M, s') \models C_G\varphi$ 得 $(M, t) \models \varphi$. 总之，只要 $t$ 从 $s$ $G$-可达，就有 $(M, t) \models \varphi$. 所以由命题 9.2.19 ii) 知 $(M, s) \models C_G\varphi$.

iii) 为简便计，以下简称 $G$-$k$ 步可达为 $k$ 步可达. 设 $M \models \varphi \to E_G(\varphi \wedge \psi)$. 任取 $s \in S$. 以下只需证在 $(M, s) \models \varphi$ 的前提下有 $(M,s) \models C_G\psi$ 成立. 设 $t$ 从 $s$ 1 步可达，则由 $(M, s) \models E_G(\varphi \wedge \psi)$ 得 $(M, t) \models \varphi \wedge \psi$，从而 $(M, t) \models \varphi$ 且 $(M, t) \models \psi$. 设 $t$ 从 $s$ $k$ 步可达时已证 $(M, t) \models \varphi$ 及 $(M, t) \models \psi$，且 $u$ 从 $s(k+1)$ 步可达. 设第 $k$ 步到达 $t$，则 $u$ 从 $t$ 1 步可达，所以

1° 由归纳假设有 $(M, t) \models \varphi$，$(M, t) \models \psi$. 由 $M \models \varphi \to E_G(\varphi \wedge \psi)$ 的假设知 $(M, t) \models \varphi \to E_G(\varphi \wedge \psi)$. 再由 $(M, t) \models \varphi$ 的假设知 $(M, t) \models E_G(\varphi \wedge \psi)$.

2° 由 $u$ 从 $t$ 1 步可达得 $(M, u) \models \varphi$，$(M, u) \models \psi$.

综上所述知，当 $u$ 从 $s$ $(k+1)$ 步可达时，仍有 $(M, u) \models \psi$. 所以只要 $t$ 从 $s$ 可达就有 $(M, t) \models \psi$. 那么由命题 9.2.19 ii) 就得到 $(M, s) \models C_G\psi$. 因为 $s$ 是 $S$ 中的任意元，所以 $M \models C_G\psi$. 这就证明了 $M \models \varphi \to C_G\psi$.

以上关于 $E_G\psi$ 与 $C_G\varphi$ 的讨论都是语义式的，并未给出它们纯形式化的刻画，下面我们给出比系统 $K_n$ 含有更多的内容的系统 $K_n^c$.

**定义 9.2.21** 在系统 $K_n$ 的基础上再添加两条公理：

C1. $E_G\varphi \leftrightarrow \bigwedge_{i\in G} K_i\varphi$.

C2. $C_G\varphi \leftrightarrow E_G(\varphi \wedge C_G\varphi)$.

并且再添加一条推理规则

CR1. 从 $\varphi \to E_G(\varphi \wedge \psi)$ 可得 $\varphi \to C_G\psi$.

称这样得到的系统为 $K_n^C$. 相应的公式集化为 $\mathrm{Form}_n^C \Phi$.

可以证明系统 $K_n^C$ 是完备的. 由于公式集已经扩充，$K_n^c$ 完备性的证明比较复杂. 下面我们给出一个既和前面各完备性的证明相似，又只限于考虑有限多个公

式的一个新证法. 先做一些准备工作.

**定义 9.2.22**　设 $\varphi \in \mathrm{Form}_n^C \Phi$. 定义 $\mathrm{Sub}_C(\varphi)$ 和 $\mathrm{Sub}_C^+(\varphi)$ 如下:

$\mathrm{Sub}_C(\varphi)$ 是满足下面条件的最小集合.

i) $\varphi$ 的子公式都属于 $\mathrm{Sub}_C(\varphi)$.

ii) 若 $C_G\psi \in \mathrm{Sub}_C(\varphi)$, 则 $E_G(\psi \wedge C_G\psi) \in \mathrm{Sub}_C(\varphi)$, $\psi \wedge C_G\psi \in \mathrm{Sub}_C(\varphi)$, $K_i(\psi \wedge C_G\psi) \in \mathrm{Sub}_C(\varphi)$, $i \in G$.

iii) 若 $E_G\psi \in \mathrm{Sub}_C(\varphi)$, 则 $K_i\psi \in \mathrm{Sub}_C(\varphi)$, $i \in G$.

$\mathrm{Sub}_C^+(\varphi)$ 由 $\mathrm{Sub}_C(\varphi)$ 及其中每个公式的否定式组成.

**命题 9.2.23**　用 $\mathrm{Con}_C(\varphi)$ 表示系统 $\boldsymbol{K}_n^c$ 中包含于 $\mathrm{Sub}_C^+(\varphi)$ 中且包含 $\varphi$ 的极大相容理论之集, 则当 $s^* \in \mathrm{Con}_C(\varphi)$ 时有

i) 若 $\psi \in \mathrm{Sub}_C^+(\varphi)$ 且 $\boldsymbol{K}_n^c \vdash \psi$, 则 $\psi \in s^*$.

ii) 若 $\psi \in \mathrm{Sub}_C^+(\varphi)$, 则 $\psi$ 与 $\neg\psi$ 恰有一个属于 $s^*$.

iii) 若 $\psi_1$, $\psi_1 \to \psi_2 \in \mathrm{Sub}_C^+(\varphi)$ 且 $\psi_1$, $\psi_1 \to \psi_2 \in s^*$, 则 $\psi_2 \in s^*$.

iv) 若 $\psi_1 \wedge \psi_2 \in \mathrm{Sub}_C^+(\varphi)$ 且 $\psi_1 \wedge \psi_2 \in s^*$, 则 $\psi_1 \in s^*$ 且 $\psi_2 \in s^*$; 反过来, 若 $\psi_1$, $\psi_2 \in \mathrm{Sub}_C^+(\varphi)$ 且 $\psi_1 \in s^*$, $\psi_2 \in s^*$, 则当 $\psi_1 \wedge \psi_2 \in \mathrm{Sub}_C^+(\varphi)$ 时 $\psi_1 \wedge \psi_2 \in s^*$.

v) 若 $\psi_1 \vee \psi_2 \in \mathrm{Sub}_C^+(\varphi)$ 且 $\psi_1 \vee \psi_2 \in s^*$, 则 $\psi_1 \in s^*$ 或 $\psi_2 \in s^*$; 反过来, 设 $\psi_1$, $\psi_2 \in \mathrm{Sub}_C^+(\varphi)$ 且 $\psi_1 \in s^*$ 或 $\psi_2 \in s^*$, 则当 $\psi_1 \vee \psi_2 \in \mathrm{Sub}_C^+(\varphi)$ 时 $\psi_1 \vee \psi_2 \in s^*$.

**证**　首先注意, 设 $\psi \in \mathrm{Sub}_C^+(\varphi)$, 则

$$\text{当 } s^* \vdash_{K_n^c} \psi \text{ 时}, \quad \psi \in s^*. \tag{9.2.18}$$

事实上, 若 $\psi \notin s^*$, 则 $s^* \cup \{\psi\}$ 不相容, 从而有

$$s^* \cup \{\psi\} \vdash_{K_n^c} \psi \wedge \neg\psi.$$

$$s^* \vdash_{K_n^c} \neg\psi. \tag{9.2.19}$$

这与 $s^* \vdash \psi$ 以及 $s^*$ 的相容性相矛盾! 现在证明命题 9.2.23.

i) 设 $\boldsymbol{K}_n^c \vdash \psi$, 则 $s^* \vdash_{K_n^c} \psi$, 所以由(9.2.18)式得 $\psi \in s^*$.

ii) 设 $\psi \notin s^*$, 则 $s^* \cup \{\psi\} \vdash_{K_n^c} \psi \wedge \neg\psi$. 由此可得(9.2.19)式, 所以再由(9.2.18)式即得 $\neg\psi \in s^*$.

iii) 若 $\psi_2 \notin s^*$, 则由 ii) 知 $\neg\psi_2 \in s^*$. 又 $s^* \vdash \neg\psi_2 \to \neg\psi_1$, 所以 $s^* \vdash \neg\psi_1$. 这与 $\psi_1 \in s^*$ 和 $s^*$ 相容相矛盾!

iv) 若 $\psi_1 \wedge \psi_2 \in s^*$, 则 $s^* \vdash_{K_n^c} \psi_1$, $s^* \vdash_{K_n^c} \psi_2$, 所以 $\psi_1 \in s^*$, $\psi_2 \in s^*$. 反过来, 设 $\psi_1 \in s^*$, $\psi_2 \in s^*$ 且 $\psi_1 \wedge \psi_2 \in \mathrm{Sub}_C^+(\varphi)$, 则由 $s^* \vdash \psi_1 \wedge \psi_2$ 和(9.2.18)式即得 $\psi_1 \wedge \psi_2 \in s^*$.

v) 若 $\psi_1 \vee \psi_2 \in s^*$, 则 $s^* \vdash \neg(\neg\psi_1 \wedge \neg\psi_2)$, 所以 $\neg\psi_1 \wedge \neg\psi_2 \notin s^*$, 那么由 iv) 知 $\neg\psi_1 \notin s^*$ 或 $\neg\psi_2 \notin s^*$, 所以由 ii) 知 $\psi_1 \in s^*$ 或 $\psi_2 \in s^*$. 反过来, 设 $\psi_1 \in s^*$ 或

$\psi_2 \in s^*$，则 $s^* \vdash_{K_n^c} \psi_1 \vee \psi_2$ 和(9.2.18)式即得 $\psi_1 \vee \psi_2 \in s^*$.

为证明系统 $\boldsymbol{K}_n^c$ 的完备性，像以前一样，我们先证明以下引理.

**引理 9.2.24** 设 $\varphi \in \mathrm{Form}_n^c \Phi$，则

i) 若 $\varphi$ 是 $\boldsymbol{K}_n^c$ 相容的，则 $\varphi$ 在 $\mathscr{M}_n^c$ 中可满足.

ii) 定义典型 Kripke 结构 $\boldsymbol{M}_\varphi$ 为

$$\boldsymbol{M}_\varphi = (S_\varphi, \pi, K_1, R_1, \cdots, K_n, R_n), \tag{9.2.20}$$

这里

$$S_\varphi = \{s^* \mid s^* \in \mathrm{Con}_C(\varphi)\} = \mathrm{Con}_C(\varphi). \tag{9.2.21}$$

规定映射 $\pi: S_\varphi \to \{\mathrm{True}, \mathrm{False}\}$ 如下：

$$\pi(s^*)(p) = \mathrm{True} \quad \text{当且仅当} \quad p \in s^*, \quad s^* \in S_\varphi, p \in \Phi. \tag{9.2.22}$$

并且仍按(9.2.12)式定义 $S_\varphi$ 上的二元关系 $R_i (i = 1, \cdots, n)$，则

$$(\boldsymbol{M}_\varphi, s^*) \models \alpha, \quad \text{当且仅当} \quad \alpha \in s^*, \quad \alpha \in \mathrm{Sub}_C^+(\varphi), s^* \in S_\varphi. \tag{9.2.23}$$

**证** i) 设 $\varphi$ 在 $\boldsymbol{K}_n^c$ 中相容，即 $\varphi$ 不是可驳公式，则 $\varphi$ 可以包含于某极大相容理论 $s^*$ 中. 如果(9.2.23)式成立，则 $\varphi$ 可满足. 所以以下只需证明 ii).

ii) 可按关于 $\alpha$ 的复杂程度证明(9.2.23)式成立.

如果 $\alpha = p$，则由(9.2.22)式即得(9.2.23)式.

如果 $\alpha = \neg\beta$，且已证(9.2.23)式对 $\beta$ 成立，则由命题 9.2.23 易证(9.2.23)式对 $\alpha$ 也成立.

如果 $\alpha = \beta_1 \vee \beta_2$，且已证(9.2.23)式对 $\beta_1$ 和 $\beta_2$ 都成立，则由命题 9.2.23 易证(9.2.23)式对 $\alpha$ 也成立.

如果 $\alpha = K_i\beta$，且已证(9.2.23)式对 $\beta$ 成立，则可像证明定理 9.2.15 那样证明(9.2.23)式对 $\alpha$ 也成立.

如果 $\alpha = E_G\beta$，且已证(9.2.23)式对 $K_i\beta$ 成立，则由定义 9.2.16 i)知

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{M}_\varphi, s^*) \models E_G\beta, \quad &\text{当且仅当} \quad \forall i \in G, (\boldsymbol{M}_\varphi, s^*) \models K_i\beta, \\ &\text{当且仅当} \quad \forall i \in G, K_i\beta \in s^*.\end{aligned}$$

"⇒". 这时 $s^* \vdash \wedge K_i\beta$，又 $s^* \vdash \wedge K_i\beta \to E_G\beta$，所以 $s^* \vdash E_G\beta$. 且 $E_G\beta = \alpha \in \mathrm{Sub}_c^+(\varphi)$，所以由 $s^*$ 极大可知 $E_G\beta \in s^*$.

"⇐". 反过来，若 $E_G\beta \in s^*$，则由 $\mathrm{Sub}_c^+(\varphi)$ 的构造知 $\forall i \in G$, $K_i\beta \in \mathrm{Sub}_c^+(\varphi)$，所以由 $E_G\beta \in s^*$，$s^* \vdash E_G\beta \to \wedge K_i\beta$ 及 $s^* \vdash \wedge K_i\beta \to K_i\beta$ 得 $K_i\beta \in s^*$.

那么由归纳假设知$(M_\varphi, s^*) \models K_i\beta$, $i \in G$，所以$(M_\varphi, s^*) \models E_G\beta$.

如果 $\alpha = C_G\beta$ 且$(M_\varphi, s^*) \models C_G\beta$. 令

$$\varphi_{t^*} = \wedge \{\alpha \mid \alpha \in t^*\}, \quad t^* \in S_\varphi. \tag{9.2.24}$$

$$W=\left\{t^{*}\;\middle|\;t^{*}\in S_{\varphi},\ (\boldsymbol{M}_{\varphi},\ t^{*})\models C_{G}\beta\right\}.\tag{9.2.25}$$

$$\varphi_{W}=\bigvee\left\{\varphi_{t*}\;\middle|\;t^{*}\in W\right\}.\tag{9.2.26}$$

注意，由 $\mathrm{Sub}_{C}^{+}(\varphi)$ 和 $S_{\varphi}$ 都是有限集知以上各式都是有意义的，且由 $(\boldsymbol{M}_{\varphi},\ s^{*})\models C_{G}\beta$ 和(9.2.25)式知 $s^{*}\in W$，那么

$$\boldsymbol{K}_{n}^{c}\ \ \vdash\varphi_{s*}\rightarrow\varphi_{W}.\tag{9.2.27}$$

又可以证明(见文献[81]，P92，习题 3.28)

$$\boldsymbol{K}_{n}^{c}\ \ \vdash\varphi_{W}\rightarrow E_{G}(\beta\wedge\varphi_{W}).\tag{9.2.28}$$

那么由推理规则 RC1 得

$$\boldsymbol{K}_{n}^{c}\ \ \vdash\varphi_{W}\rightarrow C_{G}\beta.\tag{9.2.29}$$

由(9.2.27)式和(9.2.29)式即得

$$\boldsymbol{K}_{n}^{c}\ \ \vdash\varphi_{s*}\rightarrow C_{G}\beta.\tag{9.2.30}$$

由 $s^{*}$ 是极大相容理论即可证明 $C_{G}\beta\in s^{*}$.

反过来，设 $C_{G}\beta\in s^{*}$，为证明 $(\boldsymbol{M}_{\varphi},\ s^{*})\models C_{G}\beta$，只需证当 $t^{*}$ 从 $s^{*}$ 可达时 $(\boldsymbol{M}_{\varphi},\ t^{*})\models\beta$. 为此可证明对任意的 $k\in\mathbf{N}$，当 $t^{*}$ 从 $s^{*}k$ 步可达时有 $(\boldsymbol{M}_{\varphi},\ t^{*})\models\beta$.

设 $k=1$，则由 $C_{G}\beta\in s^{*}$ 和公理 C2 知 $E_{G}(\beta\wedge C_{G}\beta)\in s^{*}$，从而 $\forall i\in G$，$K_{i}(\beta\wedge C_{G}\beta)\in s^{*}$. 既然 $t^{*}$ 从 $s^{*}$ 1 步可达，所以有 $i\in G$ 使 $(s^{*},\ t^{*})\in R_{i}$，从而由 $R_{i}$ 的定义(9.2.12)式得 $\beta\wedge C_{G}\beta\in t^{*}$，即 $\beta\in t^{*}$，$C_{G}\beta\in t^{*}$.

设当 $t^{*}$ 从 $s^{*}k$ 步可达时已证 $\beta\in t^{*}$，$C_{G}\beta\in t^{*}$. 现在 $u^{*}$ 从 $s^{*}(k+1)$ 步可达，且第 $k$ 步到达 $t^{*}$. 那么 $C_{G}\beta\in t^{*}$，从而由公理 C2 知 $E_{G}(\beta\wedge C_{G}\beta)\in t^{*}$. 因为 $u^{*}$ 从 $t^{*}$ 1 步可达，所以可以像上面一样证明 $\beta\in u^{*}$，$C_{G}\beta\in u^{*}$.

至此已证明当 $t^{*}$ 从 $s^{*}k$ 步可达时 $\beta\in t^{*}$. 由归纳假设，$(\boldsymbol{M}_{\varphi},\ t^{*})\models\beta$. 所以 $(\boldsymbol{M},\ s^{*})\models C_{G}\beta$.

引理 9.2.24 证毕.

现在可以证明系统 $\boldsymbol{K}_{n}^{c}$ 的完备性了.

**定理 9.2.25**(系统 $K_{n}^{c}$ 的完备性定理)　系统 $\boldsymbol{K}_{n}^{c}$ 是完备的，即设 $\varphi\in\mathrm{Form}_{n}^{C}\Phi$，则

$$\boldsymbol{K}_{n}^{c}\vdash\varphi\quad\text{当且仅当}\quad\models\varphi.\tag{9.2.31}$$

**证**　由命题 9.2.20 知 $\boldsymbol{K}_{n}^{c}$ 中的公理 C1 和 C2 都是 $\mathscr{M}_{n}$ 中的有效公式. 推理规则 RC1 保持有效性，所以由 MP 规则和推广规则都保持有效性知系统 $\boldsymbol{K}_{n}^{c}$ 中的定理都是有效的，即若 $\boldsymbol{K}_{n}^{c}\vdash\varphi$，则 $\models\varphi$.

反过来，设 $\varphi$ 是 $\mathscr{M}_{n}$ 中的有效公式，应当证明 $\boldsymbol{K}_{n}^{c}\vdash\varphi$. 如果 $\boldsymbol{K}_{n}^{c}\vdash\varphi$ 不成立，则 $\neg\varphi$ 不是 $\boldsymbol{K}_{n}^{c}$ 中的可驳公式，从而由 $\neg\varphi\in\mathrm{Sub}_{C}^{+}(\varphi)$ 知 $S_{\varphi}$ 中有极大相容理论 $s^{*}$

使$\neg\varphi\in s^*$. 那么由引理 9.2.24 ii) 知$(\boldsymbol{M}_\varphi, s^*)\models\neg\varphi$, 即$\neg\varphi$可满足. 这与$\models\varphi$相矛盾!

最后讨论关于分布式知识的系统$\boldsymbol{K}_n^D$.

**定义 9.2.26** 在系统$\boldsymbol{K}_n$的基础上再添加两条公理

D1. $D_{\{i\}}\varphi\leftrightarrow K_i\varphi$.

D2. 若$G\subset G'$, 则$D_G\varphi\rightarrow D_{G'}\varphi$.

称所得的系统为$\boldsymbol{K}_n^D$.

显然, 公理 D1 和 D2 都是关于$\mathscr{M}_n$有效的公式. 还可以证明下面的定理.

**定理 9.2.27**(系统$K_n^D$的完备性定理) 系统$\boldsymbol{K}_n^D$是完备的, 即设$\varphi\in\mathrm{Form}_n^D\Phi$, 则

$$\boldsymbol{K}_n^D\vdash\varphi \quad \text{当且仅当} \quad \models\varphi. \tag{9.2.32}$$

这里$\mathrm{Form}_n^D\Phi$表示由$\Phi$生成的$(\neg, \vee, K_1, \cdots, K_n, D)$型自由代数.

证明作为练习留给读者.

### 9.2.5 运行和系统

前面讨论的状态之集$S$对于每个当事人$i$来说都是一样的. 下面讨论对不同的当事人$i$而言有一组可能不同的状态之集$L_i$的情形. 除此以外, 再假设还有一个可能环境之集$L_e$, 其具体涵义视情况而定.

**定义 9.2.28** 设$\boldsymbol{H}=L_e\times L_1\times\cdots\times L_n$, $r:\boldsymbol{N}\rightarrow\boldsymbol{H}$是一个映射, 则称$r$为$\boldsymbol{H}$的一个**运行**(run). 称$(r, m)$为**点**$(r\in\boldsymbol{H}^{\boldsymbol{N}}, m\in\boldsymbol{N})$. 称$r(m)=(s_e, s_1, \cdots, s_n)$为点$(r, m)$处的**全局状态**(global state), 称$(r(m))_i=r_i(m)=s_i$为当事人$i$的**局部状态**(local state). 称$\boldsymbol{H}$的一组运行之集$\boldsymbol{R}$为$\boldsymbol{H}$上的一个**系统**(system).

显然我们有

$$\left\{r_i(0), r_i(1), r_i(2), \cdots\right\}\subset L_i \quad (i=1, \cdots, n);$$

$$\left\{r_e(0), r_e(1), r_e(2), \cdots\right\}\subset L_e, \quad r_e(m)=(r(m))_e.$$

**注 9.2.29** i) 由于多了一个可能环境之集$L_e$, 所以增强了对事物的表达能力.

ii) 这里已经没有了共用的状态之集$S$, 各当事人$i$各有自身的状态集$L_i$, 对不同的$i$, $L_i$可以不同.

iii) 如果把一个点当作一个状态, 并令$S=\left\{(r, m)\,\middle|\, r\in\boldsymbol{R}, m\in\boldsymbol{N}\right\}$, 则适当定义$\pi$和$R_i$后仍得出一个 Kripke 知识结构$(S, \pi, K_1, R_1, \cdots, K_n, R_n)$.

iv) 有时也考虑有限的运行.

**例 9.2.30** 仍然考虑泥孩问题. 约定:

i) 宣 = 父亲当众宣布了$p$.

问$(x)$ = 父亲发问了 $x$ 次而无人回答.

看$_i(x)$ = 小孩 $i$ 看见了 $x$ 个泥孩.

听$_i(x)$ = 小孩 $i$ 听见父亲问了 $x$ 次而无人回答.

想$_i(x)$ = 小孩 $i$ 想，如果父亲再发问 $x$ 次，自己就回答.

ii) 各种环境 $r_e(m)$ 随 $m$ 而变，即

$r_e(1) = \langle$(宣，问(0))$\rangle$

$r_e(2) = \langle$(宣，问(0))，(宣，问(1))$\rangle$，

……

$r_e(m) \triangleq \langle$(宣，问(0))，…，(宣，问$(m-1)$)$\rangle$.

iii) $G = \{1, \cdots, n\}$ 是小孩之集，$G' = \{i_1, \cdots, i_k\}$ 是有泥的小孩之集，各当事人的局部状态如下：

当 $i \in G'$ 时，$r_i(m)$ = (看$_i(k-1)$，听$_i(m-1)$，想$_i(k-m+1)$)，$m \leqslant k$.

当 $i \in G - G'$ 时，$r_i(m)$ = (看$_i(k)$，听$_i(m-1)$，想$_i(k-m+2)$).

令 $\boldsymbol{H} = L_e \times L_1 \times \cdots \times L_n$，$\boldsymbol{N}_0 = \{m \mid m \leqslant k\}$　$r: \boldsymbol{N}_0 \to \boldsymbol{H}$，则

$$r(m) = (r_e(m), r_1(m), \cdots, r_n(m)).$$

由此可见，在环境 $r_e(m)$ 中，有泥的小孩 $i$ 的状态是：他看见了 $k-1$ 个泥孩，他听见父亲发问了 $m-1$ 次而无人回答，这时他想，如果父亲再发问 $k-m+1$ 次（总数为第 $k$ 次了），他就举手回答. 所以小孩 $i$ 的状态是随环境而变化的.

在本例中只有一个运行 $r$，即 $\boldsymbol{R} = \{r\}$.

设 $\boldsymbol{R}$ 是一个系统，则由注 9.2.29 iii) 知只要适当地规定 $\pi$ 和 $R_i$ 就可以得到一个 Kripke 知识结构.

**定义 9.2.31**　设 $\boldsymbol{R}$ 是一个 $\boldsymbol{H}$ 上的系统，$\boldsymbol{H} = L_e \times L_1 \times \cdots \times L_n$，则 $\forall (r, m) \in \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{N}$，　$s = r(m) \in \boldsymbol{H}$，如果有映射 $\pi: \boldsymbol{H} \to \mathscr{P}(\Phi)$，

$$\forall s \in \boldsymbol{H}, \pi(s)(p) = \text{True} \quad 当且仅当 \quad p \in \pi(s), \tag{9.2.33}$$

则 $\pi$ 可以扩张成 $\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{N}$ 上的一个映射，仍然为 $\pi$，即

$$\pi: \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{N} \to \mathscr{P}(\Phi), \forall (r, m) \in \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{N}, \pi(r, m) = \pi(r(m)). \tag{9.2.34}$$

这里最后一个 $\pi$ 由 (9.2.33) 式确定，令

$$\boldsymbol{I} = (R, \pi), \tag{9.2.35}$$

称 $\boldsymbol{I}$ 为有解释 $\pi$ 的系统，简称为**有解释的系统**.

**定义 9.2.32**　设 $\boldsymbol{I} = (\boldsymbol{R}, \pi)$ 是一个有解释的系统，则 $\boldsymbol{I}$ 的 **Kripke 结构**为

$$\boldsymbol{M}_I = (S, \pi, K_1, R_1, \cdots, K_n, R_n). \tag{9.2.36}$$

这里

$$S = \left\{ (r, m) \,\middle|\, r \in \boldsymbol{R}, m \in \boldsymbol{N} \right\}, \tag{9.2.37}$$

$$((r, m), (r', m')) \in R_i \quad 当且仅当 \quad r_i(m) = r'_i(m'), \tag{9.2.38}$$

$$(\boldsymbol{I}, r, m) \models p \quad 当且仅当 \quad \pi(r, m)(p) = \text{True}, \tag{9.2.39}$$

$$(\boldsymbol{I}, r, m) \models K_i\varphi \quad \text{当且仅当} \quad \text{若} r'_i(m') = r_i(m), \text{则} (\boldsymbol{I}, r', m') \models \varphi. \tag{9.2.40}$$

这里$(\boldsymbol{I}, r, m)$是$(\boldsymbol{M_I}, (r, m))$的简写. 又因为由(9.2.34)式知

$$\text{当} r(m) = r'(m') \text{时}, \quad \pi(r, m) = \pi(r', m'). \tag{9.2.41}$$

所以可将$\pi(r, m)$简写为$\pi(r(m))$. 设$\varphi \in \text{Form}_n\Phi$, 称$\varphi$在有解释的系统$\boldsymbol{I}$中成立, 记作$\boldsymbol{I} \models \varphi$, 若对每个点$(r, m) \in S$,

$$(\boldsymbol{I}, r, m) \models \varphi. \tag{9.2.42}$$

设$\boldsymbol{C}$是一族有解释的系统, $\varphi$叫做**在$\boldsymbol{C}$中有效**, 记为$\boldsymbol{C} \models \varphi$, 若$\forall \boldsymbol{I} \in \boldsymbol{C}$, 均有$\boldsymbol{I} \models \varphi$.

**注 9.2.33** i) 在(9.2.33)式中, 映射$\pi$的定义域是$\boldsymbol{H}$, 而在(9.2.34)式中, 映射$\pi$的定义域是$\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{N}$. 因为$\forall (r, m) \in \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{N}$, $r(m) = (s_e, s_1, \cdots, s_n) \in \boldsymbol{H}$, 所以从(9.2.33)式的$\pi$诱导出(9.2.34)式的$\pi$是自然的. 但是反过来, $(r, m)$并不能由$r(m)$决定, 因为可能有$(r', m') \neq (r, m)$但$r'(m') = r(m)$. 所以, 只有在(9.2.41)式的基本事实下以上两个映射$\pi$才可以不加区分.

ii) 由(9.2.39)式定义的$(\boldsymbol{I}, r, m) \models p$到由(9.2.42)式给出的一般的$(\boldsymbol{I}, r, m) \models \varphi$是要经过$\neg\varphi$, $\varphi_1 \vee \varphi_2$和$K_i\varphi$等归纳定义过程才可以实现的, 但这里略去了细节, 只给出由(9.2.40)式定义的$(\boldsymbol{I}, r, m) \models K_i\varphi$.

**例 9.2.34** 继续考虑例9.2.30中的系统$\boldsymbol{R}$. 设$\Phi = \{q\}$, 这里$q$表示有小孩举手回答父亲的发问. 规定映射$\pi: \boldsymbol{H} \to \mathscr{P}(\Phi)$如下:

$$\forall (r_e(m), r_1(m), \cdots, r_n(m)) \in \boldsymbol{H},$$

令

$$\pi(r_e(m), r_1(m), \cdots, r_n(m)) = \begin{cases} \{q\}, & m > k, \\ \varnothing, & m \leqslant k, \end{cases}$$

则得到一个有解释的系统$\boldsymbol{I} = (\boldsymbol{R}, \pi)$. 由前面对泥孩问题的分析知

$$(\boldsymbol{I}, r, m) \models q \quad \text{当且仅当} \quad m > k.$$

### 9.2.6 知识库系统

**定义 9.2.35** **知识库系统**是一个特殊的系统$\mathbf{R}(\text{KB})$, 其特点是

i) 只有一个"当事人", 即知识库, 记为KB.

ii) $\Phi$是一组命题逻辑公式, $\Omega$是二值命题逻辑中的全体赋值之集, 系统$\mathbf{R}(\text{KB})$中的环境之集为$L_e \subset \Omega$.

iii) KB的局部状态之集

$$L_{KB} = \left\{ \langle \varphi_1, \cdots, \varphi_k \rangle \,\middle|\, \varphi_i \in \Phi, \ i = 1, \cdots, k, \ k \in \boldsymbol{N} \right\}.$$

iv) 全局状态之集

$$\boldsymbol{H} = L_e \times L_{\text{KB}},$$

运行为满足下面的基本假设 KB1 和 KB2 的映射

$$r: \boldsymbol{N} \to \boldsymbol{H}.$$

v) 知识库系统 $\mathbf{R}(\text{KB}) = \{r \mid r$ 是 $\boldsymbol{H}$ 上的运行$\}$.

又设映射 $\pi$ 由下式定义:

$$\pi(r, m)(p) = \text{True} \quad \text{当且仅当} \quad r_e(m)(p) = \text{True}. \tag{9.2.43}$$

这里 $r_e(m) \in L_e$, 即 $r_e(m)$ 是 $\Phi$ 的一个赋值. 那么就得到一个解释了的系统 $\boldsymbol{I} = \boldsymbol{I}(\text{KB}) = (\mathbf{R}(\text{KB}), \pi)$. 这时

$$(\boldsymbol{I}, r, m) \models p \quad \text{当且仅当} \quad r_e(m)(p) = \text{True}. \tag{9.2.44}$$

以下用 $F(\Phi)$ 表示包含 $\Phi$ 且对$\neg$, $\vee$ 运算封闭的命题逻辑公式的最小集.

**基本假设 9.2.36**　关于知识库系统 $\mathbf{R}(\text{KB})$, 有如下基本假设:

i) KB1.　$\forall r \in \mathbf{R}(\text{KB})$, $r(0) = (\alpha, < >)$, $\alpha \in \Omega$.

ii) KB2.　设 $r(m) = (\alpha, <\varphi_1, \cdots, \varphi_k>)$, $\varphi_1, \cdots, \varphi_k \in F(\Phi)$, 则

(a) $r(m+1) = r(m)$ 或 $r(m+1) = (\alpha, <\varphi_1, \cdots, \varphi_k, \varphi_{k+1}>)$.

(b) $\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_k$ 在赋值 $\alpha$ 下为真.

(c) $\pi(r, m) = r_e(m) = \alpha$.

**注 9.2.37**　i) 由基本假定 KB1 知, $\mathbf{R}(\text{KB})$ 中每个运行 $r$ 在起步前的 $r(0)$ 所对应的 KB 局部状态均为 $< >$, 即不含任何命题. 这时对于 $\mathbf{R}(\text{KB})$ 中不同的运行 $r$, 只是 $r(0)$ 中的初始环境 $\alpha$ 不同.

ii) KB2 中的条件 (b) 表明 KB 局部状态 $<\varphi_1, \cdots, \varphi_k>$ 中的各命题都被同一个赋值 $\alpha$ 所满足.

iii) KB2 中的条件 (c) 是 (9.2.43) 式的具体落实, 可见 $\mathbf{R}(\text{KB})$ 已经是一个有解释的系统了.

**例 9.2.38**　假设

i) $\Phi = \{\varphi_i, \eta_i, \xi_i \mid i = 1, 2, \cdots\}$,

$\varphi_i = p_i \to p_{i+1}$,

$\eta_i = p_i \to p_{i+2}$,

$\xi_i = p_i \to p_{i+3}$　$(i = 1, 2, \cdots)$.

ii) $L_e$ 是所有满足 KB1 与 KB2 的赋值 $\alpha$ 之集. 比如, $L_e$ 中包括 (但远不限于):

$\alpha_0 = (1, 1, 1, 1, \cdots)$, 即 $\alpha_0(p_i) = \text{True}$　$(i = 1, 2, \cdots)$;

$\alpha_1 = (0, 1, 1, 1, \cdots)$, 即 $\alpha_1(p_1) = \text{False}$,

$\alpha_1(p_i) = \text{True}$　$(i = 2, 3, \cdots)$;

$\alpha_2 = (0, 0, 1, 1, \cdots)$, 即 $\alpha_2(p_1) = \alpha_2(p_2) = \text{False}$,

$$\alpha_2(p_i)=\text{True}\quad(i=3,4,\cdots);$$

$\alpha_3=(0,0,0,1,\cdots)$，即 $\alpha_3(p_i)=\text{False}(i\leqslant 3)$，

$$\alpha_3(p_i)=\text{True},\quad i>3;$$

……

iii) $L_{KB}=\left\{<\zeta_1,\cdots,\zeta_m>\middle| m\in\mathbf{N},\zeta=\varphi,\eta,\xi\right\}$.

iv) $\mathbf{R}(\text{KB})=\left\{r^{(i,\zeta)}\middle| i\in N,\zeta=\varphi,\eta,\xi\right\}$，即 $\mathbf{R}(\text{KB})$ 中有可数无穷多个运行，其中

$$r^{(i,\zeta)}(m)=(\alpha_i,<\zeta_1,\cdots,\zeta_m>)\quad(i\in N;\zeta=\varphi,\eta,\xi).$$

比如，

$$r^{(0,\varphi)}(3)=(\alpha_0,<\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3>),$$

$$r^{(2,\eta)}(4)=(\alpha_2,<\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4>).$$

如果令 $\beta=p_4\to p_2$，则由基本假设 KB2 中的条件($c$)知 $(\boldsymbol{I},r^{(0,\varphi)},3)\models\beta$ 成立，但 $(\boldsymbol{I},r^{(2,\eta)},4)\models\beta$ 不成立.

**基本问题 9.2.39** 在有解释的知识库系统 $\boldsymbol{I}(\text{KB})=(\mathbf{R}(\text{KB}),\pi)$ 中，设 $\psi$ 是某命题，问

$$(\boldsymbol{I},r,m)\models K_{\text{KB}}\psi \tag{9.2.45}$$

是否成立？即知识库 KB 是否知道命题 $\psi$ 成立？

**定理 9.2.40** 在有解释的知识库系统 $\boldsymbol{I}(\text{KB})=(\mathbf{R}(\text{KB}),\pi)$ 中，设知识库 KB 的局部状态 $r_{\text{KB}}(m)=<\varphi_1,\cdots,\varphi_k>$. 令 $\Delta=\varphi_1\wedge\cdots\wedge\varphi_k$，并设 $\psi$ 是一个命题逻辑公式，$\psi\in F(\Phi)$，则(9.2.45)式成立的充要条件是

$$(*)\quad \Delta\to\psi\ \text{是重言式}.$$

**证** 设($*$)成立，任取点 $(r',m')\in\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{N}$，设 $((r',m'),(r,m))\in R_{\text{KB}}$，则由(9.2.38)式知 $r'_{\text{KB}}(m')=r_{\text{KB}}(m)=<\varphi_1,\cdots,\varphi_k>$. 那么在点 $(r',m')$ 处的全局状态为 $(\alpha',<\varphi_1,\cdots,\varphi_k>)$（见定义 9.2.28），从而由基本假设 KB2($b$)知 $\alpha'(\Delta)=\text{True}$. 再由基本假设 KB2($c$)，即 $\pi(r',m')(\Delta)=\text{True}$. 所以由(9.2.44)式得 $(\boldsymbol{I},r',m')\models\Delta$，从而由($*$)得 $(\boldsymbol{I},r',m')\models\psi$. 由点 $(r',m')$ 的任意性即得(9.2.45)式.

反过来，设($*$)不成立，则 $\Delta\wedge\neg\psi$ 不是矛盾式，且 $\Delta\wedge\neg\psi\in F(\Phi)$. 那么有 $\alpha'\in\Omega$ 使 $\alpha'(\Delta\wedge\neg\psi)=\text{True}$，从而 $\alpha'(\Delta)=\text{Ture}$. 设 $r'(m')=(\alpha',<\varphi_1,\cdots,\varphi_k>)(m'\in N)$，则 $r'$ 是满足条件 KB1 和 KB2 的运行 $(r',m')\in\boldsymbol{H}^N\times\boldsymbol{N}$. 由

$$r'_{\text{KB}}(m')=<\varphi_1,\cdots,\varphi_k>=r_{\text{KB}}(m)$$

和(9.2.38)式知 $((r',m'),(r,m))\in R_{\text{KB}}$. 但由 $\alpha'(\neg\psi)=\text{Ture}$ 知 $(\boldsymbol{I},r',m')\models$

$\neg\psi$，所以(9.2.45)式不成立.

**推论 9.2.41**　在全局状态 $r(m)$ 下，如果 $\Delta\to\psi$ 与 $\Delta\to\neg\psi$ 都不是重言式，即 $\psi$ 和 $\neg\psi$ 都不是 $\varphi_1$，…，$\varphi_k$ 的推论，则知识库 KB 不知道 $\psi$ 的对与错，也不知道 $\neg\psi$ 的对与错.

**例 9.2.42**　继续考虑例 9.2.38.

i)在全局状态 $r^{(0,\varphi)}(3)$ 下，

$$\Delta = \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3 = (p_1 \to p_2) \wedge (p_2 \to p_3) \wedge (p_3 \to p_4).$$

设 $\psi = p_1 \to p_4$，则 $\Delta\to\psi$ 是重言式，所以知识库 KB 知道 $\psi$ 是对的.

ii)在全局状态 $r^{(2,\eta)}(4)$ 下，

$$\Delta = (p_1 \to p_3) \wedge (p_2 \to p_4) \wedge (p_3 \to p_5) \wedge (p_4 \to p_6).$$

设 $\psi = p_1 \to p_5$，则由 $\Delta\to\psi$ 为重言式知 KB 知道 $\psi$ 是对的. 但若令 $\psi_1 = \neg(p_3 \to p_4)$，$\psi_2 = p_1 \to p_4$，则知识库 KB 不知道 $\psi_1$，$\psi_2$ 是对还是错. 以 $\psi_1$ 为例，这时 $\Delta\to\psi_1$ 不是重言式，那么 $\Delta\wedge\neg\psi_1 = \Delta\wedge(p_3\to p_4)$ 不是矛盾式，所以有 $\alpha' \in \Omega$ 使 $\alpha'(\Delta\wedge\neg\psi_1) = \text{True}$，比如取 $\alpha'$ 为 $\alpha_0$ 就行. 作 $r'$ 使 $\forall m' \in \boldsymbol{N}$ 恒有 $r'(m') = (\alpha', <\Delta\wedge(p_3\to p_4)>)$，则 $\alpha$ 满足 KB1 和 KB2，且由 $r'_{KB}(m') = r'_{KB}(m)$ 和(9.2.38)式知 $((r', m'), (r', m)) \in R_{KB}$. 但 $(\boldsymbol{I}, r', m') \models \psi_1$ 不成立，所以(9.2.45)式不成立.

以上在 $\psi$ 是命题逻辑公式的条件下讨论了知识库 KB 是否知道 $\psi$ 成立与否的问题，下面研究 $\psi$ 中可能包含有模态词 $K_{KB}$ 的情形. 这时称 $\psi$ 为 **KB-公式**.

**命题 9.2.43**　设 $\psi$ 是 KB-公式，则存在 $\varphi_1$，…，$\varphi_m \in F(\Phi)$ 使得 $\psi$ 在系统 S5 中可证等价于由 $\varphi_1$，…$\varphi_m$，$K_{KB}\varphi_1$，…，$K_{KB}\varphi_m$ 通过 $\neg$，$\vee$，$\to$ 等连接而成的某公式.

**证**　由 $R_{KB}$ 的定义(9.2.38)式知 $R_{KB}$ 是自反的、对称的和传递的二元关系，即 $R_{KB}$ 是 $S$ 上的等价关系，把 $K_{KB}$ 记为 $\Box$，令 $\Diamond = \neg\Box\neg$，则 KB-公式成为系统 S5 中的公式. 所以由模态析(合)取范式定理 9.1.78 即得命题 9.2.43. 特别是由引理 9.1.74 i)式得

$$K_{KB}(p \to K_{KB}p) \sim_{S5} K_{KB}p \vee K_{KB}\neg p. \tag{9.2.46}$$

上面的命题说任一 KB-公式都可化为深度至多等于 1 的 KB-公式. 比如，在(9.2.46)式中左边的公式是 2 度公式，而右边的公式则是 1 度公式. 正是基于命题 9.2.43，知识库 KB 就有可能回答关于 KB-公式的问题了.

**命题 9.2.44**　设知识库 KB 在某全局状态下知道命题 $p$ 成立，或 KB 知道命题 $\neg p$ 成立，则 KB 知道 $p\to K_{KB}p$ 成立.

**证**　由(9.2.46)式立即得出.

一般地，可以证明下面的定理.

**定理 9.2.45**　设 $\psi$ 是一个 KB-公式，如果在某全局状态下知识库 KB 能回答 $\psi$ 所涉及的各深度为 0 的公式是否成立，则 KB 就能回答 $\psi$ 是否成立.

**证** 请读者基于模态析(合)取范式定理9.1.78自行证明.

## 9.3 描 述 逻 辑

描述逻辑(description logic, DL)是研究一类知识表示问题(knowledge representation, KR)的理论. 概念是知识的基本组成单位，所以DL首先给出概念的严格形式化描述. 研究知识表示的一个重要方面是将概念进行分类. 当然，根据不同的要求这种分类的细致程度不同，所以就得出大小不同的概念. DL的一个研究任务就要研究概念之间的包含关系(subsumption relationship). 除了研究概念之外，DL还研究各种断言(assertion)及其间的关系，特别是研究一个断言是否对某一个体而言成立的问题，也就是研究该断言是否可满足(satisfiable)的问题. 这些都是DL中的推理问题. 所有这些研究都是在描述逻辑的语言，称为属性语言(attributive language, $\mathscr{AL}$)的基础上展开的. DL的表达能力如何自然和$\mathscr{AL}$中的基本符号的多少有关. 越丰富的$\mathscr{AL}$，其表达能力就越强，但同时相应的推理问题就越复杂. 研究$\mathscr{AL}$的表达能力与推理复杂度之间的关系是DL的研究热点之一. 限于篇幅，本节只介绍描述逻辑中两个最基本的方面，即Tbox理论与Abox理论. 关于DL的进一步研究见文献[82].

### 9.3.1 语言$\mathscr{AL}$

**定义9.3.1** 用$C$, $D$表示一般的概念，其形式化的构成法则如下(表9.1)：

**表9.1**

$$
\begin{aligned}
C, D \to A \mid & \quad \text{(原子概念，或概念名)} \\
\top \mid & \quad \text{(万有概念)} \\
\bot \mid & \quad \text{(底概念)} \\
\neg A \mid & \quad \text{(原子否定)} \\
C \sqcap D \mid & \quad \text{(交)} \\
\forall R.C \mid & \quad \text{(取值限制)} \\
\exists R.\top \mid & \quad \text{(有限制的存在量词)}
\end{aligned}
$$

**注9.3.2** i)以下经常用$A$, $B$表示原子概念.

ii)表9.1给出的是一般概念的生成方法. 比如，设$C$, $D$是概念，则$C \sqcap \neg A$, $\forall R.(C \sqcap \neg A)$, $D \sqcap \forall R.(C \sqcap \neg A)$等都是概念.

iii)表9.1只是给出了形式化的概念生成法则，$R$叫**角色**(role). 至于$\forall R.C$

和 $\exists R.T$ 等是什么意思要等有解释以后才会明白.

**定义 9.3.3** $\mathscr{AL}$ 的形式语义由**解释 $I$** 构成, $I$ 有一个解释域, 记为 $\Delta$, $\Delta$ 是非空集. $I$ 满足以下条件

**表 9.2**

$T^I = \Delta.$

$\bot^I = \varnothing.$

$(\neg A)^I = \Delta - A^I.$

$(C \sqcap D)^I = C^I \cap D^I.$

$R^I \subset \Delta \times \Delta.$

$(\forall R.C)^I = \{a \in \Delta \mid \forall b,\ \text{当}(a, b) \in R^I\text{时},\ b \in C^I\}.$

$(\exists R.T)^I = \{a \in \Delta \mid \exists b,\ (a, b) \in R^I\}.$

**注 9.3.4** 在表 9.2 中, $R^I$ 是 $\Delta$ 上的二元关系, 令

$$R^I[a] = \{b \in \Delta \mid (a, b) \in R^I\}, \tag{9.3.1}$$

则

$$(\forall R.C)^I = \{a \in \Delta \mid R^I[a] \subset C^I\}, \tag{9.3.2}$$

$$(\exists R.T)^I = \{a \in \Delta \mid R^I[a] \neq \varnothing\}. \tag{9.3.3}$$

### 9.3.2　语言 $\mathscr{AL}$ 的扩充

由表 9.1 给出的语言 $\mathscr{AL}$ 的表达能力较弱. 比如, 对于一般的概念 $C$, 无法表达其否定. 现在我们从不同的方面对 $\mathscr{AL}$ 进行扩充.

**定义 9.3.5** i) 设 $C$, $D$ 是 $\mathscr{AL}$ 中的概念, 则语言 $\mathscr{ALU}$ 中还包含 $C \sqcup D$ (**并**), 对任一解释 $I$,

$$(C \sqcup D)^I = C^I \cup D^I. \tag{9.3.4}$$

ii) 设 $C$ 是 $\mathscr{AL}$ 中的概念, 则语言 $\mathscr{ALE}$ 中还包含概念 $(\exists R.C)$ (**完全存在量词**). 对任一解释 $I$,

$$(\exists R.C)^I = \{a \in \Delta \mid R^I[a] \cap C^I \neq \varnothing\}. \tag{9.3.5}$$

iii) 设 $R$ 是 $\mathscr{AL}$ 中的角色, $n$ 是自然数, 则语言 $\mathscr{ALN}$ 中还包含概念

$\geqslant n\ R$ (**至少限制**)　$(n = 1, 2, \cdots)$.

对任一解释 $I$,

$$(\geqslant n\ R)^{I}=\left\{a\in\Delta \mid |R^{I}[a]|\geqslant n\right\},$$

$$\leqslant n\ R(\textbf{至多限制})\qquad (n=1,2,\cdots).$$

对任一解释 $\boldsymbol{I}$,

$$(\leqslant n\ R)^{I}=\left\{a\in\Delta \mid |R^{I}[a]|\leqslant n\right\}.$$

iv)设 $C$ 是 $\mathscr{AL}$ 中的概念，则 $\mathscr{ALC}$ 中还包含概念 $\neg C$(**一般概念否定**).
对任一解释 $\boldsymbol{I}$,

$$(\neg C)^{I}=\Delta-C^{I}.$$

**注 9.3.6** i)对 $\mathscr{AL}$ 可同时添加 $\sqcup$, $(\exists R.C)$, $\geqslant n\ R$, $\leqslant nR$ 和 $\neg C$ 或它们的一部分，这样可以得出 $\mathscr{AL}$ 的不同扩充，如 $\mathscr{ALN}$, $\mathscr{ALCN}$ 等.

ii) 我们可以不在 $\geqslant n\ R$ 和 $\leqslant n\ R$ 前添加非运算. 这是因为，以 $\geqslant n\ R$ 为例，若 $n\geqslant 2$, 则 $\neg(\geqslant n\ R)$ 的解释和 $\leqslant (n-1)R$ 的解释相同，而当 $n=1$ 时，$\neg(\geqslant 1R)$ 的解释与 $\forall R.\perp$ 的解释相同.

**定义 9.3.7** 两个概念 $C$ 和 $D$ 叫做**等价概念**，记作 $C\equiv D$, 若对任一解释 $\boldsymbol{I}$ 均有 $C^{I}=D^{I}$.

**例 9.3.8** 以下是常用的等价概念的例子

i) $C\sqcup D\equiv\neg(\neg C\sqcap\neg D)$.

ii) $\exists R.C\equiv\neg\forall R.\neg C$.

这里的 i)容易由关于集合运算的 De Morgan 律得出. ii)的验证如下：设 $\boldsymbol{I}$ 是任一解释，则由定义 9.3.3, (9.3.2)式和(9.3.5)式得

$$\begin{aligned}(\neg\forall R.\neg C)^{I}&=\Delta-\left\{a\in\Delta \mid R^{I}[a]\subset\Delta-C^{I}\right\}\\&=\Delta-\left\{a\in\Delta \mid R^{I}[a]\cap C^{I}=\varnothing\right\}\\&=\left\{a\in\Delta \mid R^{I}[a]\cap C^{I}\neq\varnothing\right\}=(\exists R.C)^{I}.\end{aligned}$$

所以 ii)成立.

**注 9.3.9** 由例 9.3.8 ii)看出，语言 $\mathscr{ALC}$ 比 $\mathscr{ALE}$ 要强，因为在 $\mathscr{ALC}$ 中已经可以通过 $\neg\forall R.\neg C$ 来表达完全存在量词了. 又由例 9.3.8 i)知 $\mathscr{ALC}$ 中也可表达概念的并，可见语言 $\mathscr{ALCN}$ 已经涵盖了各种语言.

### 9.3.3 Tbox

**定义 9.3.10** 以下 4 种式子称为术语公理(terminological axiom):

i) $C\sqsubseteq D$(**概念包含**);

ii) $C\equiv D$(**概念等式**);

iii) $R\sqsubseteq S$(**角色包含**);

iv) $R\equiv S$(**角色等式**).

设 $I$ 是一个解释，称 $I$ 满足 $C \sqsubseteq D$，若 $C^I \subset D^I$；称 $I$ 满足 $C \equiv D$，若 $C^I = D^I$；称 $I$ 满足 $R \sqsubseteq S$，若 $R^I \subset S^I$；称 $I$ 满足 $R \equiv S$，若 $R^I = S^I$.

**定义 9.3.11** 称左边为原子概念的概念等式为**定义**. 称定义的左边为**符号名**，或**名符号**(以下将视情况而交替使用这两种称谓). 称定义的有限集 $\mathscr{T}$ 为 Tbox，若没有符号名被定义过超过 1 次，这里 T 是 Terminology 的缩写，即 T 表示术语，所以 Tbox 就是一组术语之集.

下面将常用到一些角色 $R$，如"有儿女"、"有丈夫"等. 这时"$(a, b) \in$ 有儿女"表示"$a$ 有儿女 $b$"，或"$b$ 是 $a$ 的儿女". "$(a, b) \in$ 有丈夫"表示"$a$ 有丈夫 $b$"，或"$b$ 是 $a$ 的丈夫".

**例 9.3.12** 表 9.3 中的 9 条定义构成了一个 Tbox：

**表 9.3**

女人 $\equiv$ 人 $\sqcap$ 女性

男人 $\equiv$ 人 $\sqcap \neg$ 女人

母亲 $\equiv$ 女人 $\sqcap$ $\exists$ 有儿女. 人

父亲 $\equiv$ 男人 $\sqcap$ $\exists$ 有儿女. 人

父母 $\equiv$ 父亲 $\sqcup$ 母亲

祖母 $\equiv$ 母亲 $\sqcap$ $\exists$ 有儿女. 父母

多子女母亲 $\equiv$ 母亲 $\sqcap \geqslant 3$ 有儿女

没有女儿的母亲 $\equiv$ 母亲 $\sqcap$ $\forall$ 有儿女. $\neg$ 女人

妻子 $\equiv$ 女人 $\sqcap$ $\exists$ 有丈夫. 男人

**定义 9.3.13** 在一个 Tbox 中，只出现在定义右边的概念和角色叫**基符号**，只对 Tbox 中的基符号作了解释的解释 $J$ 叫该 Tbox 的**基解释**. 设 $I$ 是 Tbox 的一个解释，即 $I$ 对 Tbox 中的各概念都作了解释. 称 $I$ 为基解释 $J$ 的一个**扩充**，若

i) $I$ 的解释域和 $J$ 的解释域相同.

ii) $I$ 对基符号的解释和 $J$ 对基符号的解释相同.

Tbox $\mathscr{T}$ 叫做**确定型的**(definitorial)，若 $\mathscr{T}$ 的每个基解释恰有一个扩充 $I$，并且 $I$ 是 $\mathscr{T}$ 的**模型**，即 $I$ 满足 $\mathscr{T}$ 中的每个定义. 两个 Tbox $\mathscr{T}$ 和 $\mathscr{T}'$叫**等价的**，若 $\mathscr{T}$ 与 $\mathscr{T}'$的模型相同.

**例 9.3.14** 在表 9.3 中，人，女性，有儿女，有丈夫是基符号，女人，男人，母亲，父亲，父母，祖母，多子女母亲，没有女儿的母亲，妻子都是名符号.

**例 9.3.15** 考虑下面的只含有一条定义的 Tbox $\mathscr{T}$：

$$\text{人类}' \equiv \text{动物} \sqcap \forall \text{有父母}. \text{人类}'. \tag{9.3.6}$$

这里概念人类'出现在同一个定义的左、右两边. 这时有两个基符号, 即动物和有父母. 设 $J$ 是一个基解释, 其解释域

$$\Delta = \text{全体动物之集.}$$

$$(a, b) \in \text{有父母} \quad \text{当且仅当} \quad b \text{ 是 } a \text{ 的上一辈.}$$

这时 $J$ 有许多不同的扩张:分别把人类'解释为

i) 真正的人类,

ii) 全体动物之集 $\Delta$,

iii) 全体猴子之集,

iv) 全体狗之集,

则每个解释 $\boldsymbol{I}$ 都是 $J$ 的扩张, 并且是(9.3.6)式的模型. 这种 Tbox 显然没有多大用处, 它包含有循环定义的概念.

**定义 9.3.16** 设 $A$, $B$ 是某 Tbox 中的两个原子概念.

i) 称 $A$ **直接用到** $B$, 若 $B$ 出现在定义 $A$ 的等式的右边.

ii) 称 $A$ **用到** $B$, 若存在 $B_1, \cdots, B_n$ 使 $A$ 直接用到 $B_1$, $B_1$ 直接用到 $B_2$, $\cdots$, $B_{n-1}$直接用到 $B_n$, 并且 $B_n$ 直接用到 $B$.

iii))称 Tbox $\mathscr{T}$ 是**循环**的(cyclic), 若 $\mathscr{T}$ 中有原子概念 $A$, $A$ 用到了 $A$ 自己. 否则称 $\mathscr{T}$ 为**非循环**的(acyclic).

**定义 9.3.17** 设 $\mathscr{T}$ 是非循环 Tbox, $A \equiv C$ 是 $\mathscr{T}$ 中的一个定义, 且 $C$ 中含有符号名 $B$, 且 $B \equiv D$ 是 $\mathscr{T}$ 中的另一定义. 用 $D$ 取代 $C$ 中的 $B$, 则得一定义 $A \equiv C_1$, 由 $\mathscr{T}$ 非循环知 $C_1$ 中不再含有符号名 $B$. 称此运算为**消除右边符号名运算**(简称**消除运算**). 显然, 每经过一次这种运算, $\mathscr{T}$ 中右边符号名的总数就要减小一次. 因为 $\mathscr{T}$ 中右边符号名的总数是有限的, 所以经过有限次的消除运算后就得到一个 Tbox $\mathscr{T}'$, $\mathscr{T}'$中每个定义都具有形式 $A \equiv C'$, 这里 $C'$中不再含有符号名, 即 $C'$中只含有基符号. 称 Tbox $\mathscr{T}'$为 $\mathscr{T}$ 的伸展(expansion).

**例 9.3.18** 由表 9.3 给出的 Tbox $\mathscr{T}$ 是非循环的, 它有一个伸展 $\mathscr{T}'$如表 9.4:

**表 9.4**

女人 ≡ 人 ⊓ 女性

男人 ≡ 人 ∩ ¬(人 ⊓ 女性)

母亲 ≡ (人 ∩ 女性) ⊓ ∃有儿女. 人

父亲 ≡ (人 ∩ ¬(人 ⊓ 女性)) ⊓ ∃有儿女. 人

父母 ≡ ((人 ∩ ¬(人 ⊓ 女性)) ⊓ ∃有儿女. 人) ⊔ ((人 ⊓ 女性) ⊓ ∃有儿女. 人)

祖母 ≡ ((人 ⊓ 女性) ⊓ ∃有儿女. 人) ⊓ ∃有儿女. ((人 ⊓ ¬(人 ⊓ 女性)) ⊓ ∃有儿女. 人) ⊔ ((人 ⊓ 女性) ⊓ 有儿女. 人))

多子女母亲≡((人⊓女性)⊓∃有儿女.人)⊓≥3 有儿女

没有女儿的母亲≡((人⊓女性)⊓∃有儿女.人)⊓∀有儿女.(¬(人⊓女性))

妻子≡(人⊓女性)⊓∃有丈夫.(人⊓¬(人⊓女性))

**定理 9.3.19**　设 $\mathscr{T}$ 是非循环的 Tbox, $\mathscr{T}'$是 $\mathscr{T}$ 的伸展, 则

i) $\mathscr{T}$ 和 $\mathscr{T}'$有相同的名符号和基符号.

ii) $\mathscr{T}$ 和 $\mathscr{T}'$是等价的, 即解释 $\boldsymbol{I}$ 是 $\mathscr{T}$ 的模型当且仅当 $\boldsymbol{I}$ 是 $\mathscr{T}'$的模型.

iii) $\mathscr{T}$ 和 $\mathscr{T}'$都是确定型的.

**证**　i)由定义 9.3.17 知, 设 $B$ 是 $\mathscr{T}$ 中右边出现的符号名, 则 $\mathscr{T}$ 中有定义 $B\equiv D$, 这个定义中的 $B$ 仍然存在, 所以消除右边符号名运算并未减少 $\mathscr{T}$ 中的符号名. 这种消除运算也未增添任何符号名, 所以 $\mathscr{T}$ 和 $\mathscr{T}'$有相同的符号名(即名符号). 至于基符号, 在消除运算中只可能增加其出现的次数而不会产生新的基符号. 所以 i)成立.

ii)设 $\boldsymbol{I}$ 是 $\mathscr{T}$ 的模型, 则 $\boldsymbol{I}$ 满足 $\mathscr{T}$ 中的每个定义. 设 $A\equiv C$ 是 $\mathscr{T}$ 中的一个定义, $C$ 中含有符号名 $B$, 这时 $\mathscr{T}$ 中有定义 $B\equiv D$. $\boldsymbol{I}$ 既满足 $A\equiv C$, 也满足 $B\equiv D$, 所以当用 $D$ 取代 $C$ 中的 $B$ 后所得的新定义 $A\equiv C_1$, 也被 $\boldsymbol{I}$ 满足, 因为这只是用了一次等量(实为解释域 $\Delta$ 中的子集合)代换. 反过来, 如果 $\boldsymbol{I}$ 满足 $A\equiv C_1$ 和 $B\equiv D$(后者在消除右边符号名运算中并未被消除), 则 $\boldsymbol{I}$ 也满足 $A\equiv C$ 和 $B\equiv D$. 可见, $\boldsymbol{I}$ 满足消除运算前的 Tbox 当且仅当 $\boldsymbol{I}$ 满足进行了一次消除运算后所得的 Tbox. 因为 $\mathscr{T}'$可由 $\mathscr{T}$ 出发进行有限次消除运算而得到, 所以 $\boldsymbol{I}$ 满足 $\mathscr{T}$ 当且仅当 $\boldsymbol{I}$ 满足 $\mathscr{T}'$, 从而 $\mathscr{T}$ 与 $\mathscr{T}'$等价.

iii)以上只是说如果 $\boldsymbol{I}$ 是 $\mathscr{T}$ 的模型, 则 $\boldsymbol{I}$ 也是 $\mathscr{T}'$的模型, 且反之亦然, 但并未说 $\mathscr{T}$ 或 $\mathscr{T}'$是不是有模型. 事实上, $\mathscr{T}'$有模型是容易证明的, 因为 $\mathscr{T}'$中的定义都具有形式 $A\equiv C'$, 这里 $C'$中不含任何符号名, 即 $C'$中只含有基符号. 设 $J$ 是 Tbox $\mathscr{T}'$中的任一基解释, 作解释 $\boldsymbol{I}$ 使其与 $J$ 有相同的解释域, 且使 $\boldsymbol{I}$ 对基符号的解释与 $J$ 的解释相同. 再对于 $\mathscr{T}'$中的定义 $A\equiv C'$, 令

$$A^{I} = (C')^{J},\qquad A \text{ 是 } \mathscr{T}' \text{ 中的符号名}, \tag{9.3.7}$$

则 $\boldsymbol{I}$ 是 $J$ 的扩充, 且由(9.3.7)式知 $\boldsymbol{I}$ 是 $\mathscr{T}'$的模型. 这时由 ii)知 $\boldsymbol{I}$ 也是 $\mathscr{T}$ 的模型. $\boldsymbol{I}$ 显然是 $J$ 的唯一一个成为 $\mathscr{T}$ 和 $\mathscr{T}'$模型的扩充, 所以由定义 9.3.13 知 $\mathscr{T}$ 和 $\mathscr{T}'$都是确定型的.

**注 9.3.20**　以上证明了非循环的 Tbox 一定是确定型的, 但循环的 Tbox 也可能是确定型的. 比如, 设 $\mathscr{T}$ 是只含有下面一个定义的循环的 Tbox:

$$A \equiv \forall R.B \sqcup \exists R.(A \sqcap \neg A). \tag{9.3.8}$$

因为对任一解释 $I$ 而言均有$(\exists R.(A\sqcap\neg A))^I=\varnothing$，所以(9.3.8)式与 $A\equiv\forall R.B$ 等价，而后者显然是非循环的、确定型的，所以 $\mathscr{T}$ 也是确定型的. 可以证明，任一确定型的 Tbox 一定等价于某个非循环的 Tbox(见文献[82]). 比如，上面的确定型 Tbox $\mathscr{T}$ 就等价于非循环的 Tbox $\mathscr{T}_1=\{A\equiv\forall R.B\}$.

### 9.3.4 不动点语义

研究 Tbox 及其可满足性的一个方法是用映射的观点来描述 Tbox.

**定义 9.3.21** 设 Tbox $\mathscr{T}$ 中含有 $n$ 条定义如下：

$$A_1\equiv C_1,$$
$$\cdots\cdots$$
$$A_n\equiv C_n.$$

令 $D_l=\{A_1,\cdots,A_n\}$，$D_r=\{C_1,\cdots,C_n\}$，则可把 $\mathscr{T}$ 看成是一个映射

$$\mathscr{T}:D_l\to D_r.$$

这里 $\mathscr{T}(A_i)=C_i(i=1,\cdots,n)$.

**定义 9.3.22** 设 $\mathscr{T}$ 是一个 Tbox，$J$ 是 $\mathscr{T}$ 的一个固定的基解释，用 $\mathrm{Ext}_J$ 表示 $J$ 的所有的扩充之集，则 $J$ 诱导一个映射

$$\mathscr{T}_J:\mathrm{Ext}_J\to\mathrm{Ext}_J \tag{9.3.9}$$

如下：设 $I$ 是 $J$ 的任一扩充，令 $\mathscr{T}_J(\mathrm{I})$ 由下式确定

$$A^{\mathscr{T}_J(I)}=(\mathscr{T}(A))^I, \tag{9.3.10}$$

即

$$A^{\mathscr{T}_J(I)}=C^I.$$

这里 $A\equiv C$ 是 $\mathscr{T}$ 中的任一定义，则 $\mathscr{T}_J(I)$ 是 $J$ 的又一扩充.

**注 9.3.23** $J$ 的扩充 $I$ 只是 $\mathscr{T}$ 的一个解释，并不保证 $I$ 满足 $\mathscr{T}$，所以这种扩充可以有许多，(9.3.10)式给出了由一个扩充 $I$ 制做另一个扩充 $\mathscr{T}_J(I)$ 的方法，这也正是映射 $\mathscr{T}_J$ 的定义.

**定义 9.3.24** 在(9.3.10)式中如果 $\mathscr{T}_J(I)=I$，则称 $I$ 为映射 $\mathscr{T}_J$ 的**不动点**.

**定理 9.3.25**(不动点定理) 设 $\mathscr{T}$ 是一个 Tbox，$I$ 是 $\mathscr{T}$ 的一个解释，$J$ 是 $I$ 在 $\mathscr{T}$ 中基符号之集上的限制，则 $I$ 是 $\mathscr{T}$ 的模型当且仅当 $I$ 是映射 $\mathscr{T}_J$ 的不动点，简称 $I$ 为 **$J$-不动点**，或 **$J$-模型**.

**证** 设 $I$ 是映射 $\mathscr{T}_J$ 的不动点，$A\equiv C$ 是 $\mathscr{T}$ 中任一定义，则 $\mathscr{T}(A)=C$. 由 $\mathscr{T}_J(I)=I$ 和(9.3.10)式知

$$A^I=A^{\mathscr{T}_J(I)}=(\mathscr{T}(A))^I=C^I,$$

所以 $I$ 是 $\mathscr{T}$ 的模型.

反过来，设 $I$ 是 $\mathscr{T}$ 的模型，则 $A^I=(\mathscr{T}(A))^I$. 这时由(9.3.10)式得

$$A^{\mathscr{T}_J(I)}=A^I,$$

所以 $\mathscr{T}_J(\boldsymbol{I})$ 和 $\boldsymbol{I}$ 对符号名的解释相等. 对于基符号 $C$, 由 $J$ 是 $\boldsymbol{I}$ 的限制知 $C^I = C^J$, 且由 $\mathscr{T}_J(\boldsymbol{I})$ 是 $J$ 的扩充知 $C^{\mathscr{T}_J(I)} = C^J$. 所以仍有 $C^{\mathscr{T}_J(I)} = C^I$. 这就证明了 $\mathscr{T}_J(I) = I$, 即 $\boldsymbol{I}$ 是映射 $\mathscr{T}_J(I)$ 的不动点.

**推论 9. 3. 26**　设 $\mathscr{T}$ 是一个 Tbox, 则 $\mathscr{T}$ 是确定型的 Tbox 的充要条件是 $\mathscr{T}$ 的每个基解释 $J$ 都有唯一的扩充 $\boldsymbol{I}$ 使 $\boldsymbol{I}$ 成为映射 $\mathscr{T}_J$ 的不动点.

至此我们已看到, 对于确定型的 Tbox$\mathscr{T}$ 而言, 它的每个基解释 $J$ 都可唯一地扩充为 $\mathscr{T}$ 的一个模型 $\boldsymbol{I}$, 也就是使 $\boldsymbol{I}$ 成为映射 $\mathscr{T}_J$ 的唯一的不动点. 正因为有了这种唯一性, 所以才把 $\mathscr{T}$ 称为确定型的. 我们从定理 9. 3. 19 看到, 凡是非循环的 Tbox 都是确定型的. 在注 9. 3. 20 中说过, 循环的 Tbox 也可能是确定型的, 但那是因为它实质上(从等价的意义上讲)是非循环的. 总之, 从等价的意义上讲, **确定型的 Tbox 就是非循环的 Tbox.** 下面给出一个循环的 Tbox 的例子, 它不是确定型的.

**例 9. 3. 27**　设 Tbox $\mathscr{T}$ (*Momo*) 只含有一个循环定义, 即

$$Momo \equiv \text{人} \sqcap \forall \text{有儿女}.\, Momo. \tag{9.3.11}$$

$\mathscr{T}$ 中含有两个基符号: 人, 有儿女. 设 $J$ 是 $\mathscr{T}$ 的一个基解释, 其中

$$\Delta = \{\text{查理}_i \mid i = 1, 2, \cdots\} \cup \{\text{詹姆}_j \mid j = 1, \cdots, n\}, \tag{9.3.12}$$

$$\text{人}^J = \Delta, \tag{9.3.13}$$

$$\begin{aligned} \text{有儿女}^J = &\{(\text{查理}_i, \text{查理}_{i+1}) \mid i = 1, 2, \cdots\} \\ &\cup \{(\text{詹姆}_i, \text{詹姆}_{i+1}) \mid i = 1, \cdots n-1\}. \end{aligned} \tag{9.3.14}$$

这时 $J$ 有两个不动点扩充, 也就是 $\mathscr{T}$ (*Momo*) 有两个由 $J$ 扩充而得的模型.

i) $\boldsymbol{I}_1$: 只需在 $J$ 的基础上再补充对符号名 *Momo* 的解释就得到 $\boldsymbol{I}_1$

$$Momo^{I_1} = \{\text{詹姆}_i \mid i = 1, \cdots, n\}. \tag{9.3.15}$$

应当证明 $\boldsymbol{I}_1$ 满足(9. 3. 11)式. 由于$\text{人}^{I_1} = \text{人}^J = \Delta$, 只需证

$$(\forall \text{有儿女}.\, Momo)^{I_1} = \{\text{詹姆}_i \mid i = 1, \cdots, n\}. \tag{9.3.16}$$

事实上, 由(9. 3. 12)式、(9. 3. 14)式和(9. 3. 15)式得

$$\begin{aligned} (\forall \text{有儿女}.\, Momo)^{I_1} &= \{a \in \Delta \mid \text{有儿女}[a] \subset Momo^{I_1}\} \\ &= \{\text{詹姆}_i \mid \text{有儿女}[\text{詹姆}_i] \subset \{\text{詹姆}_j \mid j = 1, \cdots, n\}\} \\ &= \{\text{詹姆}_i \mid i = 1, \cdots, n\}. \end{aligned}$$

这最后一步所得的集合中含有$\text{詹姆}_n$ 是因为

$$\text{有儿女}[\text{詹姆}_n] = \varnothing \subset \{\text{詹姆}_j \mid j = 1, \cdots, n\}$$

成立. 这就证明了(9. 3. 16)式.

ii) $\boldsymbol{I}_2$: 令

$$Momo^{I_2}=\Delta,$$

则

$$(\forall 有儿女.Momo)^{I_2}=\{a\in\Delta\,|\,有儿女[a]\subset\Delta\}=\Delta,$$

所以由(9.3.13)式知 $\boldsymbol{I}_2$ 满足(9.3.11)式，可见 $\boldsymbol{I}_2$ 是 $\mathscr{T}$ (*Momo*)的另一个不同于 $\boldsymbol{I}_1$ 的模型.

**注 9.3.28** 有些循环的 Tbox 是有实际应用背景的. 比如，二叉树是一个常用的概念，而下面关于二叉树的定义就是循环的：

$$二叉树\equiv树\sqcap\leqslant 2\ 有分枝\sqcap\forall 有分枝.二叉树. \tag{9.3.17}$$

**定义 9.3.29** 设 $J$ 是 Tbox $\mathscr{T}$ 的一个基解释，$\boldsymbol{I}_1$ 和 $\boldsymbol{I}_2$ 是 $J$ 的两个扩充，如果对 $\mathscr{T}$ 中的每个符号名 $A$ 都有 $A^{I_1}\subset A^{I_2}$，则称 $\boldsymbol{I}_1$ 小于或等于 $\boldsymbol{I}_2$，记作 $\boldsymbol{I}_1\leqslant\boldsymbol{I}_2$，即

$$\boldsymbol{I}_1\leqslant\boldsymbol{I}_2 \quad 当且仅当 \quad A^{I_1}\subset A^{I_2},\ A 是 \mathscr{T} 中的符号名. \tag{9.3.18}$$

显然，$\mathrm{Ext}_J$ 上的这种关系≤是自反的、传递的和反对称的，所以($\mathrm{Ext}_J$，≤)构成一个偏序集.

**命题 9.3.30** 设 $J$ 是 Tbox $\mathscr{T}$ 的一个基解释，则($\mathrm{Ext}_J$，≤)构成一个完备格.

**证** 任取 $\mathrm{Ext}_J$ 中的一族 $J$ 的扩充$\{\boldsymbol{I}_t\,|\,t\in T\}$，对 $\mathscr{T}$ 中的符号名 $A$ 令

$$A^{I^*}=\cup\{A^{I_t}\,|\,t\in T\},$$

并且令 $\boldsymbol{I}^*$ 对 $\mathscr{T}$ 中基符号的解释和 $J$ 一致，则 $\boldsymbol{I}^*\in\mathrm{Ext}_J$，显然 $\boldsymbol{I}^*$ 是$\{\boldsymbol{I}_t\,|\,t\in T\}$的上确界. 类似可证$\{\boldsymbol{I}_t\,|\,t\in T\}$也有下确界，即由下式定义的 $\boldsymbol{I}_*\in\mathrm{Ext}_J$：

$$A^{I_*}=\cap\{A^{I_t}\,|\,t\in T\}.$$

所以($\mathrm{Ext}_J$，≤)是完备格.

**定义 9.3.31** 设 $\mathscr{T}$ 是一个 Tbox，如果对 $\mathscr{T}$ 的每个基解释 $J$，映射 $\mathscr{T}_J$：($\mathrm{Ext}_J$，≤)→($\mathrm{Ext}_J$，≤)都是单调的，即

$$若\ \boldsymbol{I}_1\leqslant\boldsymbol{I}_2,\quad 则\ \mathscr{T}_J(\boldsymbol{I}_1)\leqslant\mathscr{T}_J(\boldsymbol{I}_2),\quad \boldsymbol{I}_1,\boldsymbol{I}_2\in\mathrm{Ext}_J.$$

称 $\mathscr{T}$ 是**单调的** Tbox.

**定理 9.3.32** 不含非运算¬的 $\mathscr{ALCN}$ Tbox 是单调的.

**证** 设 $\mathscr{T}$ 是 $\mathscr{ALCN}$ Tbox 且 $\mathscr{T}$ 中不出现运算¬，$J$ 是 $\mathscr{T}$ 的一个基解释，$\boldsymbol{I}_1,\boldsymbol{I}_2\in\mathrm{Ext}_J$，即 $\boldsymbol{I}_1,\boldsymbol{I}_2$ 是 $J$ 的两个扩充. 设 $\boldsymbol{I}_1\leqslant\boldsymbol{I}_2$，我们应当证明

$$\mathscr{T}_J(\boldsymbol{I}_1)\leqslant\mathscr{T}_J(\boldsymbol{I}_2). \tag{9.3.19}$$

由扩充的定义(9.3.10)式知为此只需对 $\mathscr{T}$ 中任一定义 $A\equiv C$ 证明

$$(\mathscr{T}(A))^{I_1}\subset(\mathscr{T}(A))^{I_2},\quad 即\ C^{I_1}\subset C^{I_2}. \tag{9.3.20}$$

按 $C$ 的复杂程度归纳地证明(9.3.20)式.

i) 如果 $C$ 是名符号或 **T** 与 ⊥，则由 $\boldsymbol{I}_1\leqslant\boldsymbol{I}_2$ 的假设和解释的定义 9.3.3 知(9.3.20)式成立.

ii) 设当 $C$ 是 $D_1$ 和 $C$ 是 $D_2$ 时(9. 3. 20)式成立，则由解释 $\boldsymbol{I}_1$ 和 $\boldsymbol{I}_2$ 既保交、又保并知当 $C$ 是 $D_1 \sqcup D_2$ 和 $C$ 是 $D_1 \sqcap D_2$ 时(9. 3. 20)式也成立.

iii)设当 $C$ 是 $D$ 时(9. 3. 20)式成立，则由 $R^{I_1} = R^J = R^{I_2}$和(9. 3. 2)式得

$$\begin{aligned}(\forall R.D)^{I_1} &= \{a \in \Delta \mid R^{I_1}[a] \subset D^{I_1}\} \\ &= \{a \in \Delta \mid R^J[a] \subset D^{I_1}\} \\ &\subset \{a \in \Delta \mid R^J[a] \subset D^{I_2}\} \\ &= \{a \in \Delta \mid R^{I_2}[a] \subset D^{I_2}\} \\ &= (\forall R.D)^{I_2}.\end{aligned}$$

所以当 $C$ 是 $\forall R.D$ 时(9. 3. 20)式也成立. 类似可证(9. 3. 20)式对 $\exists R.D$ 也成立.

iv)设 $C$ 是 $\geqslant nR$ 或 $\leqslant nR$，则 $C$ 是基符号，$\boldsymbol{I}_1$ 与 $\boldsymbol{I}_2$ 对 $C$ 的解释均与 $J$ 对 $C$ 的解释相同，所以(9. 3. 20)式仍成立.

综上所述知(9. 3. 20)式恒成立，所以由 $J$ 的任意性知 $\mathscr{T}$ 是单调的 Tbox.

**引理 9. 3. 33**　设 $(L, \leqslant)$ 是完备格，$f:(L, \leqslant) \to (L, \leqslant)$ 是单调映射(即保序 $\leqslant$ 的映射)，则

i) $f$ 有不动点，即存在 $a \in L$ 使 $f(a) = a$.

ii) $f$ 有最大不动点和最小不动点.

**证**　i)令 $H = \{a \in L \mid a \leqslant f(a)\}$，$a^* = \sup H$，则 $\forall a \in H$，由 $a \leqslant a^*$ 以及 $f$ 保序得 $f(a) \leqslant f(a^*)$. 再由 $a \in H$ 得 $a \leqslant f(a^*)$，即 $f(a^*)$ 是 $H$ 的上界，所以 $a^* \leqslant f(a^*)$. 由此又得 $f(a^*) \leqslant ff(a^*)$，可见 $f(a^*) \in H$，那么 $f(a^*) \leqslant a^*$. 这就证明了 $a^* = f(a^*)$，即 $a^*$ 是 $f$ 的不动点.

ii)承上，设 $b$ 是 $f$ 的任一不动点，则 $b \leqslant f(b)$ 成立，所以 $b \in H$，从而 $b \leqslant a^*$. 可见 $a^*$ 是 $f$ 的最大不动点. 请读者自行证明 $f$ 也有最小不动点.

由不动点定理 9. 3. 25、命题 9. 3. 30、定义 9. 3. 31、定理 9. 3. 32 和引理 9. 3. 33 得如下定理.

**定理 9. 3. 34**　设 $\mathscr{T}$ 是单调的 Tbox，特别是如果 $\mathscr{T}$ 是不含非运算的 $\mathscr{ALCN}$ Tbox，则对 $\mathscr{T}$ 的任一基解释 $J$，映射 $\mathscr{T}_J$ 有最大和最小的 $J$-不动点，它们分别是 $\mathscr{T}$ 的最大 $J$-模型和最小 $J$-模型，并分别记为 $G$-$J$-模型和 $L$-$J$-模型.

**推论 9. 3. 35**　设 $\mathscr{T}$ 是确定型的 Tbox，则对 $\mathscr{T}$ 的每个基解释，$\mathscr{T}$ 恰有一个 $J$-模型，这时 $G$-$J$-模型与 $L$-$J$-模型相等.

**注 9. 3. 36**　i)含有非运算的 Tbox 不必是单调的. 比如，设 $\mathscr{T}$ 只含有一个定义

$$A \equiv \forall R. \neg A.$$

设 $J$ 是 $\mathscr{T}$ 的基解释，解释域 $\Delta = \{a, b\}$，$R^J = \{(a, b), (b, a)\}$. 设 $\boldsymbol{I}_1$ 和 $\boldsymbol{I}_2$ 是 $J$ 的两个扩充，这里 $A^{I_1} = \{a\}$，$A^{I_2} = \Delta$，那么 $\boldsymbol{I}_1 \leqslant \boldsymbol{I}_2$，但这时

$$(\forall R.\neg A)^{I_1} = \{x \in \Delta | R^J[x] \subset (\neg A)^{I_1}\}$$
$$= \{x \in \Delta | R^J[x] \subset \{b\}\} = \{a\}.$$
$$(\forall R.\neg A)^{I_2} = \{y \in \Delta | R^J[y] \subset (\neg A)^{I_2}\}$$
$$= \{y \in \Delta | R^J[y] \subset \varnothing\} = \varnothing.$$

可见，由 $J$ 诱导的映射 $\mathscr{T}_J$ 不是单调的，$\mathscr{T}$ 也就不是单调 Tbox.

ii) 承上，设 $\boldsymbol{I}_3$ 和 $\boldsymbol{I}_4$ 是 $J$ 的两个扩充，这里 $A^{I_3} = \{a\}$，$A^{I_4} = \{b\}$，则

$$(\forall R.\neg A)^{I_3} = \{a\} = A^{I_3},$$
$$(\forall R.\neg A)^{I_4} = \{z \in \Delta | R^J[z] \subset (\neg A)^{I_4}\}$$
$$= \{z \in \Delta | R^J[z] \subset \{a\}\} = \{b\} = A^{I_4},$$

所以 $\boldsymbol{I}_3$ 和 $\boldsymbol{I}_4$ 都是 $\mathscr{T}_J$ 的不动点，而且是 $\mathscr{T}_J$ 的仅有的不动点，且二者不可比较，可见 $G$-$J$-模型与 $L$-$J$-模型都不存在.

### 9.3.5 广义 Tbox

**定义 9.3.37** i) 称概念包含 $A \sqsubseteq C$ 为**特殊化**(specilization)，这里 $A$ 是名符号.

ii) 由有限多个定义和特殊化构成的集合为**广义 Tbox**.

显然，不含特殊化的广义 Tbox 就是 Tbox.

**定义 9.3.38** 设 $\mathscr{T}$ 是一个广义 Tbox，对于 $\mathscr{T}$ 中的每个特殊化 $A \sqsubseteq C$，添加一个新的基符号 $A^*$，并用 $A \equiv A^* \sqcap C$ 取代 $A \sqsubseteq C$，则得一 Tbox $\mathscr{T}^*$，称为 $\mathscr{T}$ 的**正规化**.

**命题 9.3.39** 设 $\mathscr{T}$ 是广义 Tbox，$\mathscr{T}^*$ 是 $\mathscr{T}$ 的正规化，则

i) $\mathscr{T}^*$ 的模型也是 $\mathscr{T}$ 的模型.

ii) 设 $\boldsymbol{I}$ 是 $\mathscr{T}$ 的模型，则存在 $\mathscr{T}^*$ 的模型 $\boldsymbol{I}^*$，$\boldsymbol{I}^*$ 和 $\boldsymbol{I}$ 有相同的解释域，并且二者对 $\mathscr{T}$ 中符号名和角色的解释相同.

**证** i) 设 $\boldsymbol{I}^*$ 是 $\mathscr{T}^*$ 的模型，$A \sqsubseteq C$ 是 $\mathscr{T}$ 中任一特殊化，则此特殊化对应 $\mathscr{T}^*$ 中的定义 $A \equiv A^* \sqcap C$. 由 $\boldsymbol{I}^*$ 满足此定义得

$$A^{I^*} = (A^* \sqcap C)^{I^*} = (A^*)^{I^*} \cap C^{I^*}.$$

所以 $A^{I^*} \subset C^{I^*}$，即 $\boldsymbol{I}^*$ 满足特殊化 $A \sqsubseteq C$. 所以 $\boldsymbol{I}^*$ 也是 $\mathscr{T}$ 的模型.

ii) 设 $\boldsymbol{I}$ 是 $\mathscr{T}$ 的模型，补充定义 $(A^*)^{I^*} = A^I$，且令 $\boldsymbol{I}^*$ 的解释域与 $\boldsymbol{I}$ 一致，$\boldsymbol{I}^*$ 对 $\mathscr{T}$ 中的符号名和角色的解释也与 $\boldsymbol{I}$ 一致，则由 $\boldsymbol{I}$ 是 $\mathscr{T}$ 的模型从而满足 $A \subseteq C$ 知 $A^I \subset C^I$，所以

$$A^{I^*} = A^I = A^I \cap C^I = (A^*)^{I^*} \cap C^{I^*} = (A^* \sqcap C)^{I^*}.$$

所以 $I^*$ 满足 $A \equiv A^* \sqcap C$，$I^*$ 是 $\mathscr{T}^*$ 的模型.

### 9.3.6　Abox

以上我们较细致地研究了描述逻辑中的 Tbox 理论，现在介绍描述逻辑的另一重要组成部分，即 Abox 理论，这里 A 是 Assertion 的缩写，即 A 代表断言. Abox 就是一组断言之集.

**定义 9.3.40**　i) 设有集合 $\{a, b, c, \cdots\}$. 称其中的元素为**个体常元**(individual)，或简称为**常元**.

ii) 设 $C$ 是概念，$a$ 是常元，则称 $C(a)$ 为**概念断言**.

iii) 设 $R$ 是角色，$b$，$c$ 是常元，则称 $R(b, c)$ 为**角色断言**.

iv) 称由概念断言和角色断言组成的有限集为 Abox(或 world description).

v) 称由若干 Tbox 和若干 Abox 组成的集合为**知识库**(简称为 KB).

**注 9.3.41**　有许多不同类型的知识库，这里定义的知识库和 9.2 节中定义的知识库不同. 请读者考虑二者之间有无联系.

**例 9.3.42**　表 9.5 就是一个 Abox：

**表 9.5**

多子女母亲(玛丽)
有子女(玛丽，彼得)
父亲(彼得)
有子女(彼得，哈利)
有子女(玛丽，波耳)

从表 9.5 中看到“祖母(玛丽)”是成立的，因为玛丽的孩子彼得也有孩子，即哈利，可见玛丽是哈利的祖母.

**定义 9.3.43**　i) 设 $\mathscr{A}$ 是一个 Abox，称 $I$ 为 $\mathscr{A}$ 的一个解释，若 $I$ 有一个解释域 $\Delta$，$I$ 对 $\mathscr{A}$ 中涉及的概念的解释服从定义 9.3.3 的规定，即把概念解释为 $\Delta$ 的子集，把角色解释为 $\Delta$ 上的二元关系，并满足定义 9.3.3 中的各条性质. 此外，对于每一个常元 $a$，$a$ 的解释 $a^I \in \Delta$.

ii) 设 $C(a)$ 是 $\mathscr{A}$ 中的概念断言，称 $I$ **满足** $C(a)$，若 $a^I \in C^I$. 设 $R(b, c)$ 是 $\mathscr{A}$ 中的角色断言，称 $I$ **满足** $R(b, c)$，若 $(b^I, c^I) \in R^I$. 若解释 $I$ 满足 $\mathscr{A}$ 中的各断言，则称 **$I$ 满足 $\mathscr{A}$**，或称 $I$ 为 $\mathscr{A}$ 的**模型**.

iii) 经常假定对不同的常元 $a$ 与 $b$，其解释也不同，称此假设为 UNA(unique name assumption).

**定义 9.3.44** 基于个体常元可以引入两种新概念如下：

i) 设 $a_1, \cdots, a_n$ 为常元，则称 $\{a_1, \cdots, a_n\}$ 为**集**(set)，其解释 $\{a_1, \cdots, a_n\}^I = \{a_1^I, \cdots, a_n^I\} \subset \Delta$.

ii) 设 $a$ 为常元，$R$ 为角色，则称 $R{:}a$ 为**填充**(fill)，其解释 $(R{:}a)^I = \{d \in \Delta \mid (d, a^I) \in R^I\}$，它由 $\Delta$ 中和 $a^I$ 搭配起来满足关系 $R^I$ 的元素 $d$ 组成，至于这种 $d$ 是不是某个常元的解释，此处并未提及. 如果 $\{a\}$ 是集，则 $R{:}a$ 与 $\exists R.\{a\}$ 等价，即它们的解释相同.

为简便计，以下在不致混淆的情况下我们也把 $a^I$ 简写为 $a$.

### 9.3.7 相对于 Tbox 的概念推理

描述逻辑中的推理包括关于概念的推理、关于断言的推理以及关于 Tbox 与 Abox 结合起来的推理. 本小节先研究相对于某 Tbox 而言的概念推理.

**定义 9.3.45** 设 $\mathcal{T}$ 是一个 Tbox，$C$ 和 $D$ 是概念.

i) 称 $C$ 关于 $\mathcal{T}$ 而言**可满足**(satisfiable)，如果 $\mathcal{T}$ 有一个模型 $\boldsymbol{I}$ 使 $C^I$ 非空，否则称 $C$ **不可满足**(unsatisfiable).

ii) 称 $C$ 关于 $\mathcal{T}$ 而言**被 $D$ 包含**($C$ is subsumed by $D$)，如果对 $\mathcal{T}$ 的每个模型 $\boldsymbol{I}$ 均有 $C^I \subset D^I$，这可以简写为 $\mathcal{T} \models C \sqsubseteq D$，或 $C \sqsubseteq_{\mathcal{T}} D$.

iii) 称 $C$ 和 $D$ 关于 $\mathcal{T}$ 而言**等价**，若对 $\mathcal{T}$ 的每个模型 $\boldsymbol{I}$ 均有 $C^I = D^I$，简写为 $\mathcal{T} \models C \equiv D$，或 $C \equiv_{\mathcal{T}} D$.

iv) 称 $C$ 关于 $\mathcal{T}$ 而言与 $D$ **分离**，若对 $\mathcal{T}$ 的每个模型 $\boldsymbol{I}$ 均有 $C^I \cap D^I = \varnothing$.

**例 9.3.46** 相对于表 9.3 中的 Tbox $\mathcal{T}$ 而言

i) 女人被人所包含，即 $\mathcal{T} \models$ 女人 $\sqsubseteq$ 人.

ii) 母亲被女人和父母所包含，即 $\mathcal{T} \models$ 母亲 $\sqsubseteq$ 女人，$\mathcal{T} \models$ 母亲 $\sqsubseteq$ 父母.

iii) 女人和男人是分离的.

iv) 父亲和母亲是分离的.

容易验证下面的命题成立.

**命题 9.3.47**(向包含或不可满足的归约) 设 $\mathcal{T}$ 是 Tbox，$C$，$D$ 是概念，则关于 $\mathcal{T}$ 而言(向包含的归约)

i) $C$ 不可满足当且仅当 $C$ 被 $\perp$ 包含.

ii) $C$ 和 $D$ 等价当且仅当 $C$ 被 $D$ 包含且 $D$ 被 $C$ 包含.

iii) $C$ 和 $D$ 是分离的当且仅当 $C \sqcap D$ 被 $\perp$ 包含.

如果一般的非运算是允许的，则还有(向不可满足的归约).

iv) $C$ 被 $D$ 包含当且仅当 $C \sqcap \neg D$ 不可满足.

v) $C$ 和 $D$ 是分离的当且仅当 $C \sqcap D$ 不可满足.

vi) $C$ 和 $D$ 等价当且仅当 $C \sqcap \neg D$ 和 $D \sqcap \neg C$ 都不可满足.

关于 $\mathscr{T}$ 而言，以下 4 条彼此等价.

i)′ $C$ 不可满足.

ii)′ $C$ 被 $\bot$ 包含.

iii)′ $C$ 和 $\bot$ 等价.

iv)′ $C$ 和 $\top$ 是分离的.

**定义 9.3.48**　设 $\mathscr{T}$ 是一个非循环的 Tbox，$\mathscr{T}'$ 是 $\mathscr{T}$ 的伸展，$C$ 是一个概念. 对于 $C$ 中出现的 $\mathscr{T}$ 中的每个符号名 $A$，$A \equiv D$ 是 $\mathscr{T}$ 中的一个定义，用 $D$ 去替换 $C$ 中的 $A$，称所得结果 $C'$ 为 $C$ 关于 $\mathscr{T}$ 的伸展.

比如，设 $C$ 是概念男人 $\sqcap$ 女人，$\mathscr{T}$ 是表 9.3 中的 Tbox，则 $C$ 关于 $\mathscr{T}$ 的伸展

$$C' = 人 \sqcap \neg(人 \sqcap 女性) \sqcap 人 \sqcap 女性.$$

显然有(9.3.21)式成立：

$$\mathscr{T} \models C \equiv C'. \tag{9.3.21}$$

**定义 9.3.49**　设 $C$，$D$ 是概念.

i) 如果有解释 $\boldsymbol{I}$ 使 $C^I \neq \varnothing$，则称 $C$ **可满足**. 如果对每个解释 $\boldsymbol{I}$ 恒有 $C^I = \varnothing$，则称 $C$ **不可满足**.

ii) 如果对每个解释 $\boldsymbol{I}$ 均有 $C^I \subset D^I$，则称 $C$ **包含于** $D$，或 $C \sqsubseteq D$ 成立.

iii) 如果对每个解释 $\boldsymbol{I}$ 均有 $C^I = D^I$，则称 $C$ 和 $D$ **等价**.

iv) 如果对每个解释 $\boldsymbol{I}$ 均有 $C^I \cap D^I = \varnothing$，则称 $C$ 和 $D$ **分离**.

**命题 9.3.50**(Tbox 消去定理 1)　设 $\mathscr{T}$ 是非循环 Tbox，$C$，$D$ 是概念，$C'$ 和 $D'$ 分别是 $C$ 和 $D$ 关于 $\mathscr{T}$ 的伸展，则

i) $C$ 关于 $\mathscr{T}$ 可满足当且仅当 $C'$ 可满足.

ii) $C$ 关于 $\mathscr{T}$ 包含于 $D$ 当且仅当 $C'$ 包含于 $D'$.

iii) $C$ 关于 $\mathscr{T}$ 与 $D$ 等价当且仅当 $C'$ 与 $D'$ 等价.

iv) $C$ 关于 $\mathscr{T}$ 与 $D$ 分离当且仅当 $C'$ 与 $D'$ 分离.

**证**　只证明 i)，其余可类似地证明. 为证明 i)，先证明当 $C$ 关于 $\mathscr{T}$ 可满足时 $C'$ 可满足，而这是显然的，因为 $C$ 关于 $\mathscr{T}$ 可满足时 $\mathscr{T}$ 有模型 $\boldsymbol{I}$ 使 $C^I \neq \varnothing$. 那么关于这同一个 $\boldsymbol{I}$，由(9.3.21)式知 $C'^I \neq \varnothing$. 所以 $C'$ 可满足. 反过来，设 $C'$ 可满足，则有解释 $\boldsymbol{I}_0$ 使 $C'^{I_0} \neq \varnothing$. 由于 $C'$ 中只含有 $\mathscr{T}$ 中的基符号，在 $\boldsymbol{I}_0$ 的基础上对 $\mathscr{T}$ 中其余基符号进行任意的补充解释就得到 $\mathscr{T}$ 的一个基解释 $J$. 自然 $C'^{I_0} = C'^J$. 由于 $\mathscr{T}$ 是非循环 Tbox，$J$ 可唯一地扩充为 $\mathscr{T}$ 的一个模型 $\boldsymbol{I}$. 由 $C'$ 不含 $\mathscr{T}$ 中名符号知 $C'^J = C'^I$，所以

$$C'^I = C'^J = C'^{I_0} \neq \varnothing.$$

再由(9.3.21)式就得到 $C^I \neq \varnothing$. 所以 $C$ 关于 $\mathscr{T}$ 可满足.

**注 9.3.51**　对于非循环的 Tbox $\mathscr{T}$ 而言，只要把每个概念 $C$ 换为它关于

$\mathscr{T}$ 的伸展 $C'$，那么这些伸展后的概念是否可满足或相互包含或分离就可以摆脱掉 $\mathscr{T}$ 而独立自主地对一般的解释 $\boldsymbol{I}$ 进行检验，也不用管该解释 $\boldsymbol{I}$ 是不是 $\mathscr{T}$ 的模型了. 这固然是很大的方便，但把每个概念都换成它的伸展将会使 $\mathscr{T}$ 变得很庞大. 从计算的角度去看，新的 Tbox $\mathscr{T}'$的复杂程度可能相对于 $\mathscr{T}$ 而言呈指数增长的趋势(见文献[82]).

对于一种简单的语言而言，概念包含问题的判断已完全解决.

**定义 9.3.52** i)除了原子概念(符号名)外，只有交 $C\sqcap D$ 和取值限制 $\forall R.C$ 被许可的语言记为 $\mathscr{FL}_0$.

ii)在 $\mathscr{FL}_0$ 中，具有下面形式的概念叫具有**正规形式**的概念.

$$A_1\sqcap\cdots\sqcap A_m\sqcap\forall R_1.C_1\sqcap\cdots\sqcap\forall R_n.C_n.$$

其中 $A_1,\cdots,A_m$ 是符号名.

由语言 $\mathscr{FL}_0$ 的定义知每个 $\mathscr{FL}_0$ 概念都可化为正规形式概念，因为 $\sqcap$ 是交换的和幂等的.

不难证明下面的命题，它表明在 $\mathscr{FL}_0$ 中概念包含问题是容易验证的.

**命题 9.3.53** 设 $C$，$D$ 是 $\mathscr{FL}_0$ 中的两个概念，这里

$$C=A_1\sqcap\cdots\sqcap A_m\sqcap\forall R_1.C_1\sqcap\cdots\sqcap\forall R_n.C_n,$$
$$D=B_1\sqcap\cdots\sqcap B_k\sqcap\forall S_1.D_1\sqcap\cdots\sqcap\forall S_l.D_l,$$

则 $C\sqsubseteq D$ 成立当且仅当

i) $\{B_1,\cdots,B_k\}\subset\{A_1,\cdots,A_m\}$.

ii) $\forall j\leqslant l$，存在 $i\leqslant n$ 使 $S_j=R_i$ 且 $C_i\sqsubseteq D_j$ 成立.

**证明提示**:只需证明条件 i)和 ii)的必要性. 关于 ii)，如果有 $j\leqslant l$ 使 $\forall i\leqslant n$ 均有 $S_j\neq R_i$，令 $S_j^I=\Delta\times\Delta$，$D_j^I=\varnothing$，$R_i^I=\varnothing(i=1,\cdots,n)$.

以上只是对于很简单的语言中的概念较完满地解决了概念包含问题. $\mathscr{ALCN}$中的概念包含问题十分复杂，我们留待最后再利用关于 Abox 的相容性检验方法去解决.

### 9.3.8 相对于 Abox 的断言推理

**定义 9.3.54** 设 $\mathscr{A}$ 是一个 Abox，$\mathscr{T}$ 是一个 Tbox.

i)如果 $\mathscr{A}$ 有模型，则称 $\mathscr{A}$ **是相容的**.

ii)如果 $\mathscr{A}$ 有模型 $\boldsymbol{I}$ 满足 $\mathscr{T}$，则称 $\mathscr{A}$ **关于** $\mathscr{T}$ **是相容的**.

iii)把 $\mathscr{A}$ 中每个概念断言 $C(a)$换为概念断言 $C'(a)$，这里 $C'$是概念 $C$ 关于 $\mathscr{T}$ 的伸展，称所得的 Abox $\mathscr{A}'$为 $\mathscr{A}$ **关于** $\mathscr{T}$ **的伸展**.

**命题 9.3.55**(Tbox 消去定理 2) 设 $\mathscr{A}$ 是一个 Abox，$\mathscr{T}$ 是一个非循环的 Tbox，则 $\mathscr{A}$ 关于 $\mathscr{T}$ 是相容的当且仅当 $\mathscr{A}$ 关于 $\mathscr{T}$ 的伸展 $\mathscr{A}'$是相容的.

**证** 设 $\mathscr{A}$ 关于 $\mathscr{T}$ 相容，则 $\mathscr{A}$ 有一个模型 $\boldsymbol{I}$，$\boldsymbol{I}$ 满足 $\mathscr{T}$. 任取 $\mathscr{A}$ 中的一个概

念断言 $C(a)$，则 $a^I \in C^I$. 因为 $C'$是 $C$ 关于 $\mathscr{T}$ 的伸展，由(9.3.21)式知 $C'^I = C^I$. 所以 $a^I \in C'^I$，即 $\boldsymbol{I}$ 满足 $C'(a)$. 由 $C$ 的任意性知 $\boldsymbol{I}$ 是 $\mathscr{A}'$的模型，所以 $\mathscr{A}'$是相容的.

反过来，设 $\mathscr{A}'$是相容的，则 $\mathscr{A}'$有模型 $J$. 由于 $\mathscr{A}'$中各概念断言中均不含 $\mathscr{T}$ 的名符号，所以 $J$ 是 $\mathscr{T}$ 的一个基解释(不去理会 $J$ 对个体常元的解释). 因为 $\mathscr{T}$ 是非循环的，$J$ 可以扩充为 $\mathscr{T}$ 的一个模型 $\boldsymbol{I}$，可以像证明命题 9.3.50 i)那样证明 $\boldsymbol{I}$ 也是 $\mathscr{A}$ 的模型，所以 $\mathscr{A}$ 关于 $\mathscr{T}$ 相容. 请读者补足余下的证明.

除了相容性检验以外，关于断言推理的又一个基本问题是所谓实例检验.

**定义 9.3.56**　设 $\mathscr{A}$ 是一个 Abox，$\alpha$ 是一个断言(不必属于 $\mathscr{A}$)，如果 $\mathscr{A}$ 的每个模型都满足 $\alpha$，则称 $\alpha$ **被** $\mathscr{A}$ **推出**，或 $\mathscr{A}$ **推出** $\alpha$，记为 $\mathscr{A} \models \alpha$. 对于给定的 $\mathscr{A}$ 和 $\alpha$，检验 $\mathscr{A} \models \alpha$ 是否成立的问题称为**实例检验**(instance check).

比如，以 $\mathscr{A}$ 记表 9.5 中的 Abox，$\alpha$ 表示祖母(玛丽)，则 $\mathscr{A} \models \alpha$ 成立.

下面的命题是自明的，它把实例检验问题与相容性检验问题联系了起来.

**命题 9.3.57**　设 $\mathscr{A}$ 是一个 Abox，$C(a)$是一个概念断言，则

$$\mathscr{A} \models C(a) \quad \text{当且仅当} \quad \mathscr{A} \cup \{\neg C(a)\} \text{ 不相容.} \tag{9.3.22}$$

前面已经讲过，检验一个概念是否可满足是概念推理中的基本问题. 下面的命题把概念推理与断言推理联系了起来.

**命题 9.3.58**　设 $C$ 是一个概念，$a$ 是一个常元，则

$$C \text{ 是可满足的} \quad \text{当且仅当} \quad \{C(a)\} \text{ 是相容的.} \tag{9.3.23}$$

证明留给读者.

请读者注意，(9.3.23)式中的概念可能是十分复杂的概念，这时检验只含有一个概念断言的 Abox$\{C(a)\}$是否相容的问题也就十分复杂. 我们将在最后一个小节里介绍解决此问题的所谓基于表格的算法(tableau - based algorithm).

**例 9.3.59**　设 $D_1 = (\exists R.A) \sqcap (\exists R.B)$，$D_2 = \exists R.(A \sqcap B)$. 问 $D_1$ 包含于 $D_2$ 是否成立？即是否对每个解释 $\boldsymbol{I}$ 均有 $D_1{}^I \subset D_2{}^I$？

**解**　在 $\mathscr{ALCN}$ 语言中，易证 $D_1 \sqsubseteq D_2$ 不成立等价于 $D_1 \sqcap \neg D_2$ 可满足. 由例 9.3.8 知 $\neg D_2$ 等价于 $\forall R.(\neg A \sqcup \neg B)$，令

$$C = (\exists R.A) \sqcap (\exists R.B) \sqcap \forall R.(\neg A \sqcup \neg B). \tag{9.3.24}$$

如果 $C$ 可满足，则 $D_1$ 包含于 $D_2$ 不成立. 由(9.3.24)式，如果有一个相容的 Abox $\mathscr{A} = \{C(a)\}$，则 $D_1$ 包含于 $D_2$ 不成立. 作 $\mathscr{A}$ 的解释 $\boldsymbol{I}$ 如下：

$$\boldsymbol{I} \text{ 的解释域 } \Delta = \{a, b, c\}.$$

$$R^I = \{(a, b), (a, c)\}.$$

$$A^I = \{b\}, B^I = \{c\}.$$

这里我们把 $\mathscr{A}$ 中的个体常元 $a$ 和它的 $\boldsymbol{I}$ 解释不加区分，即 $a^I = a$. 则

$$(\exists R.A)^I = \{x \in \Delta \mid R^I[x] \cap A^I \neq \varnothing\}.$$
$$= \{x \in \Delta \mid b \in R^I[x]\} = \{a\}.$$
$$(\exists R.B)^I = \{x \in \Delta \mid c \in R^I[x]\} = \{a\}.$$

又由

$$(\neg A \sqcup \neg B)^I = (\neg A)^I \sqcup (\neg B)^I = \{a, c\} \cup \{a, b\} = \Delta$$

知

$$(\forall R.(\neg A \sqcup \neg B))^I = \{x \in \Delta \mid R^I[x] \subset \Delta\} = \Delta.$$

所以 $a \in C^I$，即 $\mathscr{A} = \{C(a)\}$ 相容. 所以对最初问题的回答是否定的.

作为练习，请读者证明 $D_1 \sqcap \leqslant 1R$ 包含于 $D_2$.

### 9.3.9 封闭世界语义与开放世界语义

大家知道，在一个数据库中，某一信息的缺失就意味着该信息的否定信息成立. 比如，我们在北京国际机杨的信息显示牌上没有发现从北京到汉中的航班，我们就自然认为没有从北京到汉中的航班. 这种观点称为**封闭世界语义**(closed-world semantics). 但在 Abox 理论中，信息的缺失只表明信息不足，并不能因为缺失某一信息就认为该信息的否定信息成立. 这种观点称为**开放世界语义**(open-world semantics). 正因如此，Abox 理论中的实例检验问题往往难以解决，因而需要引入所谓案例分析(case analysis)作为辅助手段才可以求解. 我们先看一个著名的例子，即希腊神话中 Oedipus 弑父问题.

**例 9.3.60** 考虑表 9.6 中的 Abox $\mathscr{A}^{oe}$：

**表 9.6**

有子女(Iokaste, Oedipus)
有子女(Iokaste, Polyneikes)
有子女(Oedipus, Polyneikes)
有子女(Polyneikes, Thersandros)
弑父者(Oedipus)
¬弑父者(Thersandros)

相应的神话故事说 Oedipus 弑死了自己的父亲并和自己的母亲 Iokaste 结婚，生了儿子 Polyneikes. Polyneikes 又有儿子 Thersandros，他不是弑父者. 一个有趣的问题是

问题：Iokaste 是否有一个弑父者的儿子，他的儿子却不是弑父者？

或者令

$$C = \exists 有子女.(弑父者 \sqcap \exists 有子女.\neg 弑父者)$$

问

$$\mathscr{A}^{oe} \models C(\text{Iokaste})$$

是否成立?

如果不引入辅助手段，这一问题就无法回答. 因为 Iokaste 有两个儿子：Oedipus 和 Polyneikes. 前者确实是个弑父者，但他的儿子 Polyneikes 是不是弑父者却不得而知;后者有一个不是弑父者的儿子 Thersandros，但后者本人是不是弑父者也不得而知. 由于不使用封闭世界语义，所以信息不足，使上述问题无法回答. 我们现在引入辅助手段如下：

**定义 9.3.61**　设 $\mathscr{A}$ 是一个 Abox，$C$ 是一个概念，对每个个体常元 $a$，规定要么 $C(a)$ 在 $\mathscr{A}$ 中成立，要么 $\neg C(a)$ 在 $\mathscr{A}$ 中成立. 称此方法为**案例分析**(case analysis).

基于案例分析，前述问题将得到肯定的回答. 事实上，将问题中涉及的个体分为两类：

第一类个体 $a$：$a$ 是弑父者.

第二类个体 $a$：$a$ 不是弑父者.

i)设 Polyneikes 属于第一类，则因他是 Iokaste 的儿子，他的儿子 Thersandros 不是弑父者，所以问题的回答是 Yes.

ii)设 Polyneikes 属于第二类，则因 Iokaste 的弑父者儿子 Oedipus 有个非弑父者的儿子，所以问题的回答仍是 Yes.

### 9.3.10　基于表格的标准算法

由命题 9.3.47 知，在 $\mathscr{ALCN}$ 语言中，概念的可满足性问题和概念之间的包含问题可以相互转化. 由命题 9.3.58 知这又可转化为简单的 Abox 是否相容的问题. 比如，以下三个问题是彼此等价的：

i) $C \sqsubseteq D$ 成立.

ii) $C \sqcap \neg D$ 不可满足.

iii) $\{(C \sqcap \neg D)(a)\}$ 不相容.

其中 i)，ii)可认为是关于 Tbox 的问题，而 iii)则是关于 Abox 的问题. 但 i) ~ iii) 是等价的，这表明了 Tbox 理论与 Abox 理论之间的紧密联系.

前面已经讲过，上面出现的概念 $C$，$D$ 可能十分复杂，所以任何一个问题的解决都不简单. 本小节中介绍一种比较有效的求解方法，即**基于表格的标准算法**(tableau based standard algorithm)，这种算法是基于一种表格中给出的 6 种运算规则的算法.

首先注意，任何 $\mathscr{ALEN}$ 概念中的非运算都可等价地移动到原子概念的前面，我们称只在原子概念前面有非运算的概念具有**正规非形式**(negation normal form).

请读者仿照注 9.3.6 和例 9.3.8 证明下面的命题.

**命题 9.3.62** 任何一个 $\mathscr{ALEN}$ 概念都等价于一个具有正规非形式的概念.

其次，我们引入一种新的断言 $x \neq y$，这里 $x$ 和 $y$ 是某 Abox 中的个体常元. 规定解释 $\boldsymbol{I}$ 满足 $x \neq y$ 当且仅当 $x^I \neq y^I$. 由此看来，使 $x^I = y^I$ 的解释也是允许的，只不过这种 $\boldsymbol{I}$ 不满足 $x \neq y$ 而已. 注意:这与前面定义 9.3.43 iii) 中的 UNA 假设相抵触. 以下的讨论是在放弃 UNA 假设的基础上进行的. 显然 $x \neq y$ 与 $y \neq x$ 等价. 所以 $x \neq y$ 具有对称性.

**定义 9.3.63** 设 $\mathscr{A}$ 是一个 Abox. **基于表格的标准算法**由以下 6 种变换规则组成，如表 9.7:

**表 9.7 标准变换规则表**

i) 规则 $\rightarrow_{\sqcap}$.

条件: $\mathscr{A}$ 包含 $(C_1 \sqcap C_2)(x)$.

作用: 令 $\mathscr{A}' = \mathscr{A}^* \cup \{C_1(x), C_2(x)\}$. 这里 $\mathscr{A}^*$ 是从 $\mathscr{A}$ 中删去 $(C_1 \sqcap C_2)(x)$ 后所得之 Abox.

ii) 规则 $\rightarrow_{\sqcup}$.

条件: $\mathscr{A}$ 包含 $(C_1 \sqcup C_2)(x)$.

作用: 令 $\mathscr{A}' = \mathscr{A}^* \cup \{C_1(x)\}$, $\mathscr{A}'' = \mathscr{A}^* \cup \{C_2(x)\}$. 这里 $\mathscr{A}^*$ 是从 $\mathscr{A}$ 中删去 $(C_1 \sqcup C_2)(x)$ 后所得之 Abox.

iii) 规则 $\rightarrow_{\exists}$.

条件: $\mathscr{A}$ 包含 $(\exists R.C)(x)$.

作用: 令 $\mathscr{A}' = \mathscr{A}^* \cup \{C(y), R(x, y)\}$，这里 $y$ 是不在 $\mathscr{A}$ 中出现的个体常元，$\mathscr{A}^*$ 是从 $\mathscr{A}$ 中删去 $(\exists R.C)(x)$ 后所得之 Abox.

iv) 规则 $\rightarrow_{\forall}$.

条件: $\mathscr{A}$ 包含 $(\forall R.C)(x)$，且 $Y = \{y \mid R(x, y) \in \mathscr{A}\} = \{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$.

作用: 令 $\mathscr{A}' = \mathscr{A}^* \cup \{C(y_1), C(y_2), \cdots, C(y_n)\}$. 这里 $\mathscr{A}^*$ 是从 $\mathscr{A}$ 中删去 $(\forall R.C)(x)$ 后所得之 Abox.

v) 规则 $\rightarrow_{\geqslant}$.

条件: $\mathscr{A}$ 包含 $(\geqslant nR)(x)$.

作用: 令 $\mathscr{A}' = \mathscr{A}^* \cup \left\{R(x, y_i) \mid 1 \leqslant i \leqslant n\right\} \cup \{y_i \neq y_j \mid 1 \leqslant i < j \leqslant n\}$，这里 $y_1, \cdots, y_n$ 是互不相同且不在 $\mathscr{A}$ 中出现的个体常元，$\mathscr{A}^*$ 是从 $\mathscr{A}$ 中删去 $(\geqslant nR)(x)$ 后所得之 Abox.

vi) 规则$\rightarrow_{\leqslant}$.

条件：$\mathscr{A}$ 包含互不相同的个体常元 $y_1, \cdots, y_{n+1}$ 使 $(\leqslant nR)(x)$ 与 $R(x, y_1), \cdots, R(x, y_{n+1})$ 均包含于 $\mathscr{A}$，但存在 $i \neq j$，使 $y_i \neq y_j$ 不包含于 $\mathscr{A}(1 \leqslant i, j \leqslant n+1)$.

作用：若有 $i > j$ 使 $y_i \neq y_j$ 不包含于 $\mathscr{A}$，在 $\mathscr{A}$ 中用 $y_j$ 取代 $y_i$ 得一 Abox $\mathscr{A}_{i,j}$.

**命题 9.3.64**　在表 9.7 中

i) 对于情况 i), iii), iv), v) 而言，$\mathscr{A}$ 相容当且仅当 $\mathscr{A}'$ 相容.

ii) 对于情况 ii)，$\mathscr{A}$ 相容当且仅当 $\mathscr{A}'$ 或 $\mathscr{A}''$ 相容.

iii) 对于情况 vi)，$\mathscr{A}$ 相容当且仅当存在 $\mathscr{A}_{i,j}$ 相容.

**证**　i) 先看规则$\rightarrow_{\exists}$. 设 $\mathscr{A}$ 相容，则 $\mathscr{A}$ 有模型 $\boldsymbol{I}$，由 $\boldsymbol{I}$ 满足 $(\exists R.C)(x)$ 知

$$x^I \in \{a \in \Delta \mid R^I[a] \cap C^I \neq \varnothing\}.$$

这时有 $b \in \Delta$ 使 $(x^I, b) \in R^I$ 且 $b \in C^I$. 引入新常元 $y$ 并令 $y^I = b$，则 $\boldsymbol{I}$ 满足 $C(y)$ 和 $R(x, y)$，所以 $\boldsymbol{I}$ 是 $\mathscr{A}'$ 的模型，可见 $\mathscr{A}'$ 是相容的. 反过来，设 $\mathscr{A}'$ 有模型 $\boldsymbol{I}$，则 $\boldsymbol{I}$ 满足 $C(y)$ 和 $R(x, y)$，这时 $R^I[x^I] \cap C^I \neq \varnothing$，可见 $\boldsymbol{I}$ 满足 $(\exists R.C)(x)$，从而 $\boldsymbol{I}$ 是 $\mathscr{A}$ 的模型. 再看规则$\rightarrow_{\forall}$. 设 $Y \neq \varnothing$，$\mathscr{A}$ 有模型 $\boldsymbol{I}$，则由 $\boldsymbol{I}$ 满足 $(\forall R.C)(x)$ 和 $R(x_1, y_i)$ 知 $y_i^I \in R^I[x^I] \subset C^I (i = 1, \cdots, n)$，所以 $\boldsymbol{I}$ 满足 $\mathscr{A}'$. 反过来，设 $\mathscr{A}'$ 有模型 $I$，则 $y_i^I \in C^I$. 这时由 $R^I[x^I] = \{y_1^I, \cdots, y_n^I\}$ 知 $I$ 满足 $(\forall R.C)(x)$，从而 $I$ 是 $\mathscr{A}$ 的模型. 若 $Y = \varnothing$，$\boldsymbol{I}$ 是 $\mathscr{A}$ 的模型，则由 $\mathscr{A}' = \mathscr{A}^*$ 知 $\boldsymbol{I}$ 满足 $\mathscr{A}'$. 反过来，设 $\mathscr{A}'$ 有模型 $\boldsymbol{I}$，这时 $\mathscr{A}'$ 中不存在形如 $R(x, *)$ 的角色断言. 现在仅对 $R$ 的解释 $R^I$ 做修正，使在新解释 $\boldsymbol{I}'F$ 有

$$R^{I'}[x^{I'}] = \{a^{I'} \in \Delta \mid a \text{ 是 } \mathscr{A} \text{ 中出现的常元且 } R^{I'}(x^{I'}, a^{I'}) \text{成立}\} = \varnothing,$$

则 $(\forall R.\ C)(x)$ 被满足，同时新解释 $\boldsymbol{I}'$ 仍然满足 $\mathscr{A}$ 中其他的断言，所以 $\boldsymbol{I}'$ 是 $\mathscr{A}$ 的模型. 关于规则$\rightarrow_{\sqcap}$和$\rightarrow_{\geqslant}$的证明留给读者.

ii) 设 $\mathscr{A}$ 相容，$\boldsymbol{I}$ 是 $\mathscr{A}$ 的模型，则 $\boldsymbol{I}$ 满足 $(C_1 \sqcup C_2)(x)$，所以

$$x^I \in (C_1 \sqcup C_2)^I = C_1{}^I \cup C_2^I.$$

若 $x^I \in C_1^I$，则 $\mathscr{A}'$ 相容，若 $x^I \in C_2^I$，则 $\mathscr{A}''$ 相容. 反过来，当 $\mathscr{A}'$ 或 $\mathscr{A}''$ 相容时显然 $\mathscr{A}$ 也相容.

iii) 设 $\mathscr{A}$ 相容，$\boldsymbol{I}$ 是 $\mathscr{A}$ 的模型，则由 $\boldsymbol{I}$ 满足 $R(x, y_1), \cdots, R(x, y_{n+1})$ 知

$$(x^I, y_1^I), \cdots, (x^I, y_{n+1}^I) \in R^I.$$

又由 $\boldsymbol{I}$ 满足 $(\leqslant nR)(x)$ 知

$$\left|\left\{(x^I, y_1^I), \cdots, (x^I, y_{n+1}^I)\right\}\right| \leqslant n.$$

所以必有某 $y_i^I$ 与 $y_j^I$ 相等. 这时当然 $y_i \neq y_j$ 不是 $\mathscr{A}$ 中的断言，不妨设 $i > j$. 把 $\mathscr{A}$ 中各处出现的 $y_i$ 均用 $y_j$ 代替，那么如果 $C(y_i)$ 是 $\mathscr{A}$ 中的概念断言，则 $C(y_j)$ 是 $\mathscr{A}_{i,j}$

中的概念断言，如果$S(z, y_i)$是$\mathscr{A}$中的角色断言，则$S(z, y_j)$是$\mathscr{A}_{i,j}$中的角色断言，对于不含$y_i$的概念断言和角色断言$\alpha$，$\alpha\in\mathscr{A}$当且仅当$\alpha\in\mathscr{A}_{i,j}$. 所以由$y_i^I = y_j^I$和$\boldsymbol{I}$是$\mathscr{A}$的模型知$\boldsymbol{I}$也是$\mathscr{A}_{i,j}$的模型，即$\mathscr{A}_{i,j}$是相容的. 反过来，设$\mathscr{A}_{i,j}$是相容的，类似可证$\mathscr{A}$也是相容的.

**例 9.3.65** 设$\mathscr{A} = \{R(x, y_i) \mid i=1, 2, 3, 4\} \cup \{y_2\neq y_1, y_4\neq y_3\} \cup \{(\leqslant 2R)(x)\} \cup \{C(y_3)\}$，则

$$\begin{aligned}\mathscr{A}_{3,2} = &\{R(x, y_i) \mid i = 1, 2, 4\}\\ &\cup \{y_2 \neq y_1, y_4 \neq y_3\}\\ &\cup \{(\leqslant 2R)(x)\}\\ &\cup \{C(y_2)\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\mathscr{A}_{3,2})_{4,1} = &\{R(x, y_1), R(x, y_2)\}\\ &\cup \{y_2 \neq y_1, y_4 \neq y_3\}\\ &\cup \{(\leqslant 2R)(x)\}\\ &\cup \{C(y_2)\},\end{aligned}$$

设$\boldsymbol{I}$满足$\mathscr{A}$，则由$(\leqslant 2R)(x)\in\mathscr{A}$知$y_1^I, y_2^I, y_3^I, y_4^I$中必有两对相等. 由$y_2\neq y_1, y_4\neq y_3\in\mathscr{A}$知$y_3^I = y_2^I, y_3^I = y_1^I, y_4^I = y_2^I$和$y_4^I = y_1^I$都是可能的. 设$y_3^I = y_2^I$成立，则易证$\boldsymbol{I}$满足$\mathscr{A}_{3,2}$. 设还有$y_4^I = y_1^I$成立，则易证$\boldsymbol{I}$满足$(\mathscr{A}_{3,2})_{4,1}$. 但请读者注意，这时$\boldsymbol{I}$并不满足$\mathscr{A}_{3,1}$，因为这时$C(y_1)\in\mathscr{A}_{3,1}$，由$\boldsymbol{I}$满足$C(y_3)$和$y_3^I = y_2^I$推不出$\boldsymbol{I}$满足$C(y_1)$. 事实上，从$\mathscr{A}$出发运用变换规则 vi)可能会得出许多 Abox 来，如$\mathscr{A}_{3,2}, \mathscr{A}_{3,1}, \mathscr{A}_{4,2}, \mathscr{A}_{4,1}, (\mathscr{A}_{3,2})_{4,1}, (\mathscr{A}_{3,2})_{4,2}, \cdots$.

**定义 9.3.66** 设$\mathscr{S} = \{\mathscr{A}_1, \cdots, \mathscr{A}_n\}$是一族 Abox，则称$\mathscr{S}$ **相容**，如果有某个$\mathscr{A}_i (1\leqslant i\leqslant n)$相容.

由命题 9.3.64 得下面的推论.

**推论 9.3.67** 设$\mathscr{S} = \{\mathscr{A}_1, \cdots, \mathscr{A}_n\}$，$\mathscr{S}_1$是对$\mathscr{S}$中的 Abox 施行表 9.7 中的变换而得的 Abox 之集，则$\mathscr{S}$相容当且仅当$\mathscr{S}_1$相容.

**定理 9.3.68**(有限步终止定理) 设$\mathscr{A}$是一个具有正规非形式的$\mathscr{ALCN}$ Abox，则存在基于表格的标准算法，使得经过有限步变换之后所得 Abox 均不含如下形式的概念断言：

$$(C_1\sqcap C_2)(x), (C_1\sqcup C_2)(x), (\exists R.\ C)(x), (\forall R.\ C)(x), (\geqslant nR)(x) \tag{9.3.25}$$

并且变换规则$\rightarrow_{\leqslant}$无法再使用，从而算法在有限步内终止.

**证**　首先注意，因为$\mathscr{A}$具有正规非形式，所以其中的概念断言都具有表 9.7 中所列的 6 种形式之一；标准算法虽可生成新的角色断言，但对角色断言不进行变换，即算法只对概念断言进行变换. 其次，为证明本定理，我们引入概念断言的**层次度**如下：以 Strd $C(a)$记概念断言 $C(a)$的层次度，其归纳定义为：

$$\text{Strd}\ A(x)=0,\ \text{Strd}(\neg B(y))=0.$$

$$\text{Strd}(\geqslant nR)(x)=0,\ \text{Strd}(\leqslant nR)(x)=0.$$

$$\text{Strd}(C\sqcap D)(x)=\max\{\text{Strd}\ C(x),\ \text{Strd}\ D(x)\}+1.$$

$$\text{Strd}(C\sqcup D)(x)=\max\{\text{Strd}\ C(x),\ \text{Strd}\ D(x)\}+1.$$

$$\text{Strd}(\exists R.C)(x)=\text{Stra}\ C(x)+1.$$

$$\text{Strd}(\forall R.C)(x)=\text{Stra}\ C(x)+1.$$

以下事实显然成立：对于表 9.7 中的 6 条规则而言，

i) 前 3 条规则可以无条件地使用，每使用 1 次就使相应的概念断言的层次度减少 1.

ii) 第 4 条规则的使用也是无条件的，它消去一个概念断言$(\forall R.C)(x)$，但有可能(当 $n\geqslant 1$ 时)增加层次度较小的 $n$ 个概念断言.

断言的层次数总是有限的，规则使用后产生的新断言不仅个数有限，且层次数降低，所以运用 6 条规则会在有限步内终止.

iii) 第 5 条规则可以无条件地使用，每使用 1 次就使形如$(\geqslant nR)(x)$的概念断言减少 1 个.

iv) 第 6 条规则的使用是有条件的，使用后不减少形如$(\leqslant nR)(x)$的概念断言的个数.

此外，规则$\rightarrow_{\exists}$和$\rightarrow_{\geqslant}$的使用可导致角色断言以及形如 $y_i\neq y_j$ 的断言的增添，但表 9.7 中没有从它们开始的变换.

综上所述可见，除第 6 条规则外，对$\mathscr{A}$实施表 9.7 中的前 5 条变换都导致概念层次度的降低或形如$(\geqslant nR)(x)$的概念断言个数的减少. 由于$\mathscr{A}$中只含有有限多个概念断言，所以经过有限步变换之后规则 i) ~ v) 就无法使用，这时自然不再有(9.3.25)式中所列的 5 种概念断言. 最后，规则$\rightarrow_{\leqslant}$的使用仅仅导致个体常元个数的减小，所以经有限步之后必然停止.

**命题 9.3.69**　设$\mathscr{A}$是一个具有正规非形式的$\mathscr{ALCN}$ Abox，则$\mathscr{A}$是否相容可通过基于表格的标准算法在有限步之内判定.

**证**　由定理 9.3.68 知对$\mathscr{A}$实施基于表格的标准算法有限步之后算法停止.

i) 若最终得到的$\mathscr{A}'$中包含形如$(\leqslant nS)(u)$的概念断言. 那么由算法停止，规则$\rightarrow_{\leqslant}$无法使用知可能存在如下两种情况：

a) $\mathscr{A}'$中包含 $S(u,y_1),\cdots,S(u,y_{n+1})$以及 $y_i\neq y_j$. 这时

$$\{(\leqslant nS)(u),\ S(u,y_1),\cdots,\ S(u,y_{n+1}),\ y_i\neq y_j(1\leqslant i,j\leqslant n+1)\}. \tag{9.3.26}$$

不相容；

b) $\mathscr{A}'$中包含的形如$S(u,y)$的角色断言的个数$m\leqslant n$. 这时$\mathscr{A}'$的解释$I$不影响

$$\{(\leqslant nS)(u),\ S(u,y_1),\cdots,\ S(u,y_m),\ y_i\neq y_j(1\leqslant i,j\leqslant m)\}$$

的相容性. 从而可以不关心这种*Abox*而不影响对相容性的判定.

ii)因为(9.3.24)式中的各概念断言都不出现，所以其余影响相容性判断的概念断言的深度均为0，即具有$A(x)$或$\neg B(y)$的形式，这里$A$与$B$是原子概念.

如果称$\{A(x),\neg A(x)\}$和(9.3.26)式表示的Abox为冲撞(clash)，则$\mathscr{A}$相容的充要条件是:从$\mathscr{A}$出发经上述有限步标准运算最终所得的Abox集$\{\mathscr{A}_1,\cdots,\mathscr{A}_n\}$中至少有一个不含任何冲撞. 而这是通过观察就可以判定的.

由于$\mathscr{ALCN}$Abox恒可在有限步之内等价地变为具有正规非的形式，所以我们有下面的定理.

**定理9.3.70**(可判定性定理) 设$\mathscr{A}$是一个$\mathscr{ALCN}$Abox，则$\mathscr{A}$是否相容可通过基于表格的标准算法在有限步之内判定.

**推论9.3.71** 设$C^*$是一个$\mathscr{ALCN}$概念，则$C^*$是否可满足可在有限步之内判定.

**证** 令$\mathscr{A}=\{C^*(a)\}$，则由定理9.3.70即得本推论.

**例9.3.72** 设$C^*=(\exists R.A)\sqcap(\exists R.B)\sqcap(\forall R.(\neg A\sqcup\neg B))\sqcap(\leqslant 1R)$，问$C^*$是否可满足?

**解** 设$\mathscr{A}_0=\{C^*(x_0)\}$，则$\mathscr{A}_0$等价于

$$\mathscr{A}_1=\{(\exists R.A)(x_0),\ (\exists R.B)(x_0),\ (\forall R.(\neg A\sqcup\neg B))(x_0),\ (\leqslant 1R)(x_0)\}.$$

根据表9.7中的运算规则$\rightarrow_{\exists}$以及命题9.3.64中的分析iii)知$\mathscr{A}_1$又等价于

$$\mathscr{A}_2=\{A(y_1),\ R(x_0,y_1),\ B(y_2),\ R(x_0,y_2),\ (\forall R.(\neg A\sqcup\neg B))(x_0),\ (\leqslant 1R)(x_0)\}.$$

由类似地分析知$\mathscr{A}_2$又等价于

$$\mathscr{A}_3=\{A(y_1),\ R(x_0,y_1),\ B(y_2),\ R(x_0,y_2),\ (\neg A\sqcup\neg B)(y_1),\ (\neg A\sqcup\neg B)(y_2),\ (\leqslant 1R)(x_0)\}.$$

根据表9.7中的规则$\rightarrow_{\leqslant}$由$\mathscr{A}_3$得

$$(\mathscr{A}_3)_{2,1}=\{A(y_1),\ R(x_0,y_1),\ B(y_1),\ (\neg A\sqcup\neg B)(y_1),\ (\leqslant 1R)(x_0)\}.$$

最后，由规则$\rightarrow_{\sqcup}$，从上面的Abox又得出

$$(\mathscr{A}_3)'_{2,1} = \{A(y_1),\ R(x_0, y_1),\ B(y_1),\ (\neg A)(y_1),\ (\leqslant 1R)(x_0)\}.$$

$$(\mathscr{A}_3)''_{2,1} = \{A(y_1),\ R(x_0, y_1),\ B(y_1),\ (\neg B)(y_1),\ (\leqslant 1R)(x_0)\}.$$

因为以上两个 Abox 都含有冲撞，它们都不相容，所以 $\mathscr{A}_0 = \{C^*(x_0)\}$ 不相容，从而 $C^*$ 不可满足.

**注 9.3.73**　本书提出的基于表格的标准算法是文献[82]中基于表格的算法(tableau based algorithm)的简化形式，这种算法可以回避文献[82]中所说的出现循环和算法永不终止的情形发生. 我们的定理 9.3.70 可看成是文献[82]中定理 2.2.24 的一般化形式.

由于篇幅所限，本书没有讨论算法的空间和时间复杂度问题，有兴趣的读者可见文献[82].

# 参考文献


[1] Barnes D W, Mack J M. An Algebraic Introduction to Mathematical Logic. New York: Springer-Verlag, 1975

[2] 沈复兴. 模型论导引. 北京: 北京师范大学出版社, 1995

[3] Rescher N. Many-Valued Logic. New York: McGraw-Hill, 1969

[4] Epstein G. Multiple-Valued Logic Design. London: IOP Publishing Ltd., 1993

[5] 罗铸楷, 胡谋, 陈廷槐. 多值逻辑的理论与应用. 北京: 科学出版社, 1992

[6] 王国俊. Fuzzy 命题演算的一种形式演绎系统. 科学通报, 1997, 42(10): 1041 ~ 1045

[7] Kleene S C. Introduction to Metamathematics. Van Nostrand, 1952, Amsterdam and Princeton (中译本:莫绍揆译. 元数学导引. 北京: 科学出版社, 1985)

[8] 王国俊. 修正的 Kleene 系统中的 $\Sigma$-($\alpha$- 重言式)理论. 中国科学(E 辑), 1998, 28(2): 146 ~ 152

[9] Zadeh L A. Fuzzy Sets. Information and Control, 1965, 8: 338 ~ 353

[10] Dubois D, Prade H. Fuzzy sets in approximate reasoning. Fuzzy Sets and Systems, 1991, 40(1): 143 ~ 244

[11] Elkan C. The paradoxical success of fuzzy logic. IEEE Expert, 1994, 9(4): 3 ~ 8

[12] Elkan C. The paradoxical controversy over fuzzy logic. IEEE Expert, 1994, 9(4): 47 ~ 49

[13] Watkins F A. False controversy: fuzzy and non-fuzzy faux pas. IEEE Expert, 1995, 10(4): 4 ~ 5

[14] 吴望名. 关于模糊逻辑的一场争论. 模糊系统与数学, 1995, 9(2): 1 ~ 9

[15] Baldwin J F, Pilsworth. Axiomatic approach to implication for fuzzy reasoning using a fuzzy logic. Fuzzy Sets and Systems, 1980, 4(3): 193 ~ 219

[16] 刘叙华. 广义模糊逻辑和锁语义归结原理. 计算机学报, 1980, 3(2): 97 ~ 111

[17] Schwartz D G. Axioms for a theory of semantic equivalence. Fuzzy Sets and Systems, 1987, 21(3): 319 ~ 350

[18] Gottward S. Fuzzy Sets and Fuzzy Logic. Vieweg Verlag, 1993

[19] Lowen R, Roubens M. Fuzzy Logic. Kluwer Academic Publishers, 1993

[20] Pavelka J. On fuzzy logic( Ⅰ ). Z. für Mathematik Logic u Grundlagen d Mathematic, 1979, 25: 45 ~ 52

[21] Pavelka J. On fuzzy logic( Ⅱ ). Z. für Mathematik Logic u Grundlagen d Mathematic, 1979, 25: 119 ~ 134

[22] Pavelka J. On fuzzy logic( Ⅲ ). Z. für Mathematik Logic u Grundlagen d Mathematic, 1979, 25: 447 ~ 464

[23] 王国俊. $L$-fuzzy 拓扑空间论. 西安: 陕西师范大学出版社, 1988

[24] 吴望名. 模糊推理的原理和方法. 贵阳: 贵州科学技术出版社, 1994

[25] 陈永义. 模糊控制技术及应用实例. 北京: 北京师范大学出版社, 1993

[26] 徐扬，乔全喜，陈超平等. 不确定性推理. 成都：西南交通大学出版社，1994

[27] 王国俊. 模糊推理与模糊逻辑. 系统工程学报，1998，13(2):1 ~ 16

[28] Zadeh L A. Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision processes. IEEE Trans., Systems, Man and Cybernetics, 1973, 1:28 ~ 44

[29] Buckley J, Hayashi Y. Can approximate reasoning be consistent? Fuzzy Sets and Systems, 1994, 65:13 ~ 18

[30] Wang G J. Fuzzy Continuous input-output controllers are universal approximators. Fuzzy Sets and Systems, 1998, 97(1):95 ~ 100

[31] 张文修，梁广锡. 模糊控制与系统. 西安：西安交通大学出版社，1998

[32] Ying M S. A logic for approximate reasoning. J. Symbolic Logic, 1994, 59:830 ~ 837

[33] Bloc L, Borowik P. Many-Valued logic 1. Warsaw:Springer-Verlag, 1992

[34] Diamond P, Kloeden P. Metric Spaces of Fuzzy Sets. Singapore:World Scientific, 1994

[35] 郑崇友，樊磊，崔宏斌. Frame 与连续格. 北京：首都师范大学出版社，1994

[36] Giertz G et al. A Compendium of Continuous Lattices. Berlin:Springer-Verlag, 1980

[37] Tarski A. Logic, Semantics, Metamathematics. Oxford:Oxford University Press, 1956

[38] Hungerford T W. Algebra. New York:Springer-Verlag, 1974

[39] Wang G J. On the structure of value functional bag mappings. Fuzzy Sets and Systems, 1998, 95:215 ~ 221

[40] 王国俊. 蕴涵格与 Stone 表现定理的推广. 科学通报，1998，43(10)：1033 ~ 1036

[41] 刘练珍，王国俊. Fuzzy 蕴涵代数与 MV 代数. 模糊系统与数学，1998，12(1)：20 ~ 25

[42] 何颖俞，王国俊. 关于 Fuzzy 格的若干注记——兼评直觉主义模糊集. 模糊系统与数学，1997，11(4):1 ~ 4

[43] 何颖俞，王国俊. $\mathscr{L}^*$-Lindenbaum 代数的结构与 $\mathscr{L}^*$ 公理系统的简化形式. 工程数学学报，1998，15(1):1 ~ 8

[44] 刘练珍，王国俊. 三值 Majority 函数单调的充要条件. 科学通报，1998，43(20):1335

[45] Hamilton A G. Logic for mathematicians. London：Cambrige University Press, 1978

[46] Kline M. 古今数学思想(第四册). 北京大学数学系数学史翻译组译. 上海：上海科技出版社，1981

[47] 王宪钧. 数理逻辑引论. 北京：北京大学出版社，1982

[48] 王世强. 格值模型论中常量构作法的两个应用. 科学通报，1981，26(3):129 ~ 130

[49] 王浩. 数理逻辑通俗讲话. 北京：科学出版社，1983

[50] Barwise J. Handbook of mathematical logic. Amsterdam：North-Holland Publishing Company, 1977

[51] 王国俊. 一类代数上的逻辑学( Ⅰ ). 陕西师范大学学报(自然科学版)，1997，25(1):1 ~ 8

[52] 王国俊. 一类代数上的逻辑学( Ⅱ ). 陕西师范大学学报(自然科学版)，1997，25(3):1 ~ 8

[53] 王国俊. 中外模糊系统研究之比较. 国际学术动态，1994，(4):48 ~ 49

[54] 王国俊. 模糊逻辑：推理细致化. 国际学术动态，1995，(5):33 ~ 34

[55] 王国俊.模糊推理并非“似是而非”.国际学术动态，1997，(8):7~8

[56] 李洪兴.模糊控制的插值机理.中国科学(E辑)，1998，28(3):259~267

[57] Mukaidono M. Kleene algebras in fuzzy truth values(预印本)

[58] Mukaidono M. On the B-ternary logical function—a ternary logic considering ambiguity. Systems, Computers, Controls, 1972, 3(3):27~36

[59] Mukaidono M. Regular ternary logic functions—ternary logic functions suitable for treating ambiguity. IEEE Trans. on Computers, 1986, C-35(2):179~183

[60] Yamamoto Y, Mukaidono M. Meaningful special classes of ternary logic functions and majority functions. IEEE Trans. on Computers, 1988, 37(7):799~806

[61] Mukaidono M, Kikuchi H. Proposal on fuzzy interval logic. Japanese J. of Fuzzy Theory and Systems, 1990, 2(2):99~11

[62] Takagi N, Mukaidono M. Fundamental properties of Kleene-Stone logic funcitons. Proc. 21st International Symposium on Multiple-Valued Logic, Canada, 1991, 63~70

[63] 张文修，梁怡.不确定性推理原理.西安:西安交通大学出版社，1996

[64] 应明生.允许修改推理规则的开放逻辑.科学通报，1996，41(11):970~972

[65] Ying M S. Compactness, the Löwenheim-Skolem Property and the direct product of lattices of truth values. Z. Math. Logik Grundlagen Math., 1992, 38:521~524

[66] Ying M S. Deduction theorem for many-valued inference. Z. Math. Logic Grundlagen Math., 1991, 37:533~537

[67] Ying M S. The fundamental theorem of ultraproduct in Pavelka's logic. Z. Math. Logik Grundlagen Math., 1992, 38:197~201

[68] Novak V. On the syntactic-semantical completeness of first-order-fuzzy logic, (Ⅰ), (Ⅱ). Kybernetika 1990,26:47~66, 134~154

[69] Novák V. A new proof of completeness of fuzzy logic and some conclusions for approximate reasoning. Proc. FUZZ-IEEE/IFES'95, Yokohama, 1995, 1461~1468

[70] Novák V. The Alternative Mathematical Model of Linguistic Semantics and Pragmatics. New York:Plenum, 1992

[71] Wang G J, Wang W. Partial valuations and fuzzy reasoning. Guoqing Chen, Mingsheng Ying, Kai-Yuan Cai eds. Fuzzy Logic And Soft Computing, 213~220, Kluwer Academic Publishers, 1999

[72] 王国俊.模糊推理的全蕴涵三I算法.中国科学(E辑)，1999，29(1):43~53

[73] Zadeh L A. Fuzzy logic and the calculi of fuzzy rules, fuzzy graphs, and fuzzy probabilities. Computers & Mathematics with Applications, 1999, 37:35

[74] Wang G J. On the logic foundation of fuzzy reasoning. Information Sciences, 1999, 117(1):47~88

[75] 王国俊.关于模糊语义紧致性的若干定理.科学通报，1999，44(12):1275~1279

[76] 王国俊.蕴涵格及其 Fuzzy 拓扑表现定理.数学学报，1999，42(1):133~140

[77] Blackburn P, de Rijke M, Venema Y. Modal Logic. New York: Cambridge University

Press, 2001

[78] Mckinsey J, Tarski A. The algebra of topology. Annals of Mathematics, 1944, 45:141 ~ 191

[79] Aiello M, Benthem J V, Bezhanishvili G. Reasoning about space: the modal way. Journal of Logic and Computation, 2003, 13:889 ~ 920

[80] 王雨田. 现代逻辑科学导引(C5 部分:胡耀鼎编模态逻辑). 北京:中国人民大学出版社, 1987

[81] Fagin R, Halpern J Y, Moses Y, M. Y. Vardi reasoning about knowledge. London: The MIT Press, 1995

[82] Baader F, Calvenese D, McGuinness D L et al. The description logic handbook, theory, implementation, and applications. New York: Cambridge University Press, 2003

# 索　引

## E



## F



## G



## H

## Z